Matematiikan perusteet taloustieteilijöille Ib

Harjoitus 6, syksy 2013

1. min/max

   $f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$

   derivoituva

   Mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:

   $$\begin{cases} f_x = 10y - 10x + 40 \\ f_y = 10x - 14y \end{cases}$$

   $$\begin{cases} 10y - 10x + 40 = 0 \\ 10x - 14y = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad x = \frac{14}{10}y = \frac{7}{5}y \ \text{ sijoitetaan ylempään} \end{cases}$$

   $$\begin{aligned} 10y - 10 \cdot \frac{7}{5}y + 40 &= 0 \\ 10y - 14y &= -40 \\ -4y &= -40 \quad |:(-4) \\ y &= 10 \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{7}{5} \cdot 10 = 14 \end{aligned}$$

   Siis kriittinen piste on $(14, 10)$.

   Laatutarkastelu:

   $$\begin{aligned} f_{xx} &= -10 \\ f_{yy} &= -14 \\ f_{yx} &= 10 \end{aligned}$$

   $$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{yx})^2 = -10 \cdot (-14) - 10^2 = 140 - 100 = 40$$

Testataan nyt piste $(14, 10)$

$$\Delta(14, 10) = 40 > 0$$

$\Rightarrow$ piste $(14, 10)$ on paikallinen ääriarvokohta

$$f_{xx}(14, 10) = -10 < 0$$
$$f_{yy}(14, 10) = -14 < 0.$$

4.8.

$\Rightarrow$ piste $(14, 10)$ on paikallinen maksimikohta (Lause ~~8~~.8.).

Koska muita ääriarvokohtia tai satulapisteitä ei ole, se on myös absoluuttinen maksimikohta.

$$\begin{aligned} f(14, 10) &= 10 \cdot 14 \cdot 10 - 5 \cdot 14^2 - 7 \cdot 10^2 + 40 \cdot 14 \\ &= 1400 - 980 - 700 + 560 = 280 \qquad \text{absoluuttinen maksimi} \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\lim_{y \to \infty} f(0, y) = \lim_{y \to \infty} -7y^2 = -\infty,$$

joten funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Vast: funktion absoluuttinen maksimi on $f(14, 10) = 280$, mutta sillä ei ole pienintä arvoa.

2. min/max

$f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ehdolla $x + y = 13$

Ehtoyhtälö $g(x,y) = x + y - 13 = 0$.

Nyt $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ ovat 2. kertaluvun osittaisderivaattoineen jatkuvia, joten voidaan käyttää Lagrangea.

Kohdefunktio:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) - \lambda g(x,y) \\ &= 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x - \lambda(x + y - 13) \\ &= 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x - \lambda x - \lambda y + 13\lambda \end{aligned}$$

Kohdefunktion kriittiset pisteet eli mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:

$$\begin{cases} F_x = 10y - 10x + 40 - \lambda \\ F_y = 10x - 14y - \lambda \\ x + y - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10y - 10x + 40 - \lambda = 0 \\ 10x - 14y - \lambda = 0 \\ x + y - 13 = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = -x + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x + 10y + 40 - \lambda = 0 \\ 10x - 14y - \lambda = 0 \qquad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 10y + 40 - \lambda = 0 \\ -10x + 14y + \lambda = 0 \qquad \text{lasketaan yhtälöt yhteen} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -20x + 24y + 40 = 0 \quad | : 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x + 6y + 10 = 0$$

$$\begin{cases} -5x+6y+10=0 \\ x+y-13=0 \qquad \mid \cdot 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x+6y+10=0 \\ 5x+5y-65=0 \qquad \text{lasketaan yhtälöt yhteen} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 11y-55=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 11y=55 \quad \mid :11$$

$$\Leftrightarrow \quad y=5$$

$$\Rightarrow \quad x=-5+13=8$$

Siis ainoa kriittinen piste on $(8,5)$.

