Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ia

Harjoitus 6, syksy 2013

1. a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \dfrac{3^3 - 27}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$

   Koska $x = 3$ on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, niin $x - 3$ on tekijänä sekä osoittajassa että nimittäjässä, joten pyritään supistamaan sillä. Tarkoituksena on päästä eroon $\frac{0}{0}$–muodosta.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +3x & +9 & \\
\hline
x-3 & x^3 & & & -27 \\
\hline
 & \mp x^3 & \pm 3x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & +3x^2 & & \\
 & & \mp 3x^2 & \pm 9x & \\
\cline{3-4}
 & & & +9x & -27 \\
 & & & \mp 9x & \pm 27 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} \\
&= \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 9}{3 + 3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \left(\frac{{}^{x-2)}1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) &= \lim_{x \to -2} \left(\frac{x-2}{x^2 - 4} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2 - 4} \\
&= \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2} \\
&= \frac{1}{-2-2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+x^4-4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x-4}{x-1} = \frac{0}{0}$

Koska $x=1$ on sekä osoittajan että nimittäjän nollakohta, niin $x-1$ on tekijänä sekä osoittajassa että nimittäjässä, joten pyritään supistamaan sillä. Tarkoituksena on päästä eroon $\frac{0}{0}$–muodosta.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^3 & +2x^2 & +3x & +4 & \\
\hline
x-1 & x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & -4 \\
 & \mp x^4 & \pm x^3 & & & \\
\cline{2-3}
 & & +2x^3 & +x^2 & & \\
 & & \mp 2x^3 & \pm 2x^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & +3x^2 & +x & \\
 & & & \mp 3x^2 & \pm 3x & \\
\cline{4-5}
 & & & & +4x & -4 \\
 & & & & \mp 4x & \pm 4 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+x^4-4}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+2x^2+3x+4)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} (x^3+2x^2+3x+4) \\
&= 1^3+2\cdot 1^2+3\cdot 1+4 = 10
\end{aligned}
$$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{2x+5}{x^3+6x^2+7} = \frac{2\cdot 1+5}{1^3+6\cdot 1^2+7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

2. a) $\lim_{x\to 0} f(x)$, kun $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$

Toispuoleiset raja-arvot:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x = 3\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -x+1 = -0+1 = 1$

Nyt $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, joten $\lim_{x\to 0} f(x)$ ei ole olemassa.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x^2} \overset{(x}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3x} = 0$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{3}{x-3} \qquad \left(= \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0} \right)$

Toispuoleiset raja-arvot:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3}{x-3} \overset{\frac{3}{0^+}}{=} \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{x-3} \overset{\frac{3}{0^-}}{=} -\infty$$

Nyt $\lim_{x\to 3^+} \frac{3}{x-3} \neq \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{x-3}$, joten $\lim_{x\to 3} \frac{3}{x-3}$ ei ole olemassa.

d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$

Toispuoleiset raja-arvot:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = \infty$$

Nyt $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$, joten $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$ ei ole olemassa.

f) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

Toispuoleiset raja-arvot:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^6} = \infty \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^6} = \infty$$

Nyt $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^6} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^6} = \infty$, joten $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = \infty$.

3. a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^3+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^3+1} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \frac{3}{2}$$

c)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x} = \infty$$

4. a)

$$\lim_{x \to \infty} (x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \to \infty} x^4 = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} (x^4 + 2x^2 + 1) = \infty$$

b)

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^5 + 2x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} -3x^5 = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} (-3x^5 + 2x^2 + 1) = \infty$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = \infty + \infty = \infty$

d) Tapa 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to1} {}^{\sqrt{x}+1)}\, \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to1} (\sqrt{x}+1) \\
&= \sqrt{1}+1 = 2
\end{aligned}$$

Tapa 2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\
&= \lim_{x\to1} (\sqrt{x}+1) \\
&= \sqrt{1}+1 = 2
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to0} {}^{\sqrt{x+1}+1)}\, \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} \\
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} = \frac{2}{0^+} = \infty \quad \text{ja} \\
&\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty
\end{aligned}
$$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, ei kyseistä raja-arvoa ole olemassa.

g)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1}) &= \lim_{x\to\infty} {}^{x+\sqrt{x^2-x+1})}(x - \sqrt{x^2 - x + 1}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x + 1)}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 1}{x + \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 1}{x + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \qquad (|x| = x, \text{ koska } x \to \infty) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0})}{x\left(1 + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right)} \\
&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \quad (|x|=-x,\ \text{koska } x\to-\infty)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}\\
&= \frac{-1}{1}=-1
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}}{2x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}}{2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}{2x} \quad (|x|=-x,\ \text{koska } x\to-\infty)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}{2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}}{2}\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$