Renkaat, kunnat ja polynomit

Vihjeet 2 syksy 2013

1. Olkoot $(R, +, \cdot)$ rengas, m ja n positiivisia kokonaislukuja sekä $a, b \in R$. Osoita, että seuraavat laskulait pätevät:
   1. $(m + n)a = ma + na$,
   2. $(mn)a = m(na)$,
   3. $n(a + b) = na + nb$,
   4. $n(a \cdot b) = (na) \cdot b = a \cdot (nb)$,
   5. $(na) \cdot (mb) = (nm)(a \cdot b)$.

   Vihje. Tutustu Määritelmään 2.4.8 ja käytä renkaan ominaisuuksia (Määritelmä 2.1.1) apuna, kun osoitat laskulait päteviksi.

2. Olkoon $(M, +, \cdot)$ kuten Harjoitusten 1 tehtävässä 2 ja olkoon

$$T = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Onko $(T, +, \cdot)$ renkaan $(M, +, \cdot)$ alirengas?

   Vihje. Käytä osoittamiseen Lausetta 2.1.4. Varmista, että Lauseen oletukset toteutuvat!

3. Gaussin kokonaislukujen joukko on $\mathbb{Z}[i] = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ on rengas. (Huomaa, että alirengas on myös rengas.)

   Vihje. Käytä osoittamiseen Lausetta 2.1.4. Varmista, että Lauseen oletukset toteutuvat!

4. Olkoon $M = \{3x + 3yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että M on renkaan $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ideaali.

   Vihje. Osoita, että Määritelmän 2.2.1 oletukset ja ehdot toteutuvat!

5. Osoita, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ideaali.

   Vihje. Osoita, että Määritelmän 2.2.1 oletukset ja ehdot toteutuvat! Kertaa samalla, miten äärellisen ryhmän aliryhmyys voidaan osoittaa, sykliset aliryhmät sekä jäännösluokilla laskeminen.

6. Olkoon $R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$. Tiedetään, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Olkoon $I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että I on renkaan R ideaali.

   Vihje. Osoita, että Määritelmän 2.2.1 oletukset ja ehdot toteutuvat!

7. Olkoot I ja J ovat renkaan R ideaaleja. Osoita, että myös $I \cap J$ on renkaan R ideaali.

   Vihje. Määritelmä 2.2.1 pätee nyt I:lle ja J:lle, joten tämän määritelmän ehdot ja oletukset ovat niille voimassa. Osoita, että Määritelmän 2.2.1 oletukset ja ehdot toteutuvat $I \cap J$:lle!

8. Tarkastellaan rengasta $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ja sen ideaaleja $I = (12)$ ja $J = (21)$. Millainen ideaali on $I \cap J$?
   Vihje. Lauseseitten 2.2.5 ja 2.2.6 perusteella tiedät, millaista muotoa ovat ideaalit I ja J. Koska $I \cap J$ on myös tätä samaa muotoa ja edellisten osajoukko, niin voit päätellä, mikä joukko $I \cap J$ on (valistunut arvaus). Kuitenkin sinun pitää tämä vielä todistaa.