Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ia

Harjoitus 4, syksy 2013

1. a)

$$\sqrt{x} = 2 - x$$

Ehto: $x \geq 0$ ja $2 - x \geq 0$

$x \geq 0$ ja $-x \geq -2 \quad | \cdot (-1)$

$x \geq 0$ ja $x \leq 2$

$\Rightarrow \; 0 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= 2 - x \qquad |(\ )^2 \\
x &= (2-x)^2 \\
x &= 4 - 4x + x^2 \\
-x^2 + 5x - 4 &= 0 \qquad | \cdot (-1) \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{5 \pm 3}{2} \\
&= \begin{cases} 4 \; > 2 \quad \Rightarrow \quad \text{ei ole ratkaisu} \\ 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 1$.

b) Tapa 1.

$\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 2$ Ehto: $x \geq 0$ ja $x - 4 \geq 0$

$$x \geq 0 \text{ ja } x \geq 4$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 4$$

$\sqrt{x-4} = 2 - \sqrt{x}$ Ehto: $2 - \sqrt{x} \geq 0$

$$\sqrt{x} \leq 2 \quad |(\ )^2$$

$$x \leq 4$$

$\sqrt{x-4} = 2 - \sqrt{x} \quad |(\ )^2$ Yhdistetään ehdot: $\Rightarrow x = 4$

$$\begin{aligned}
x - 4 &= 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 \\
x - 4 &= 4 - 4\sqrt{x} + x \\
4\sqrt{x} &= 8 && |:4 \\
\sqrt{x} &= 2 && |(\ )^2 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 4$, joka voidaan nyt hyväksyä vastaukseksi, sillä se toteuttaa ehdon $x = 4$.

Tapa 2.

Ehtona saadaan ainoaksi kelpaavaksi ratkaisuksi $x = 4$, joten kokeillaan sijoittaa se alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{x-4} &= 2 \\
\sqrt{4} + \sqrt{4-4} &= 2 \\
2 + 0 &= 2 \\
2 &= 2.
\end{aligned}$$

Siis $x = 4$ toteuttaa yhtälön, joten se on ehdon mukainen ratkaisu.

2. a)

$$\sqrt{x} < 2 - x \qquad \text{Ehto: } x \geq 0 \text{ ja } 2 - x > 0$$

$$x \geq 0 \text{ ja } x < 2$$

$$0 \leq x < 2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &< 2 - x \quad |(\ )^2 \\ x &< (2-x)^2 \\ x &< 4 - 4x + x^2 \\ x^2 - 5x + 4 &> 0 \end{aligned}$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm 3}{2} \\ &= \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Siis $x < 1$ tai $x > 4$, mutta $x > 4$ ei käy vastaukseksi, koska se ei kuulu ehtoihin.

Vastaus: $0 \leq x < 1$.

b) $\sqrt{x} \geq 2 - x$

Osavälijako

$$\begin{aligned} 1^o \qquad & 2 - x \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^o \qquad & 2 - x < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x > 2 \end{aligned}$$

$1^o \quad x \leq 2$

$$\sqrt{x} \geq 2 - x \qquad\qquad \text{Ehto: } x \geq 0$$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat nyt positiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &\geq 2 - x \quad |()^2 \\ x &\geq 4 - 4x + x^2 \\ x^2 - 5x + 4 &\leq 0 \\ 1 \leq x &\leq 4 \end{aligned}$$

Yhdistämällä ehto $x \geq 0$, osaväli $x \leq 2$ ja saatu ratkaisu $1 \leq x \leq 4$ saadaan osaratkaisu: $1 \leq x \leq 2$.

$2^o \quad x > 2$

$$\sqrt{x} \geq 2 - x \qquad\qquad \text{Ehto: } x \geq 0$$

Nyt epäyhtälön vasen puoli $\sqrt{x} \geq 0$ ja oikea puoli $2 - x$ negatiivinen, joten epäyhtälö on aina tosi $x \geq 0$.

Ydistämällä ehto $x \geq 0$, osaväli $x > 2$ ja saatu ratkaisu $x \geq 0$ saadaan osaratkaisu: $x > 2$.

$1^o - 2^o \quad \Rightarrow x \geq 1.$

c)

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-4} < 2 \qquad \text{Ehto: } x \geq 0 \text{ ja } x - 4 \geq 0$$

$$x \geq 0 \text{ ja } x \geq 4$$

$$\Rightarrow x \geq 4$$

$$\sqrt{x-4} < 2 - \sqrt{x}$$

Jotta epäyhtälöllä olisi ratkaisu, täytyy olla

$$2 - \sqrt{x} > 0 \qquad \text{ja} \qquad x \geq 0$$

$$2 > \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} < 2 \quad |(\ )^2$$

$$x < 4$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x < 4$$

Toisaalta ehdon $x \geq 4$ täytyy toteutua, jotta juuret olisi määritelty. Epäyhtälöllä ei näin ollen ole ratkaisua.

