Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ia

Harjoitus 2, syksy 2013

1. a)

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4x + 2 &= 0 && \mid : 2 \\
x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
(x-1)^2 &= 0 \\
x &= 1 && \text{(kaksinkertainen nollakohta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{TAI} \qquad x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} \\
&= \frac{4 \pm 0}{4} = 1
\end{aligned}$$

Jaettuna tekijöihin: $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$.

b) $x^2 - x - 2 = 0$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\
&= \frac{1 \pm 3}{2} \\
&= \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Jaettuna tekijöihin: $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

c) $x^2 - x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

Diskriminantti $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$

$\Rightarrow$ yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja

$\Rightarrow$ ei jakaannu 1. asteen tekijöihin $\mathbb{R}$:ssä.

2. a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

Mahdolliset rationaalilukuratkaisut:

$$\begin{aligned} &p : \pm 1,\ \pm 3 \\ &q : \pm 1,\ \pm 2 \\ &\frac{p}{q} : \pm\frac{1}{2},\ \pm 1,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm 3 \end{aligned}$$

Kokeillaan, onko $x = -1$ yhtälön nollakohta:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 &= 0 \\ -2 - 5 + 4 + 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x = -1$ on eräs polynomin $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ nollakohta

$\Rightarrow$ $x + 1$ on eräs polynomin $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ tekijöistä

Jaetaan jakokulmassa polynomi $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ tekijällä $x + 1$.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & 2x^2 & -7x & +3 & \\
\hline
x+1 & 2x^3 & -5x^2 & -4x & +3 \\
\hline
 & \mp 2x^3 & \mp 2x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -7x^2 & -4x & \\
 & & \pm 7x^2 & \pm 7x & \\
\cline{3-4}
 & & & +3x & +3 \\
 & & & \mp 3x & \mp 3 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Siten $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1) \cdot (2x^2 - 7x + 3)$
Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
& 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x+1)(2x^2 - 7x + 3) = 0
\end{aligned}
$$

Tulon 0–sääntö $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
x + 1 = 0 \qquad & \vee \qquad 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\
x = -1 \qquad & \vee \qquad x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\
& \qquad\quad = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \\
& \qquad\quad = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \\
& \qquad\quad = \frac{7 \pm 5}{4} \\
& \qquad\quad = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Yhtälön $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ ratkaisuja ovat $x = -1$, $x = 3$ tai $x = \frac{1}{2}$.

b)

$$-4x^3 + 5x^2 - 2x = -x^4$$
$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0$$

Tulon 0–sääntö $\Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$

Tarkastellaan yhtälön $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ mahdollisia rationaaliluku-ratkaisuja:

$$p : \pm 1, \pm 2$$
$$q : \pm 1$$
$$\frac{p}{q} : \pm 1, \pm 2$$

Kokeillaan, onko $x = 1$ yhtälön nollakohta:

$$1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot -2 = 0$$
$$1 - 4 + 5 - 2 = 0$$
$$0 = 0$$

$\Rightarrow x = 1$ on eräs polynomin $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ nollakohta

$\Rightarrow x - 1$ on eräs polynomin $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ tekijöistä

Jaetaan jakokulmassa polynomi $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -3x & +2 & \\ \hline
x-1 & x^3 & -4x^2 & +5x & -2 \\
 & \mp x^3 & \pm x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x^2 & +5x & \\
 & & \pm 3x^2 & \mp 3x & \\ \cline{3-4}
 & & & +2x & -2 \\
 & & & \mp 2x & \pm 2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

Siten $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)\cdot(x^2 - 3x + 2)$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} & x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x-1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \end{aligned}$$

Tulon 0–sääntö $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ & x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ & \qquad = \frac{3 \pm 1}{2} \\ & \qquad = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Yhtälön $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0$ ratkaisuja ovat $x = 0$, $x = 1$ (kaksinkertainen) tai $x = 2$.

3. a) $2x^2 - 4x + 2 > 0$

Nollakohdat: $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} \\ &= \frac{4 \pm 0}{4} = 1 \end{aligned}$$

Kuvaaja: $2x^2 - 4x + 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päättely: $2x^2 - 4x + 2 > 0$ toteutuu silloin, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $x^2 - x + 2 \leq 0$

Nollakohdat: $x^2 - x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ei nollakohtia.