Laatutarkastelu:

$$F_{xx}=-10$$

$$F_{yy}=-14$$

$$F_{yx}=10$$

$$\Delta=F_{xx}F_{yy}-F_{yx}^2=-10\cdot(-14)-10^2=40$$

Testataan piste $(8,5)$

$$\Delta(8,5)=40>0$$

$\Rightarrow$ piste $(8,5)$ on paikallinen ääriarvokohta ehdolla $x+y=13$.

$$F_{xx}=-10<0$$

$$F_{yy}=-14<0$$

$\Rightarrow$ piste $(8,5)$ on paikallinen maksimikohta (s. 39) ehdolla $x+y=13$.

Ainoana ääriarvokohtana se on myös absoluuttinen maksimikohta ehdolla $x+y=13$, jonka maksimiarvo on

$$f(8,5)=10\cdot8\cdot5-5\cdot8^2-7\cdot5^2+40\cdot8=225$$

Vast: funktion absoluuttinen maksimi on $f(8,5)=225$.

3. min/max

$f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ehdolla $x + y \leq 13$.

1) Määritetään funktion $f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot ilman ehtoa (tutkitaan alueen sisus).

   Tehtävästä 1 saadaan kriittinen piste $(14, 10)$, joka on laadultaan paikallinen maksimikohta.

   Toteuttaako kriittinen piste ehdon $x + y \leq 13$?

$$\begin{aligned} 14 + 10 &\leq 13 \\ 24 &\leq 13 \quad \text{epätosi} \end{aligned}$$

   Näin ollen kriittinen piste $(14, 10)$ ei toteuta ehtoa, joten se ei ole ehdon mukainen sidottu ääriarvokohta.

2) Määritetään funktion $f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot ehdolla $x + y = 13$ (tutkitaan reuna $x + y = 13$).

   Tehtävästä 2 saadaan kriittinen piste $(8, 5)$, joka on laadultaan paikallinen maksimikohta.

$$8 + 5 = 13$$

   Näin ollen kriittinen piste $(8, 5)$ toteuttaa ehdon, joten ääriarvokohta löytyy alueen reunalta.

3) Päättely

   Koska piste $(14, 10)$ on funktion $f(x,y)$ maksimikohta ehtoalueen ulkopuolella, niin funktio tulee vähenevänä ehtoalueelle ja jatkuu siellä vähenevänä. Näin ollen reunalla $x + y = 13$ oleva maksimikohta $(8, 5)$ on myös koko ehtoalueen $x + y \leq 13$ absoluuttinen maksimikohta.

$$\begin{aligned} f(8,5) &= 10 \cdot 8 \cdot 5 - 5 \cdot 8^2 - 7 \cdot 5^2 + 40 \cdot 8 \\ &= 400 - 320 - 175 + 320 = 225 \quad \text{maksimiarvo} \end{aligned}$$

$$\lim_{y \to -\infty} f(0, y) = \lim_{y \to -\infty} -7y^2 = -\infty$$

ja ehto $x + y \leq 13$ toteutuu, joten funktiolla $f(x, y)$ ei ole absoluuttista minimiä.

Vast: funktion absoluuttinen maksimi on $f(8, 5) = 225$ ja absoluuttista minimiä ei ole.

4. min/max

$f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ehdolla $x + y \geq 13$.

1) Määritetään funktion $f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot ilman ehtoa (tutkitaan alueen sisus).

   Tehtävästä 1 saadaan kriittinen piste $(14, 10)$, joka on laadultaan paikallinen maksimikohta.

   Toteuttaako kriittinen piste ehdon $x + y \geq 13$?

$$\begin{aligned} 14 + 10 &\geq 13 \\ 24 &\geq 13 \quad \text{tosi} \end{aligned}$$

   Näin ollen kriittinen piste $(14, 10)$ on ehdon mukainen sidottu paikallinen ääriarvokohta.
   Koska se on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta, on se myöskin absoluuttinen maksimikohta.

