

Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ia

Harjoitus 3, syksy 2013

1. Tapa 1.

$$\frac{1}{x} = x + 1 \quad | \cdot x \quad \text{Ehto: } x \neq 0 \text{ (nimittäjän nollakohta)}$$

$$1 = x^2 + x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tapa 2.

$$\frac{1}{x} = x + 1 \quad \text{Ehto: } x \neq 0 \text{ (nimittäjän nollakohta)}$$

$$x) x + x) 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x} = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{jatkuu samoin kuin tavassa 1}$$

2. $\frac{1}{x} < \frac{3x-1}{x} \leq 2$ Ehto: $x \neq 0$ (nimittäjän nollakohta)

$$\frac{1}{x} < \frac{3x-1}{x} \quad \text{ja} \quad \frac{3x-1}{x} \leq 2$$

$$\frac{1}{x} - \frac{3x-1}{x} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{3x-1}{x} - x) 2 \leq 0$$

$$\frac{1-3x+1}{x} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{3x-1-2x}{x} \leq 0$$

$$\frac{2-3x}{x} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x-1}{x} \leq 0$$

Merkkikaavio:

$$\begin{array}{rcc}
 & 0 & \frac{2}{3} \\
 \hline
 P(x) = 2 - 3x & + & + & | & - \\
 \hline
 Q(x) = x & - & | & + & + \\
 \hline
 \frac{P(x)}{Q(x)} & - & | & + & | & -
 \end{array}$$

$\frac{2-3x}{x} < 0$ toteutuu, kun $x < 0$ tai $x > \frac{2}{3}$.

Merkkikaavio:

$$\begin{array}{rcc}
 & 0 & 1 \\
 \hline
 P(x) = x - 1 & - & - & | & + \\
 \hline
 Q(x) = x & - & | & + & + \\
 \hline
 \frac{P(x)}{Q(x)} & + & | & - & | & +
 \end{array}$$

$\frac{x-1}{x} \leq 0$ toteutuu, kun $0 \leq x \leq 1$.

Yhdistetään merkkikaavioista saadut tulokset sekä ehto $x \neq 0$:

$$\begin{array}{c}
 \underline{0 \quad \frac{2}{3} \quad 1} \\
 \hline
 \\
 \hline
 \text{ja} \\
 \hline
 \end{array}$$

Vastaus: $\frac{1}{x} < \frac{3x-1}{x} \leq 2$ toteutuu silloin, kun $\frac{2}{3} < x \leq 1$.

3. a) $|x| + |3x - 1| = 4$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x - 1), & 3x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -3x + 1, & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Osaväljako:

$x < 0$	$0 \leq x < \frac{1}{3}$	$x \geq \frac{1}{3}$
$-x + (-3x + 1) = 4$	$x + (-3x + 1) = 4$	$x + (3x - 1) = 4$
$-x - 3x + 1 = 4$	$x - 3x + 1 = 4$	$x + 3x - 1 = 4$
$-4x = 3 \quad : (-4)$	$-2x = 3 \quad : (-2)$	$4x = 5 \quad : 4$
$x = -\frac{3}{4}$	$x = -\frac{3}{2}$	$x = \frac{5}{4}$
$x = -\frac{3}{4} < 0 \quad \text{ok}$	$x = -\frac{3}{2} \notin [0, \frac{1}{3}[$ $\Rightarrow \text{ei ole ratkaisu}$	$x = \frac{5}{4} > \frac{1}{3} \quad \text{ok}$

Vastaus: $x = -\frac{3}{4}$ tai $x = \frac{5}{4}$.

b) Tapa 1.

$$|x - 6| = 3 - 2x \quad \text{Ehto: } 3 - 2x \geq 0$$

$$-2x \geq -3 \quad | : (-2)$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x - 6 = 3 - 2x & \text{tai } x - 6 = -(3 - 2x) \\ 3x = 9 \quad | : 3 & -x = 3 \quad | \cdot (-1) \\ x = 3 & x = -3 \end{array}$$

$x = 3$ ei toteuta ehtoa $x \leq \frac{3}{2}$.

$x = -3$ toteuttaa ehdon $x \leq \frac{3}{2}$.