3. a)

$$x^2 = 7 \qquad |\sqrt{}$$
$$x = \pm\sqrt{7}$$

b)

$$x^3 = 7 \qquad |\sqrt[3]{}$$
$$x = \sqrt[3]{7}$$

c)

$$x^4 = 7 \qquad |\sqrt[4]{}$$
$$x = \pm\sqrt[4]{7}$$

d)

$$x^2 = -5$$
$$\Rightarrow \text{ei ratkaisua, koska } -5 < 0$$

e)

$$x^3 = -5 \qquad |\sqrt[3]{}$$
$$x = \sqrt[3]{-5}$$

f)

$$x^4 = -5$$
$$\Rightarrow \text{ei ratkaisua, koska } -5 < 0$$

g)

$$x^3 \geq -27$$
$$x^3 + 27 \geq 0$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^3 + 27 &= 0 \\ x^3 &= -27 && \Big| \sqrt[3]{} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Merkkikaavio:

	< -3	> -3
$x^3 + 27$	$-$	$+$

Päättely: $x \geq -3$

h)

$$\begin{aligned} x^4 &> 2 \\ x^4 - 2 &> 0 \end{aligned}$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} x^4 - 2 &= 0 \\ x^4 &= 2 && \Big| \sqrt[4]{} \\ x &= \pm\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

Merkkikaavio:

	$< -\sqrt[4]{2}$	$-\sqrt[4]{2} \ldots \sqrt[4]{2}$	$> \sqrt[4]{2}$
$x^4 - 2$	$+$	$-$	$+$

Päättely: $x < -\sqrt[4]{2}$ tai $x > \sqrt[4]{2}$

4. a)

$$
\begin{aligned}
3^{-x^2} &= (\sqrt[4]{3})^{-5x+1} \\
3^{-x^2} &= (3^{\frac{1}{4}})^{-5x+1} \\
3^{-x^2} &= 3^{\frac{1}{4}(-5x+1)} \\
-x^2 &= \frac{1}{4}(-5x+1) \\
-x^2 &= -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4} \quad | \cdot 4 \\
-4x^2 &= -5x + 1 \\
4x^2 - 5x + 1 &= 0 \\
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\
&= \frac{5 \pm 3}{8} \\
&= \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = 1$ tai $x = \frac{1}{4}$.

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{3^{2x-3}}{\sqrt{2}} &< \frac{1}{\sqrt{54}} \quad | \cdot \sqrt{2} \\
3^{2x-3} &< \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \\
3^{2x-3} &< \sqrt{\frac{2}{54}} \\
3^{2x-3} &< \sqrt{\frac{1}{27}} \\
3^{2x-3} &< \sqrt{\frac{1}{3^3}} \\
3^{2x-3} &< (3^{-3})^{\frac{1}{2}} \\
3^{2x-3} &< 3^{-\frac{3}{2}} \qquad\qquad f(x) = 3^x \text{ on aidosti kasvava} \\
2x - 3 &< -\frac{3}{2} \\
2x &< 3 - \frac{3}{2} \\
2x &< \frac{3}{2} \quad | : 2 \\
x &< \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Epäyhtälön ratkaisu on $x < \frac{3}{4}$

c)

$$
\begin{aligned}
2^{2x} + 1 &= 2^{x+1} \\
2^{2x} + 1 &= 2^x \cdot 2 \\
2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 &= 0 \\
(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 &= 0 \qquad\qquad \text{sijoitetaan } y = 2^x \\
y^2 - 2y + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Suoritetaan takaisin sijoitus, jolloin $2^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = 0$.

d)

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 1 &\leq 2^{x+1} \\ 2^{2x} + 1 &\leq 2^x \cdot 2 \\ 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 &\leq 0 \\ (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 &\leq 0 && \text{sijoitetaan } y = 2^x \\ y^2 - 2y + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Nollakohdat:

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Kuvaaja: $y^2 - 2y + 1$ on ylöspäin aukeava paraabeli.

Epäyhtälön $y^2 - 2y + 1 \leq 0$ ratkaisu on $y = 1$.

Suoritetaan takaisin sijoitus, jolloin $2^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Vastaus: Epäyhtälön ratkaisu on $x = 0$.