Renkaat, kunnat ja polynomit

Vihjeet 4 syksy 2013

1. Olkoon $f\colon R \to R'$ rengashomomorfismi. Osoita alirengaskriteerin ja ideaalin määritelmän avulla, että
   1° $Ker(f)$ on renkaan R ideaali,
   2° $Im(f)$ on renkaan R' alirengas.

   Vihje. Lue Määritelmä 2.4.5 ja osoita väitteet Määritelmän 2.4.1 ja sen jälkeisen huomautuksen avulla (tietenkin huomioi alirengaskriteeri ja ideaalin määritelmä).

2. Olkoot
$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
   ja
$$R = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
   Tiedetään, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ja $(R, +, \cdot)$ ovat renkaita. Osoita, että ne ovat isomorfiset.

   Vihje. Muodosta kuvaus renkaitten $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ja $(R, +, \cdot)$ välille (kuvaus on melkein annettukin tehtävänannossa, jos tarkastelee merkintöjä). Osoita, että tämä kuvaus toteuttaa Määritelmän 2.4.1 ehdot (homomorfismi). Injektioksi osoittamiseen käytä harjoituksen 3 tehtävän 7 tietoja. Perustele, miksi kuvaus on surjektio.

3. On osoitettu (harjoituksen 1 tehtävä 5), että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on rengas, kun $a * b = a + b - 1$ ja $a \circ b = a + b - ab$. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ on isomorfinen renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kanssa.

   Vihje. Harjoituksen 1 tehtävässä 5 on etsitty renkaan $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ nolla- ja ykkösalkiot. Näiden tietojen avulla muodosta lineaarinen kuvaus renkaalta $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ renkaalle $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, kun tiedät, miten nolla- ja ykkösalkiot kuvautuvat. Osoita, että tämä kuvaus toteuttaa Määritelmän 2.4.1 ehdot (homomorfismi). Injektioksi osoittamiseen käytä harjoituksen 3 tehtävän 7 tietoja. Perustele, miksi kuvaus on surjektio.

4. Olkoot
$$N = \{A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}\}$$

ja

$$I = \{A \mid A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Tiedetään, että $(N, +, \cdot)$ on rengas ja I sen ideaali. Olkoon

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Joukossa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yhteenlasku määritellään

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja kertolasku määritellään

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2).$$

Näin määriteltynä $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että tekijärengas $(N/I, +, \cdot)$ on isomorfinen renkaan $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ kanssa. (Vihje: Renkaiden homomorfialause.)

Vihje. Valitse $Ker(f)$ ja $Im(f)$ niin, että väite on osoitettu Lauseen 2.4.7 nojalla (Renkaiden homomorfialause), kun f on osoitettu homomorfismiksi. Tietenkin pitää tietää, mikä tämä kuvaus f on, mutta sen voit päätellä joukoista $Ker(f)$ ja $Im(f)$. Osoita, että tämä kuvaus toteuttaa Määritelmän 2.4.1 ehdot (homomorfismi).

5. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö $x^2 = x$.

   Vihje. Lue Määritelmä 2.5.2. Käytä osoitukseen renkaan laskusääntöjä ja Määritelmää 2.5.1.

6. Osoita, että jokainen kunta on kokonaisalue.

   Vihje. Kunnassa jokaisella nolla-alkiosta eroavalla alkiolla on käänteisalkio. Osoita tämän avulla, että kokonaisalueessa ei ole nollanjakajaa.

7. Osoita, että jokainen äärellinen kokonaisalue on kunta.

   Vihje. Olkoon a kokonaisalueen D nollasta eroava alkio. Osoita Lausetta 2.5.3 käyttämällä, että kokonaisalueen osajoukossa $C = \{ax \mid x \in D\}$ on yhtä monta alkiota kuin kokonaisalueessa (samat joukot). Mitä tiedät tämän perusteella kokonaisalueen ykkösalkiosta ja alkion a käänteisalkiosta?