Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ia

Harjoitus 5, syksy 2013

1. a) Tapa 1.

$$
\begin{aligned}
2\log_5(x+1) &= 1 \qquad |:2 && \text{Ehto: } x+1>0 \text{ eli } x>-1\\
\log_5(x+1) &= \frac{1}{2}\\
\log_5(x+1) &= \log_5 5^{\frac{1}{2}}\\
x+1 &= 5^{\frac{1}{2}}\\
x+1 &= \sqrt{5}\\
x &= \sqrt{5}-1 && \text{toteuttaa ehdon}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = \sqrt{5} - 1$.

Tapa 2.

$$
\begin{aligned}
2\log_5(x+1) &= 1 && \text{Ehto: } x+1>0 \text{ eli } x>-1\\
\log_5(x+1)^2 &= 1\\
(x+1)^2 &= 5^1 \quad |\sqrt{}\\
x+1 &= \pm\sqrt{5}\\
x+1 &= \sqrt{5} \quad \text{tai} && x+1=-\sqrt{5}\\
x &= \sqrt{5}-1 && x=-\sqrt{5}-1\\
&\text{toteuttaa ehdon} && \text{ei toteuta ehtoa}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = \sqrt{5} - 1$.

b) Tapa 1.

$$\log_{10}(x^2-1) = 1 + \log_{10}(x-1)$$

Ehto: $x^2 - 1 > 0$ ja $x - 1 > 0$

nk. $x^2 = 1$ ja $x > 1$

$x = \pm 1$ ja $x > 1$

$x < -1$ tai $x > 1$ ja $x > 1$

Siis $x > 1$

$$\begin{aligned}
\log_{10}(x^2-1) &= \log_{10} 10^1 + \log_{10}(x-1) \\
\log_{10}(x^2-1) &= \log_{10} 10 + \log_{10}(x-1) \\
\log_{10}(x^2-1) &= \log_{10}(10(x-1)) \\
x^2 - 1 &= (10(x-1)) \\
x^2 - 10x + 9 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{10 \pm 8}{2} \\
&= \begin{cases} 9 & \text{toteuttaa ehdon} \\ 1 & \text{ei toteuta ehtoa} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = 9$.

Tapa 2.

$$\log_{10}(x^2-1) = 1 + \log_{10}(x-1)$$

Ehto: $x^2-1>0$ ja $x-1>0$

nk. $x^2=1$ ja $x>1$

$x=\pm 1$ ja $x>1$

$x<-1$ tai $x>1$ ja $x>1$

Siis $x>1$

$$\begin{aligned}
\log_{10}(x^2-1) - \log_{10}(x-1) &= 1 \\
\log_{10}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) &= 1 \\
\log_{10}\left[\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right] &= 1 \\
\log_{10}(x+1) &= 1 \\
x+1 &= 10^1 \\
x &= 9 \qquad \text{toteuttaa ehdon}
\end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x=9$.

c) Tapa 1.

$$\begin{aligned}
2^{x^2} &= 3^{2x} \qquad |\ln \\
\ln 2^{x^2} &= \ln 3^{2x} \\
x^2 \ln 2 &= 2x \ln 3 \\
x^2 \ln 2 - 2x\ln 3 &= 0 \\
x(x\ln 2 - 2\ln 3) &= 0
\end{aligned}$$

$x=0$ tai

$$\begin{aligned}
x\ln 2 - 2\ln 3 &= 0 \\
x \ln 2 &= 2\ln 3 \qquad |:\ln 2 \\
x &= 2\,\frac{\ln 3}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x=0$ tai $x=2\,\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

Tapa 2.

