Renkaat, kunnat ja polynomit

Vihjeet 3 syksy 2013

1. Määrää renkaan $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ kaikki ideaalit. Mitkä näistä ideaaleista ovat maksimaalisia ja mitkä ovat pääideaaleja?

   Vihje. Lähde rakentamaan ei-triviaalit ideaalit Määritelmän 2.2.1 ehdon 1 pohjalta. Paras tapa on etsiä sykliset aliyhmät (miksi muita ei ole?) ja osoittaa sen jälkeen, että Määritelmän 2.2.1 ehto 2 toteutuu. Kun olet saanut kaikki ideaalit, niin Määritelmä 2.2.8 antaa sinulle maksimaaliset. Triviaalien pääidealien lisäksi sinun pitää tarkastella loppuja ideaaleja, että saadaanko koko ideaali, kun jotain sen alkiota kerrotaan vasemmalta puolelta (miksi oikelta puolelta kertominen voidaan unohtaa?) kaikilla renkaan $\mathbb{Z}_8$ alkioilla (ideaali voidaan saada jo renkaan $\mathbb{Z}_8$ osajoukolla). Tuolla tavalla saadaan Määritelmän 2.2.4 alkio a, joka generoi ideaalin.

2. On osoitettu, että $I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$ on renkaan $(R, +, \cdot)$, missä $R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$, ideaali. Onko I pääideaali?

   Vihje. Tarkastele saadaanko koko ideaali, kun jotain sen alkiota kerrotaan vasemmalta puolelta ja oikelta puolelta kaikilla renkaan R alkioilla (ideaali voidaan saada jo osalla näistä laskutoimituksista). Tuolla tavalla saadaan Määritelmän 2.2.4 alkio a, joka genoroi ideaalin.

3. Olkoon $R = \{f \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ ja olkoon sen epätyhjä osajoukko $A = \{f \in R \mid f(0) = 0\}$. Tiedetään, että $(R, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että A on renkaan $(R, +, \cdot)$ maksimaalinen ideaali.

   Vihje. Kertaa peruskursseista funktioilla laskeminen ja jatkuvuuden säilyminen kahden funktion peruslaskutoimituksissa, jos eivät ole jo valmiiksi muistissa. Näiden asioiden avulla Määritelmän 2.2.1 ehdot voi helposti osoittaa. Maksimaalisuuden osoittamiseksi oletetaan, että on olemassa renkaan R ideaali M, jolle A on aito osajoukko. Nyt täytyy osoittaa, että renkaan R ykkösalkio (mikä tämä on?) kuuluu ideaaliin M eli $M = R$ ja A on siten maksimaalinen. Oleta aluksi, että on sellainen renkaan R alkio, joka kuulluu ideaalin M, mutta ei kuulu ideaaliin A. Millainen tämä alkio (funktio) on. Muodosta tämän funktion avulla funktio, joka kuuluu ideaaliin A. Osoita edellä olevan funktion avulla, että eräs vakiofunktio kuuluu ideaaliin M käyttämällä Määritelmän 2.2.1 ehtoa 1. Tämän ja Määritelmän 2.2.1 ehdon 2 avulla voit osoittaa, että renkaan ykkösalkio kuuluu ideaaliin M.

4. On osoitettu, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ideaali. Määrää tekijärenkaan $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ alkiot ja laskutaulukot.

   Vihje. Muodosta vasemmat sivuluokat ideaalin (tekijärenkaan alkiot) suhteen ja tee luentomonisteen sivulla 12 olevien sivuluokkien laskutoimituksien määritelmien avulla laskutaulukot.

5. Tiedetään, että $I = \{2x + 2yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ideaali (vertaa Harjoituksen 2 tehtävään 4). Määrää tekijärenkaan $(\mathbb{Z}[i]/I, +, \cdot)$ alkiot ja laskutaulukot.

   Vihje. Muodosta vasemmat sivuluokat ideaalin (tekijärenkaan alkiot) suhteen ja tee luentomonisteen sivulla 12 olevien sivuluokkien laskutoimituksien määritelmien avulla laskutaulukot. Sivuluokkia muodostessa, mieti minkälaisia Gaussin kokonaislukuja $x+yi$ kuuluu ideaalin I (minkälaisia lukuja ovat x ja y?) ja minkälaisia sivuluokkia saadaan kun Gaussin kokonaisluku ei kuulu tähän ideaaliin. Sivuluokkien muodostamisen voi lopettaa, kun niiden yhdiste on koko Gaussin kokonaislukujen joukko (ei löydy enää alkioita jotka voisivat määrätä uuden sivuluokan).

6. Määrää kaikki rengashomomorfismit $f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ ja $f\colon \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$.

   Vihje. Tutustu Määritelmää 2.4.1 ja sen jälkeiseen huomautukseen.
   $\underline{f\colon \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}}$: Lähde liikkeelle nolla- ja ykkösalkioiden kuvista. Perustele tämän jälkeen Määritelmän 2.4.1 ehtojen avulla, miksi alkioksi kuvautuu mielivaltainen positiivinen kokonaisluku m. Tämän jälkeen perustele, miksi alkioiksi kuvautuu negatiiviset kokonaisluvut. Kun olet saanut mahdolliset kuvaukset, osoita vielä, että Määritelmän 2.4.1 ehdot toteutuvat.
   $\underline{f\colon \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}}$: Kokonaisluvut ovat jo osoitettu edellä. Seuraavaksi kannattaa miettiä, miten kuvautuvat nollasta eroavien kokonaislukujen käänteisalkiot. Tämän jälkeen yleisen rationaaliluvun kuvaus on helppo johtaa. Tietenkin vielä pitää osoittaa Määritelmän 2.4.1 ehdot.

7. Osoita, että rengashomomorfismi $f : R \mapsto R'$ on injektio jos ja vain jos $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_R\}$.
   Vihje. Tutustu määritelmään 2.4.5 ja kertaa injektion määritelmä. Osoita väite molempiin suuntiin. Suunta vasemmalta oikealle tulee helposti. Oikealta vasemmalle suunnassa käytä Määritelmän 2.4.1 ehtoja ja Määritelmää 2.4.5. Lisäksi kannattaa ennen tämän suunnan tekemistä miettiä, onko yhtälöille $f(x) = f(y)$ ja $x = y$ yhtäpitävät muodot, joista olisi apua tämän suunnan todistamisessa.