Renkaat, kunnat ja polynomit

Vihjeet 6 syksy 2013

1. Määrää polynomien $[2]x^2 + [1]x + [1]$ ja $[4]x + [3]$ tulo renkaassa $\mathbb{Z}_8[x]$. Miksi Lause 4.1.4 ei päde?

   Vihje. Kerro polynomit normaalisti ja mieti, mistä johtuu että Lause 4.1.4 ei päde.

2. Jaa renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomi $[1]x^4+[2]x^3+[1]x+[2]$ polynomilla $[2]x + [1]$.

   Vihje. Tavallista polynomien jakolaskua jakokulmassa. Muista, että jäännösluokan edustajan voi vaihtaa.

3. Tutki polynomin $[1]x^3 + [1]x^2 + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$ jaollisuutta.

   Vihje. Käytä Lausetta 4.1.10.

4. Olkoon $ax^3 + bx^2 + cx + d \in K[x]$ astetta kolme oleva jaoton polynomi (K on kunta). Osoita, että myös $dx^3 + cx^2 + bx + a$ on jaoton polynomi.

   Vihje. Tee vastaoletus ja osoita aluksi, että polynomin $dx^3 + cx^2 + bx + a$ nollakohta $\alpha \neq 0_K$. Osoita, että nyt polynomin $ax^3 + bx^2 + cx + d$ nollakohta on α^{-1}.

5. Määrää kaikki astetta kaksi olevat jaottomat polynomit renkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$.

   Vihje. Muodosta kaikki 2. asteen polynomit ja käytä Lausetta 4.1.10.

6. Jaa polynomi $f(x) = [1]x^3+[1]x^2+[1]x+[1]$ tekijöihin renkaassa $\mathbb{Z}_3[x]$.

   Vihje. Etsi 1. asteen tekijä polynomin $f(x)$ nollakohdan avulla ja jaa sillä polynomi $f(x)$. Tutki näin saamasi polynomin jaollisuutta.

7. Olkoon $f(x) \in K[x]$. Oletetaan, että $\deg f(x) = n$. Osoita, että polynomilla $f(x)$ on korkeintaan n erisuurta nollakohtaa kunnassa K.

   Vihje. Oleta, että polynomilla $f(x)$ on k kappaletta erisuuria nollakohtia. Käytä Lausetta 4.1.8 k kertaa. Lopuksi Lauseen 4.1.4 pitäisi antaa väite.

8. Ratkaise yhtälö $[5]x^2 - [6]x + [1] = [0]$ kunnassa $(\mathbb{Z}_{37}, +, \cdot)$.

   Vihje. Etsi kokeilemalla yksi ratkaisu. Etene tästä jakokulmaan, josta saatavan polynomin nollakohta on toinen ratkaisu. Voit käyttää Eukleideen algoritmiä 1. asteen termin kertoimen käänteisalkion etsimiseen.

9. Olkoon I polynomirenkaan $(K[x], +, \cdot)$ ideaali. Osoita, että $I = (f(x))$, missä $f(x)$ on jokin pääpolynomi.

   Vihje. Muodosta n. asteen polynomi $f(x)$, joka generoi ideaalin I. Osoita, että polynomista $f(x)$ vakiolla kertomalla saatavan pääpolynomin $g(x)$ generoima ideaali on ideaalin I osajoukko. Osoita vielä vastaavasti, että ideaali I on pääpolynomin $g(x)$ generoiman ideaalin osajoukko.