Kuvaaja:

$x^2 - x + 2$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päättely: $x^2 - x + 2 \leq 0$ ei toteudu millään $x \in \mathbb{R}$ ts. epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $-x^2 - 4x - 3 \leq 0$

Nollakohdat: $-x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

Kuvaaja:

$-x^2 - 4x - 3$ on alaspäin aukeava paraabeli.

Päättely: $-x^2 - 4x - 3 \leq 0$ toteutuu, kun $x \leq -3$ tai $x \geq -1$.

d) $x^2 + x - 1 \leq 0$

Nollakohdat: $x^2 + x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Siis $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ tai $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Kuvaaja:

$x^2 + x - 1$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päättely: $x^2 + x - 1 \leq 0$ toteutuu, kun $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

4. a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \leq 0$

<u>Jaetaan vasen puoli 1. ja 2. asteen tekijöihin</u>

HOX: *Kun löydetään nollakohta, niin löydetään tekijä!*

Mahdolliset rationaalilukuratkaisut yhtälölle $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$:

$$p : \pm 1,\ \pm 3$$

$$q : \pm 1,\ \pm 2$$

$$\frac{p}{q} : \pm\frac{1}{2},\ \pm 1,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm 3$$

Kokeillaan, onko $x = -1$ yhtälön nollakohta:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 &= 0 \\ -2 - 5 + 4 + 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = -1$ on eräs polynomin $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ nollakohta

$\Rightarrow x + 1$ on eräs polynomin $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ tekijöistä

Jaetaan jakokulmassa polynomi $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ tekijällä $x + 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2x^2 & -7x & +3 & \\ \hline x+1 & 2x^3 & -5x^2 & -4x & +3 \\ \hline & \mp 2x^3 & \mp 2x^2 & & \\ \cline{2-3} & & -7x^2 & -4x & \\ & & \pm 7x^2 & \pm 7x & \\ \cline{3-4} & & & +3x & +3 \\ & & & \mp 3x & \mp 3 \\ \cline{4-5} & & & & 0 \end{array}$$

Siten $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x + 1) \cdot (2x^2 - 7x + 3)$.

Lasketaan vielä toisen asteen lausekkeen $2x^2 - 7x + 3$ nollakohdat.

Nollakohdat: $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 5}{4} \\ &= \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Merkkikaavio:

		-1		$\frac{1}{2}$		3	
$x+1$	$-$	|	$+$		$+$		$+$
$2x^2 - 7x + 3$	$+$		$+$	|	$-$	|	$+$
$(x+1)(2x^2 - 7x + 3)$	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

Päättely: $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \leq 0$ toteutuu, kun $x \leq -1$ tai $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

b) $-4x^3 + 5x^2 - 2x \leq -x^4$ eli $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x \leq 0$

<u>Jaetaan vasen puoli 1. ja 2. asteen tekijöihin</u>

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = x(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$$

Jaetaan kolmannen asteen tekijä edelleen alemman asteen tekijöihin.

Tarkastellaan yhtälön $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ mahdollisia rationaalilukuratkaisuja:

$$\begin{aligned} &p : \pm 1,\ \pm 2 \\ &q : \pm 1 \\ &\frac{p}{q} : \pm 1,\ \pm 2 \end{aligned}$$

Kokeillaan, onko $x = 1$ yhtälön nollakohta:

$$\begin{aligned} 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot -2 &= 0 \\ 1 - 4 + 5 - 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 1$ on eräs polynomin $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ nollakohta
$\Rightarrow x - 1$ on eräs polynomin $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ tekijöistä

Jaetaan jakokulmassa polynomi $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ tekijällä $x - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -3x & +2 & \\ \cline{2-5}
x - 1 & x^3 & -4x^2 & +5x & -2 \\ \hline
 & \mp x^3 & \pm x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x^2 & +5x & \\
 & & \pm 3x^2 & \mp 3x & \\ \cline{3-4}
 & & & +2x & -2 \\
 & & & \mp 2x & \pm 2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

Siten $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

Lasketaan vielä toisen asteen lausekkeen $x^2 - 3x + 2$ nollakohdat.

Nollakohdat: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm 1}{2} \\ &= \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

<u>Merkkikaavio:</u>

		0		1		2	
x	$-$	|	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	|	$+$		$+$
x^2-3x+2	$+$		$+$	|	$-$	|	$+$
$x(x-1)(x^2-3x+2)$	$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$

<u>Päättely:</u> $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x \leq 0$ toteutuu, kun $0 \leq x \leq 2$.