

Todennäköisyyslaskenna peruskurssi

Harjoitus 5 syksy 2012

1. Ilmoita satunnaismuuttujan X jakauma seuraavissa tapauksissa.
 - (a) X on viallisten tuotteiden lukumäärä laatikossa, johon on pakattu 48 tuotetta. Oletamme, että kullakin tuotteella on toisistaan riippumatta todennäköisyys 0,05 olla viallinen.
 - (b) X on ässien lukumäärä vedettäessä 13 korttia korttipakasta ilman takaisinpanoa.
 - (c) X on tietyssä lokerossa olevien pallojen lukumäärä, kun meillä on n palloa ja k lokeroa ja kukin pallo pannaan satunnaisesti valittuun lokeroon.
 - (d) X on turhien kertojen lukumäärä toistuvassa kahden nopan heitossa ennen ensimmäisen kuutosparin esiintymistä.
 - (e) X on värisokeiden lukumäärä 10 hengen otoksessa takaisinpanolla 100 hengen populaatiossa, jossa on kolme värisokeata.

2. Viesti koostuu sadasta merkistä (joko 0 tai 1), joista jokainen merkki voi tiedonsiirtovaiheessa vaihtua (nollasta ykköseksi tai päinvastoin) todennäköisyydellä $p = 0,001$ muista merkeistä riippumatta. Millä todennäköisyydellä viesti on alkuperäisessä muodossaan kymmenen tiedonsiirtovaiheen jälkeen?

Vihje: Jos $X \sim \text{Bin}(n, p)$, niin

$$P(\text{"X parillinen"}) = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$$

3. Tikkataulu muodostuu samankeskisistä r -, $2r$ -, ..., $9r$ - ja $10r$ -keskisistä ympyröistä, missä $r > 0$ on vakio. Näistä muodostuva uloin rengas antaa yhden pisteen, seuraava 2 jne. Keskellä oleva ympyrä antaa 10 pistettä. Oletamme, että tauluun heitettäessä osa-alueen todennäköisyys on verrannollinen sen pinta-alaan. Määritä yhdellä tauluun osuvalla tikalla saatavan pisteluvun odotusarvo.
4. Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x}, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- (a) Määritä vakio c ,
 - (b) johda kertymäfunktio,
 - (c) laske $P\{0 < X < 1\}$.
5. Maanalainen lähtee pääteasemaltaan kello 7 ja 8 välillä 3, 5, 8, 10, 13, 15, 18, ... minuuttia yli 7. Laske todennäköisyys sille, että asemalle saapuva henkilö ei joudu odottamaan minuuttia kauempaa, jos hänen saapumisaikansa jakautuu tasaisesti klo 7.02 ja 7.24 välille.
 6. Henkilön odotusaika raitiovaunuun jakautuu tasaisesti välille $]0, 10[$ (yksikkönä minuutti). Määritä todennäköisyys sille, että 4 minuuttia turhaan odottanut henkilö joutuu odottamaan vielä vähintään x minuuttia.
 7. Asiakalta pankissa kuluva aika on jakaumaltaan $\text{Exp}(\frac{1}{10})$, yksikkönä minuutti.
 - (a) Millä todennäköisyydellä asiakas viipty pankissa yli 15 minuuttia?
 - (b) Millä todennäköisyydellä 10 minuuttia pankissa ollut asiakas viipty vielä yli 15 minuuttia?