Vastaus: $x = -3$

Tapa 2.

$$\begin{array}{ll} |x - 6| = 3 - 2x & \text{Ehto: } 3 - 2x \geq 0 \\ & -2x \geq -3 \quad | : (-2) \\ & x \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} |x - 6| = 3 - 2x & |(\)^2 \\ (x - 6)^2 = (3 - 2x)^2 & \\ x^2 - 12x + 36 = 9 - 12x + 4x^2 & \\ -3x^2 + 27 = 0 & | \cdot (-1) \\ 3x^2 - 27 = 0 & \\ 3x^2 = 27 & | : 3 \\ x^2 = 9 & | \sqrt{} \\ x = \pm\sqrt{9} & \\ x = \pm 3 & \\ x = 3 & \text{tai } x = -3 \end{array}$$

$x = 3$ ei toteuta ehtoa $x \leq \frac{3}{2}$.

$x = -3$ toteuttaa ehdon $x \leq \frac{3}{2}$.

Vastaus: $x = -3$

Tapa 3.

$$|x - 6| = 3 - 2x$$

$$\begin{aligned} |x - 6| &= \begin{cases} x - 6, & x - 6 \geq 0 \\ -(x - 6), & x - 6 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - 6, & x \geq 6 \\ -x + 6, & x < 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Osavälijako:

$x < 6$	$x \geq 6$
$-x + 6 = 3 - 2x$	$x - 6 = 3 - 2x$
$-x + 2x = 3 - 6$	$x + 2x = 3 + 6$
$x = -3$	$x = 3$
Toteuttaa ehdon $x < 6$	ei toteuta ehtoa $x \geq 6$

Vastaus: $x = -3$

c) Tapa 1.

$$\begin{aligned} |x - 6| &= |3 - 2x| \\ \Rightarrow x - 6 &= 3 - 2x && \text{tai} && x - 6 = -(3 - 2x) \\ 3x &= 9 \quad | : 3 && && -x = 3 \quad | \cdot (-1) \\ x &= 3 && && x = -3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -3$ tai $x = 3$.

Tapa 2.

$$\begin{aligned} |x - 6| &= |3 - 2x| && |(\)^2 \\ (x - 6)^2 &= (3 - 2x)^2 \\ x^2 - 12x + 36 &= 9 - 12x + 4x^2 \\ 3x^2 &= 27 && | : 3 \\ x^2 &= 9 && |\sqrt{\ } \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -3$ tai $x = 3$.

Tapa 3.

$$|x - 6| = |3 - 2x|$$

$$|x| = \begin{cases} x - 6, & x \geq 6 \\ -x + 6, & x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |3 - 2x| &= \begin{cases} 3 - 2x, & 3 - 2x \geq 0 \\ -(3 - 2x), & 3 - 2x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3 - 2x, & x \leq \frac{3}{2} \\ -3 + 2x, & x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Osavälijako:

$x \leq \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 6$	$x \geq 6$
$-x + 6 = 3 - 2x$	$-x + 6 = -3 + 2x$	$x - 6 = -3 + 2x$
$x = -3$	$-3x = -9$	$-x = 3$
$x = -3$	$x = 3$	$x = -3$
Toteuttaa ehdon	Toteuttaa ehdon	Ei toteuta ehtoa
$x \leq \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 6$	$x \geq 6$

Vastaus: $x = -3$ tai $x = 3$.

4. a) $|x| + |3x - 1| \leq 4$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |3x - 1| &= \begin{cases} 3x - 1, & 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x - 1), & 3x - 1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -3x + 1, & x < \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Osavälijako:

$x < 0$	$0 \leq x < \frac{1}{3}$	$x \geq \frac{1}{3}$
$-x + (-3x + 1) \leq 4$	$x + (-3x + 1) \leq 4$	$x + (3x - 1) \leq 4$
$-x - 3x + 1 \leq 4$	$x - 3x + 1 \leq 4$	$x + 3x - 1 \leq 4$
$-4x \leq 3 \quad : (-4)$	$-2x \leq 3 \quad : (-2)$	$4x \leq 5 \quad : 4$
$x \geq -\frac{3}{4}$	$x \geq -\frac{3}{2}$	$x \leq \frac{5}{4}$
Osaratkaisu:	Osaratkaisu:	Osaratkaisu:
$-\frac{3}{4} \leq x < 0$	$0 \leq x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{4}$