$$
\begin{aligned}
2^{x^2} &= 3^{2x} \\
2^{x^2} &= (3^2)^x \quad | \log_2 \\
2^{x^2} &= 9^x \quad | \log_2 \\
\log_2 2^{x^2} &= \log_2 9^x \\
x^2 \log_2 2 &= x \log_2 9 \\
x^2 \cdot 1 &= x \log_2 9 \\
x^2 - x \log_2 9 &= 0 \\
x(x - \log_2 9) &= 0 \\
x = 0 \qquad &\text{tai} \qquad x = \log_2 9
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\log_3(2x) &= \log_9(3x) \qquad \text{Ehto: } x > 0 \\
\log_3(2x) &= \frac{\log_3(3x)}{\log_3 9} \\
\log_3(2x) &= \frac{\log_3(3x)}{2} \quad | \cdot 2 \\
2\log_3(2x) &= \log_3(3x) \\
\log_3(2x)^2 &= \log_3(3x) \\
(2x)^2 &= 3x \\
4x^2 - 3x &= 0 \\
x(4x - 3) &= 0 \\
x = 0 \quad &\vee \quad 4x - 3 = 0 \\
x = 0 \quad &\vee \quad 4x = 3 \quad | : 4 \\
x = 0 \quad &\vee \quad x = \frac{3}{4} \\
\text{ei käy} \quad & \quad \text{ok}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{3}{4}$.

2. a) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Ehto: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Ratkaistaan x yhtälöstä $y = \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x-1} \quad |(\ )^2 \\ y^2 &= x - 1 \\ x &= y^2 + 1 \quad (x \geq 1,\ y \geq 0) \end{aligned}$$

Vastaus: $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = 5x + 3$

Ratkaistaan x yhtälöstä $y = 5x + 3$

$$\begin{aligned} y &= 5x + 3 \\ 5x &= y - 3 \\ x &= \frac{1}{5}y - \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Vastaus: $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$.

c) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Ratkaistaan x yhtälöstä $y = x^2 + 2x + 1$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x + 1 \\ y &= (x+1)^2 \quad |\sqrt{\ } \\ x + 1 &= \pm\sqrt{y} \\ x &= \pm\sqrt{y} - 1 \\ \text{siis} \quad x &= \sqrt{y} - 1 \qquad \text{tai} \qquad x = -\sqrt{y} - 1 \end{aligned}$$

Vastaus: $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x}, x > 0$.

3. Esitetään yksi tapa ratkaista yhtälöpareja.

a)

$$
\begin{cases}
-x - y + 2 = 0 \quad | \cdot 2 \\
2x + 2y - 4 = 0
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{cases}
-2x - 2y + 4 = 0 \\
2x + 2y - 4 = 0
\end{cases}
\qquad \text{Lasketaan yhtälöt yhteen}
$$

$$
-2x - 2y + 4 + 2x + 2y - 4 = 0
$$

$$
0 = 0 \qquad \text{identtisesti tosi } \forall\, x \in \mathbb{R}
$$

Yhtälöparin ratkaisu on

$$
\begin{cases}
x \in \mathbb{R} \\
y = -x + 2
\end{cases}
.
$$

Suorat ovat samat:

$$
\begin{cases}
y = -x + 2 \\
y = -x + 2
\end{cases}
$$

b)

$$\begin{cases} 3x - 4y + 7 = 0 \quad | \cdot (-2) \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6x + 8y - 14 = 0 \\ 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{Lasketaan yhtälöt yhteen}$$

$$\begin{aligned} -6x + 8y - 14 + 6x - 2y - 3 &= 0 \\ 6y - 17 &= 0 \\ y &= \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Ratkaistaan x ensimmäisestä yhtälöstä

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 7 &= 0 \\ 3x - 4 \cdot \frac{17}{6} + 7 &= 0 \\ 3x &= \frac{13}{3} \\ x &= \frac{13}{9} \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on

$$\begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ y = \frac{17}{6} \end{cases}$$

Suorat leikkaavat pisteessä $(\frac{13}{9}, \frac{17}{6})$, koska ratkaisu on yksikäsitteinen:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \\ y = 3x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \quad | \cdot -2 \\ 4x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \text{Lasketaan yhtälöt yhteen}$$

$$-4x - 2y + 6 + 4x + 2y - 5 = 0$$

$$1 = 0 \quad \text{identtisesti epätosi}$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset mutta eri suorat, koska yhtälöparilla ei ole ratkaisuja:

