

Renkaat, kunnat ja polynomit

Harjoitus 7 syksy 2012

1. Osoita, että polynomi

$$p(x) = [1]x^2 + [2]x + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$$

on jaoton. Laajenna kunta \mathbb{Z}_3 yhdeksän alkion kunnaksi polynomin $p(x)$ avulla. Oletetaan, että tässä laajennuskunnassa $p(\alpha) = 0$. Esitä laajennuskunnan nolla-alkiosta eroavat alkiot alkion α potensseina.

2. Olkoot

$$f(x) = 5x^5 + 6x^3 + 3x^2 + x + 3$$

ja

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

polymirenkaan $\mathbb{Q}[x]$ polynomeja. Laske syt $(f(x), g(x))$ ja esitä se polynomien $f(x)$ ja $g(x)$ yhdisteenä.

3. Olkoot

$$f(x) = [2]x^4 + [2]x^3 + [3]x^2 + [1]x + [3]$$

ja

$$g(x) = [3]x^2 + [1]x + [1]$$

polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomeja. Osoita, että $f(x)$ ja $g(x)$ eivät ole keskenään jaottomia. Esitä syt $(f(x), g(x))$ polynomien $f(x)$ ja $g(x)$ yhdisteenä.

4. Oletetaan, että $q(x)$ ja $f(x)$ ovat keskenään jaottomia polynomeja, ja $q(x) \mid f(x)g(x)$. Osoita, että $q(x) \mid g(x)$.