Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ib

Harjoitus 3, syksy 2013

1. $f(x) = \ln x,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$

   Alkutilanne $x_0 = e$, muutos $\Delta x = 10$ ja $x = x_0 + \Delta x$.

   Funktion todellinen muutos

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x) - f(x_0)\\ &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\\ &= \ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0\\ &= \ln(e + 10) - \ln e\\ &\approx 1,5430\end{aligned}$$

   Differentiaali

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x = \frac{1}{x_0}\Delta x = \frac{1}{e} \cdot 10 = \frac{10}{e} \approx 3,6788$$

2. a) $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad [-3, 3]$

   Funktio $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva. Funktio $f(x)$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

   1) Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

$$\begin{aligned}(2x - x^2)e^{-x} &= 0\\ 2x - x^2 &= 0\\ x(2 - x) &= 0\\ x = 0 \quad &\vee \quad x = 2\end{aligned}$$

2) Välin päätepisteet:

$x = -3 \qquad x = 3.$

Derivaatan merkkikaavio:

	-3		0		2		3
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$							
	p.max		p.min		p.max		p.min

Funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä välillä $]-3,0[$ ja $]2,3[$ ja aidosti kasvava välillä $]0,2[$.

Näin ollen funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa joko pisteessä $x = -3$ tai $x = 2$ ja pienimmän arvonsa joko pisteessä $x = 0$ tai $x = 3$.

$$f(-3) = (-3)^2 e^{-(-3)} = 9e^3 \qquad \text{suurin arvo}$$
$$f(0) = 0^2 e^{-0} = 0 \qquad \text{pienin arvo}$$
$$f(2) = 2^2 e^{-2} = 4e^{-2}$$
$$f(3) = 3^2 e^{-3} = 9e^{-3}$$

Vast. suurin arvo on $9e^3$ ja pienin arvo on 0.

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad x \geq -1$

Funktio $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva. Funktio $f(x)$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

1) Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

2) Välin päätepisteet:

$x = -1 \quad \text{ja} \quad x \to \infty.$

Derivaatan merkkikaavio:

	-1		1		3	
$f'(x)$	|	$+$	|	$-$	|	$+$
$f(x)$	|		|		|	
	p.min		p.max		p.min	

Funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä välillä $]1, 3[$ ja aidosti kasvava välillä $]-1, 1[$ ja $]3, \infty[$.

Näin ollen funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa joko pisteessä $x = 1$ tai $x \to \infty$ ja pienimmän arvonsa joko pisteessä $x = -1$ tai $x = 3$.

$$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 1 = -15 \quad \text{pienin arvo}$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) = \infty$$

Vast. funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa $[1, \infty[$, mutta sen pienin arvo on -15 pisteessä $x = -1$.

c) $f(x) = 3x^3 - 3, \quad x \geq -1$

Funktio $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva. Funktio $f(x)$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

1) Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 9x^2$$
$$9x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0$$

2) Välin päätepisteet:

$x = -1 \quad$ ja $\quad x \to \infty$.

Derivaatan merkkikaavio:

	-1		0	
$f'(x)$		$+$		$+$
$f(x)$				
	p.min			

Funktio $f(x)$ on aidosti kasvava välillä $]-1, \infty[$.

Näin ollen funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa pisteessä $x \to \infty$ ja pienimmän arvonsa pisteessä $x = -1$.

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 3 = -6$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (3x^3 - 3) = \infty$$

Vast. funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa $[-1, \infty[$, mutta sen pienin arvo on $f(-1) = -6$.

d) $f(x) = 4x^4 - 4, \quad x \geq -1$

Funktio $f(x)$ on jatkuva ja derivoituva. Funktio $f(x)$ saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

1) Derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 16x^3$$
$$16x^3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0$$

2) Välin päätepisteet:

$x = -1 \quad \text{ja} \quad x \to \infty.$

Derivaatan merkkikaavio:

		-1		0	
$f'(x)$		|	$-$	|	$+$
$f(x)$		|		|	
		p.max		p.min	

$$f'(-\tfrac{1}{2}) = 16 \cdot (-\tfrac{1}{2})^3 = -2 < 0$$
$$f'(1) = 16 \cdot 1^3 = 16 > 0$$

Funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä välillä $]-1, 0[$ ja aidosti kasvava välillä $]0, \infty[$.

Näin ollen funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa joko pisteessä $x = -1$ tai $x \to \infty$ ja pienimmän arvonsa pisteessä $x = 0$.

$$f(-1) = 4(-1)^4 - 4 = 0$$
$$f(0) = 4 \cdot 0^4 - 4 = -4 \qquad \text{pienin arvo}$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (4x^4 - 4) = \infty$$

Vast. funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa $[-1, \infty[$, mutta sen pienin arvo on $f(0) = -4$.

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= |-x+2|, && [-1,3] \\ &= \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}, && [-1,3] \end{aligned}$$

Mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:

1) Epäjatkuvuuskohdat:

Polynomifunktiona f jatkuva muualla paitsi ehkä kohdassa $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2-x) = 0 = f(2)$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad f(x) \text{ on jatkuva kohdassa } x = 2.$$

2) Epäderivoituvuuskohdat:

Polynomifunktiona derivoituva muualla paitsi ehkä kohdassa $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} -1 = -1$$
$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) \text{ ei ole derivoituva kohdassa } x = 2$$
$$\Rightarrow \quad \text{mahdollinen paikallinen ääriarvokohta.}$$

3) Derivaatan nollakohdat:

$$-1 < x < 2 \qquad f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow -1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \text{ei ratkaisua}$$
$$2 < x < 3 \qquad f'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \text{ei ratkaisua}$$

$\Rightarrow$ Derivaattafunktiolla $f'(x)$ ei ole nollakohtia.

4) Välin päätepisteet:

   $x = -1$ ja $x = 3$

Ääriarvon olemassaolo ja laatu:

Derivaatan merkkikaavio:

	-1		2		3
$f'(x)$	|	$-$	|	$+$	|
$f(x)$	|		|		|
	p.max		p.min		p.max

Loppupäättely:

$$f(-1) = 2 - (-1) = 3 \qquad \text{suurin arvo}$$
$$f(2) = 2 - 2 = 0 \qquad \text{pienin arvo}$$
$$f(3) = 3 - 2 = 1$$

Vast. suurin arvo on $f(-1) = 3$ ja pienin arvo on $f(2) = 0$.