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

4. a) Tapa 1.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+2>\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) \quad \text{Ehto: } 2x-1>0 \text{ ja } 3x-4>0$$

$$x>\frac{1}{2} \text{ ja } x>\frac{4}{3}$$

$$\text{Siis } x>\frac{4}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2>\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{4}\right)>\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left((2x-1)\cdot\tfrac{1}{4}\right)>\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) \qquad \log_{\frac{1}{2}} \text{ on aidosti vähenevä}$$

$$(2x-1)\cdot\frac{1}{4}<3x-4 \quad |\cdot 4$$

$$2x-1<12x-16$$

$$10x>15$$

$$x>\frac{15}{10}$$

$$x>\frac{3}{2} \qquad \text{toteuttaa ehdon}$$

Vastaus: Epäyhtälön ratkaisu on $x>\frac{3}{2}$.

Tapa 2.

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+2>\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) \quad \text{Ehto: } 2x-1>0 \text{ ja } 3x-4>0$$

$$x>\frac{1}{2} \text{ ja } x>\frac{4}{3}$$

$$\text{Siis } x>\frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)} \qquad f(x)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^x \text{ on aidosti vähenevä}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)}$$

$$(2x-1)\cdot\frac{1}{4}<3x-4$$

Ratkaisu palautuu tapaan 1.

b)

$$
\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{2}}(2x) &< \log_2 7 && \text{Ehto: } x > 0 \\
\frac{\log_2(2x)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} &< \log_2 7 \\
\frac{\log_2(2x)}{-1} &< \log_2 7 \quad \mid \cdot(-1) \\
\log_2(2x) &> -\log_2 7 \\
\log_2(2x) &> \log_2 7^{-1} && \log_2 \text{ on aidosti kasvava} \\
2x &> 7^{-1} = \frac{1}{7} \quad \mid : 2 \\
x &> \frac{1}{14}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Epäyhtälön ratkaisu on $x > \frac{1}{14}$.

c)

$$
\begin{aligned}
2^{x^2} &< 3^{2x} \qquad \mid \log_2 \\
\log_2 2^{x^2} &< \log_2 3^{2x} \\
x^2 \log_2 2 &< 2x \log_2 3 \\
x^2 \cdot 1 - 2x \log_2 3 &< 0 \\
x(x - 2\log_2 3) &< 0 \\
x(x - \log_2 9) &< 0
\end{aligned}
$$

Merkkikaavio:

		0		$\log_2 9$	
x	$-$	|	$+$		$+$
$x - \log_2 9$	$-$		$-$	|	$+$
$x(x - \log_2 9)$	$+$	|	$-$	|	$+$

$0 < x < \log_2 9$

Vastaus: Epäyhtälön ratkaisu on $0 < x < \log_2 9$.

5. $f(x) = 2x^2 + 3$ ja $g(x) = \sqrt{x-1}$

a) $(f \circ g)(x)$ ja $(f \circ g)(1)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = 2(\sqrt{x-1})^2 + 3 = 2(x-1) + 3$
$= 2x - 2 + 3 = 2x + 1$

$(f \circ g)(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

b) $(g \circ f)(x)$ ja $(g \circ f)(1)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 + 3) = \sqrt{(2x^2 + 3) - 1} = \sqrt{2x^2 + 2}$

$(g \circ f)(1) = \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2} = \sqrt{4} = 2$

c) $(f \cdot g)(x)$ ja $(f \cdot g)(2)$

$(f \cdot g)(x) = (2x^2 + 3)\sqrt{x-1}$

$(f \cdot g)(2) = (2 \cdot 2^2 + 3)\sqrt{2-1} = 11$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ja $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x-1}}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{2 \cdot 2^2 + 3}{\sqrt{2-1}} = 11$