Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ib

Harjoitus 2, syksy 2013

1.

$$f(x) = x^2 + e^{x^2}$$

$$f'(x) = 2x + e^{x^2} \cdot 2x = 2x(e^{x^2} + 1)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot (1 + e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x) \\ &= 2 + 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} \\ &= 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2e^{x^2} \cdot 2x + 4 \cdot 2x \cdot e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x \\ &= 4xe^{x^2} + 8xe^{x^2} + 8x^3 e^{x^2} \\ &= 12xe^{x^2} + 8x^3 e^{x^2} \\ &= 4xe^{x^2}(2x^2 + 3) \end{aligned}$$

2. $x^{\frac{1}{x}}$ on määritelty, kun $x > 0$.

$$\begin{aligned} D(x^{\frac{1}{x}}) &= x^{\frac{1}{x}} \cdot D \ln x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}} \cdot D(\tfrac{1}{x} \ln x) \\ &= x^{\frac{1}{x}} \cdot D\tfrac{\ln x}{x} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{D \ln x \cdot x - \ln x \cdot Dx}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \ln x) \end{aligned}$$

3. Tapa 1.

$(f^{-1})'(1)$, kun $f(x) = e^{2x}$

$f :]-\infty, \infty[\to [0, \infty[$ on bijektio, koska $f(x)$ on aidosti kasvava, ja tällöin f^{-1} on olemassa

$$\begin{aligned} 1 &= f(x) = e^{2x} \quad | \ln \\ \ln 1 &= \ln e^{2x} \\ 0 &= 2x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ on derivoituva pisteessä $x = 0$ ja

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \\ f'(0) &= 2e^{2\cdot 0} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Siis} \quad (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ \text{eli} \quad (f^{-1})'(1) &= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tapa 2.

$(f^{-1})'(1)$, kun $f(x) = e^{2x}$

$f :]-\infty, \infty[\to [0, \infty[$ on bijektio, koska $f(x)$ on aidosti kasvava, ja tällöin f^{-1} on olemassa, joten ratkaistaan se

$$\begin{aligned} y &= e^{2x} \quad | \ln \\ \ln y &= \ln e^{2x} \\ 2x &= \ln y \\ x &= \frac{\ln y}{2} \end{aligned}$$

Käänteisfunktio $f^{-1}(y)$ on

$$f^{-1}(y) = \frac{\ln y}{2}$$

Derivoidaan $f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}$$

Käänteisfunktion derivaatan arvo pisteessä 1

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

4.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -1 \\ x+1, & -1 < x < 1 \\ x^2+1, & 1 \leq x \leq 3 \\ 6x-8, & x > 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 2x, & 1 < x < 3 \\ 6, & x > 3 \end{cases}$$

Funktio f on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva, silloin kun $x \neq -1$, $x \neq 1$ ja $x \neq 3$.

Tarkastellaan jatkuvuutta pisteissa $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 3$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x-1) = -1-1 = -2$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x+1) = -1+1 = 0$$

Toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, joten $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ei ole olemassa ja näin ollen f ei ole jatkuva kohdassa $x = -1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 1+1 = 2$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2+1) = 1^2+1 = 2 = f(1)$$

Nyt $\lim_{x\to 1} f(x)$ on olemassa ja $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, joten f on jatkuva kohdassa $x = 1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 + 1) = 3^2 + 1 = 10 = f(3)$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (6x - 8) = 6 \cdot 3 - 8 = 10$$

Nyt $\lim_{x\to 3} f(x)$ on olemassa ja $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$, joten f on jatkuva kohdassa $x = 3$.

Tarkastellaan derivoituvuutta pisteissä $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 3$.

Lause 1.1. Jos funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0, niin $f(x)$ on myös jatkuva kohdassa x_0.

Joten, jos f ei ole jatkuva kohdassa x_0, se ei myöskään ole derivoituva kyseisessä kohdassa.

Näin ollen, koska funktio f ei ole jatkuva kohdassa $x = -1$, ei f ole derivoituva kohdassa $x = -1$.

Lause 1.2. Jatkuva funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0, jos $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ on olemassa.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x) = 2 \cdot 1 = 2$$

Toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, joten $\lim_{x\to 1} f'(x)$ ei ole olemassa, joten f ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$.

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$\lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} 6 = 6$$

Nyt $\lim_{x\to 3} f'(x)$ on olemassa, joten f on derivoituva kohdassa $x = 3$.

5. $x^2 + 3xy + 2y^2 - 3 = 0, \quad x = -1$

$$\begin{aligned} x = -1 \quad \Rightarrow \quad & (-1)^2 + 3 \cdot (-1)y + 2y^2 - 3 = 0 \\ & 1 - 3y + 2y^2 - 3 = 0 \\ & 2y^2 - 3y - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Derivoidaan x:n suhteen ja muistetaan, että $y = y(x)$

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 - 3 = 0 \qquad \Big| \frac{d}{dx} \\ & 2x + 3y + 3xy' + 4yy' = 0 \\ & 2x + 3y + y'(3x + 4y) = 0 \\ & y'(3x + 4y) = -2x - 3y \\ & y' = \frac{-2x - 3y}{3x + 4y} \\ f'(x) = & \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 3y}{3x + 4y} \end{aligned}$$

$$f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2}{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2} = \frac{2 - 6}{-3 + 8} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{tai} \quad f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1) - 3 \cdot -\frac{1}{2}}{3 \cdot (-1) + 4 \cdot -\frac{1}{2}} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{-3 - 2} = \frac{\frac{7}{2}}{-5} = -\frac{7}{10}$$

6. a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} &= \frac{1^3 - 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2}{1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = \frac{0}{0} \\ &\overset{l'H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 8x + 5}{2x - 2} = \frac{3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 5}{2 \cdot 1 - 2} = \frac{0}{0} \\ &\overset{l'H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6x - 8}{2} = \frac{6 \cdot 1 - 8}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

b) a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-2x+1}=\frac{1^3-4\cdot 1^2+5\cdot 1-2}{1^2-2\cdot 1+1}=\frac{0}{0}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-8x+5}{2x-2}=\frac{3\cdot 1^2-8\cdot 1+5}{2\cdot 1-2}=\frac{0}{0}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x-8}{2}=\frac{6\cdot 1-8}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

b)

$$x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}=e^{\frac{\ln x}{1/x}}$$
$$\text{kun } x\to 0^+,\ \text{niin } \frac{\ln x}{1/x}=\frac{-\infty}{\infty}$$
$$\text{Siis } \lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}}$$
$$\overset{l'H}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-x}=e^0=1$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=\frac{\ln\left(e^{3\cdot 0}-5\cdot 0\right)}{0}=\frac{0}{0}$$
$$\overset{l'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^{3x}-5x}\cdot D(e^{3x}-5x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}$$
$$=\frac{3e^{3\cdot 0}-5}{e^{3\cdot 0}-5\cdot 0}=\frac{-2}{1}=-2$$

d)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^{3x}+5x\right)}{x} &= \frac{\ln(\infty+\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{3x}+5x}\cdot D(e^{3x}+5x)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}+5}{e^{3x}+5x} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}+5} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} 3 = 3
\end{aligned}
$$