Yhdistetään osaratkaisut:

$$\underline{-\frac{3}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{4}}$$

tai

Vastaus: Epäyhtälön $|x| + |3x - 1| \leq 4$ ratkaisu on $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

b) $|x - 6| \leq 3 - 2x$

$$|x - 6| = \begin{cases} x - 6, & x - 6 \geq 0 \\ -(x - 6), & x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 6, & x \geq 6 \\ -x + 6, & x < 6 \end{cases}$$

Osaväljako:

$x < 6$	$x \geq 6$
$-x + 6 \leq 3 - 2x$	$x - 6 \leq 3 - 2x$
$-x + 2x \leq 3 - 6$	$x + 2x \leq 3 + 6$
$x \leq -3$	$x \leq 3$
Osaratkaisu:	Nyt $x \leq 3$ ei toteuta ehtoa $x \geq 6$
$x \leq -3$	\Rightarrow Ei osaratkaisua.

Vastaus: $x \leq -3$

c) $|x - 6| \geq 3 - 2x$

$$|x - 6| = \begin{cases} x - 6, & x - 6 \geq 0 \\ -(x - 6), & x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 6, & x \geq 6 \\ -x + 6, & x < 6 \end{cases}$$

Osavälijako:

$x < 6$	$x \geq 6$
$-x + 6 \geq 3 - 2x$	$x - 6 \geq 3 - 2x$
$-x + 2x \geq 3 - 6$	$x + 2x \geq 3 + 6$
$x \geq -3$	$x \geq 3$
Osaratkaisu:	Osaratkaisu:
$-3 \leq x < 6$	$x \geq 6$

Yhdistetään osaratkaisut:

$$\begin{array}{c} -3 \quad 6 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

tai

$$\begin{array}{c} \hline \\ \hline \end{array}$$

Vastaus: $x \geq -3$

d) $|x - 3| + |x^2 - 3x + 2| < 2$

$$\begin{aligned} |x - 3| &= \begin{cases} x - 3, & x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3), & x - 3 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -x + 3, & x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm 1}{2} \\ &= \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \text{ tai } x \geq 2 \\ -x^2 + 3x - 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Osavälijako:

$x \leq 1$	$1 < x < 2$
$-x + 3 + x^2 - 3x + 2 < 2$	$-x + 3 - x^2 + 3x - 2 < 2$
$x^2 - 4x + 3 < 0$	$-x^2 + 2x - 1 < 0$
nk. $x^2 - 4x + 3 = 0$	$x^2 - 2x + 1 > 0$
...	nk. $x^2 - 2x + 1 = 0$
$x = 1$ tai $x = 3$...
	$x = 1$
$1 < x < 3$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Ei toteuta ehtoa $x \leq 1$	Osaratkaisuu:
\Rightarrow Ei osaratkaisua	$1 < x < 2$

$2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
$-x + 3 + x^2 - 3x + 2 < 2$	$x - 3 + x^2 - 3x + 2 < 2$
$x^2 - 4x + 3 < 0$	$x^2 - 2x - 3 < 0$
nk. $x^2 - 4x + 3 = 0$	nk. $x^2 - 2x - 3 = 0$
...	...
$x = 1$ tai $x = 3$	$x = -1$ tai $x = 3$
$1 < x < 3$	$-1 < x < 3$
Osaratkaisu:	Ei toteuta ehtoa $x \geq 3$
$2 \leq x < 3$	\Rightarrow Ei osaratkaisua

Vastaus: Epäyhtälön $|x - 3| + |x^2 - 3x + 2| < 2$ ratkaisuksi saadaan $1 < x < 3$.

e) $|x - 6| \leq |3 - 2x|$

Nyt molemmat puolet ovat varmasti positiiviset, joten korotetaan puolittain toiseen potenssiin.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x - 6)^2 &\leq (3 - 2x)^2 \\ x^2 - 12x + 36 &\leq 9 - 12x + 4x^2 \\ 3x^2 - 27 &\geq 0 && | : 3 \\ x^2 - 9 &\geq 0 \\ \text{nk. } x^2 &= 9 && |\sqrt{} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

$x^2 - 9$ on ylöspäin aukeava paraabeli

Vastaus: Epäyhtälön $|x - 6| \leq |3 - 2x|$ vastaukseksi saadaan $x \leq -3$ tai $x \geq 3$.