Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ib

Harjoitus 4, syksy 2013

1. a) $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad [-3, 3] \quad f$ on derivoituva

   Kriittiset pisteet:

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} (2x - x^2)e^{-x} &= 0 \\ 2x - x^2 &= 0 \\ x(2 - x) &= 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x = 2 \end{aligned}$$

   Laatu:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2 - 2x)e^{-x} + (2x - x^2)e^{-x}(-1) \\ &= (2 - 2x)e^{-x} + (-2x + x^2)e^{-x} \\ &= e^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2) \\ &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \end{aligned}$$

$$f''(0) = e^{-0}(0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{paikallinen minimikohta}$$

$$f''(2) = e^{-2}(2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = -2e^{-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{paikallinen maksimikohta}$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 e^{-(-3)} = 9e^3 && \text{suurin arvo} \\ f(0) &= 0^2 e^{-0} = 0 && \text{pienin arvo} \\ f(2) &= 2^2 e^{-2} = 4e^{-2} \\ f(3) &= 3^2 e^{-3} = 9e^{-3} \end{aligned}$$

Vast. suurin arvo on $9e^3$ ja pienin arvo on 0, lisäksi paikallinen maksimi on $f(2) = 4e^{-2}$ ja paikallinen minimi $f(3) = 9e^{-3}$.

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad x \geq -1 \qquad f$ on derivoituva

Kriittiset pisteet:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Laatu:

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{paikallinen maksimikohta}$$

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{paikallinen minimikohta}$$

$$f(-1) = -15 \qquad\qquad \text{pienin arvo}$$

$$f(1) = 5$$

$$f(3) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Vast. funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa $[1, \infty[$, mutta sen pienin arvo on -15 pisteessä $x = -1$. Paikallinen maksimi on $f(1) = 5$ ja paikallinen minimi $f(3) = 1$.

2. a) $f(x) = 3x^3 - 3, \quad x \geq -1 \quad f$ on derivoituva

Kriittiset pisteet:

$$f'(x) = 9x^2$$
$$9x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0$$

Laatu:

$f''(x) = 18x$

$f''(0) = 18 \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\;$ voi olla maksimikohta, minimikohta tai satulapiste

Lause 2.12. Olkoon $f(x)$ *jatkuva* funktio, joka on n *kertaa derivoituva* pisteessä x_0. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että $f(x_0)$ on paikallinen ääriarvo, on, että on olemassa sellainen *parillinen* kokonaisluku n, jolla $f^{(k)}(x_0) = 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $f^{(n)} \neq 0$.
Kyseessä on lisäksi paikallinen minimi, jos $f^{(n)}(x_0) > 0$ ja paikallinen maksimi, jos $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 3 & f(0) &= -3 \\ f'(x) &= 9x^2 & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 18x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 18 & f'''(0) &= 18 > 0 \end{aligned}$$

Nyt $f^{(n)}(0) \neq 0$, kun $n = 3$ eli *pariton*, joten kyseessä on satulapiste.

$$f(-1) = -6 \qquad \text{pienin arvo}$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Vast. funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa $[-1, \infty[$, mutta sen pienin arvo on $f(-1) = -6$.

b) $f(x) = 4x^4 - 4, \quad x \geq -1 \quad f$ on derivoituva

Kriittiset pisteet:

$$f'(x) = 16x^3 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0$$

Laatu:

$f''(x) = 48x^2$

$f''(0) = 48 \cdot 0^2 = 0 \;\Rightarrow\;$ voi olla maksimikohta, minimikohta tai satulapiste

Lause 2.12. Olkoon $f(x)$ *jatkuva* funktio, joka on n *kertaa derivoituva* pisteessä x_0. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että $f(x_0)$ on paikallinen ääriarvo, on, että on olemassa sellainen *parillinen* kokonaisluku n, jolla $f^{(k)}(x_0) = 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $f^{(n)} \neq 0$.
Kyseessä on lisäksi paikallinen minimi, jos $f^{(n)}(x_0) > 0$ ja paikallinen maksimi, jos $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^4 - 4 & f(0) &= -4 \\ f'(x) &= 16x^3 & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 48x^2 & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 96x & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= 96 & f^{(4)}(0) &= 96 > 0 \quad \text{paikallinen minimikohta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ f(0) &= -4 \qquad\qquad \text{pienin arvo} \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty \end{aligned}$$

Vast. funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa $[-1, \infty[$, mutta sen pienin arvo on $f(0) = -4$.

3.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, & -4 \leq x \leq -1 \\ x + 1, & -1 < x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:

1) Epäjatkuvuuskohdat:

Polynomifunktiona f jatkuva muualla paitsi ehkä kohdissa $x = -1$ ja $x = 2$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}) = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 1) = 0$$

$\Rightarrow \quad f(x)$ on jatkuva kohdassa $x = -1$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-\tfrac{1}{4}x^2 + x) = 1$$

$\Rightarrow \quad f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$

$\Rightarrow \quad$ mahdollinen paikallinen ääriarvokohta.

2) Epäderivoituvuuskohdat:

Polynomifunktiona derivoituva muualla paitsi ehkä kohdissa $x = -1$ ja $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & -4 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 1, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} -x = 1$$
$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} 1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) \text{ on derivoituva kohdassa } x = -1$$

Koska $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$, ei se ole tällöin derivoituvakaan.

3) Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{array}{lll} -4 < x < -1 & f'(x) = -x = 0 & \Leftrightarrow \quad x = 0 \notin\,]-4, -1[\\ -1 < x < 2 & f'(x) = 1 = 0 & \Leftrightarrow \quad \text{ei ratkaisua} \\ 2 < x < 4 & f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 = 0 & \Leftrightarrow \quad x = 2 \notin\,]2, 4[\end{array}$$

$\Rightarrow$ Derivaattafunktiolla $f'(x)$ ei ole nollakohtia.

4) Välin päätepisteet:

$x = -4$ ja $x = 4$

Ääriarvon olemassaolo ja laatu:

Derivaatan merkkikaavio:

		$-x$		1		$-\frac{1}{2}x + 1$	
	-4		-1		2		4
$f'(x)$	|	$+$	|	$+$	|	$-$	|
$f(x)$	|		|		|		|
	p.min						p.min

Epäjatkuvuuskohta $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-\tfrac{1}{4}x^2 + x) = 1 = f(2)$$

$\Rightarrow$ $x = 2$ ei ole paikallinen maksimikohta, vaan

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$ on funktion arvon yläraja

Loppupäättely:

$$f(-4) = -\tfrac{1}{2} \cdot (-4)^2 + \tfrac{1}{2} = -7\tfrac{1}{2} \qquad \text{pienin}$$

$$f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2 = 1$$

$$f(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^2 + 4 = 0$$

Vast. pienin arvo on $f(-4) = -7\tfrac{1}{2}$ ja suurinta arvoa ei ole.