2) Päättely

$$\begin{aligned} f(14,10) &= 10 \cdot 14 \cdot 10 - 5 \cdot 14^2 - 7 \cdot 10^2 + 40 \cdot 14 \\ &= 1400 - 980 - 700 + 560 = 280 \quad \text{maksimiarvo} \end{aligned}$$

$$\lim_{y \to \infty} f(0,y) = \lim_{y \to \infty} -7y^2 = -\infty$$

   ja ehto $x + y \geq 13$ toteutuu, joten funktiolla $f(x,y)$ ei ole absoluuttista minimiä

Vast: funktion absoluuttinen maksimi on $f(14,10) = 280$ ja absoluuttista minimiä ei ole.

5. min/max

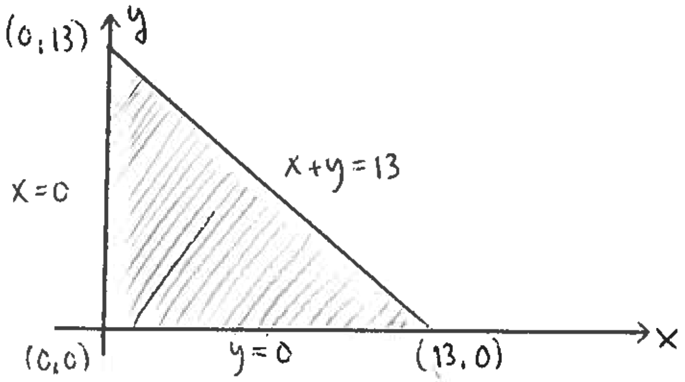
$f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ joukossa

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ ja } x + y \leq 13\}.$$

Reunat:

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$x + y = 13 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 13$$

Ehtoalue:



1) Tutkitaan alueen sisus eli määritetään funktion $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot ilman mitään ehtoa.

   Tehtävästä 1 saadaan KRP $(14, 10)$, joka on paikallien maksimikohta. KRP ei kuitenkaan toteuta ehtoa $(14 + 10 = 24 \geq 13)$, joten se ei ole ehtojen mukainen sidottu ääriarvokohta.

2) Reuna $x + y = 13$ (Lagrange)

   Määritetään funktion $f(x, y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$ ääriarvot ehdolla $x + y = 13$.

   Tehtävästä 2 saadaan KRP $(8, 5)$, joka on paikallinen maksimikohta reunalla $x + y = 13$.

3) Reuna $x = 0$

$$f(0, y) = -7y^2 = f(y)$$

Mahdolliset paikalliset ääriarvot:

$$f'(y) = -14y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 0)$$

Piste $(0, 0)$ toteuttaa annetut ehdot.

Laatutarkastelu:

$$f''(y) = -14 < 0$$
$$f''(0) = -14 < 0$$

$\Rightarrow$ $(0, 0)$ on paikallinen maksimikohta reunalla $x = 0$.

4) Reuna $y = 0$

$$f(x, 0) = -5x^2 + 40x = f(x)$$

Mahdolliset paikalliset ääriarvot:

$$f'(x) = -10x + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4, 0)$$

Piste $(4, 0)$ toteuttaa annetut ehdot.

Laatutarkastelu:

$$f''(x) = -10 < 0$$
$$f''(4) = -10 < 0$$

$\Rightarrow$ $(4, 0)$ on paikallinen maksimikohta reunalla $y = 0$.

5) Nurkat

$(0, 0)$ on paikallinen maksimikohta

$(13, 0)$ on paikallinen minimikohta

$(0, 13)$ on paikallinen minimikohta

6) Päättely

$f(0,0) = 0$	
$f(0,13) = -1183$	pienin
$f(13,0) = -325$	
$f(8,5) = 225$	suurin
$f(4,0) = 80$	

Vast: Funktion pienin arvo on $f(0,13) = -1183$ ja suurin arvo $f(8,5) = 225$ joukossa E.