

Ryhmäteoria

Harjoitus 10, syksy 2013

1. Tarkastellaan ryhmää $SL(2, K)$, missä $|K| = 4$. Olkoon ω kunnan K primitiivinen alkio ja olkoon $B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$. Määrää alkion B kertaluku ja sen konjugaattien lukumäärä ryhmässä $SL(2, K)$.
2. Yksinkertainen lasku osoittaa, että $|SL(2, 3)| = |S_4| = 24$. Ovatko ryhmät $SL(2, 3)$ ja S_4 keskenään isomorfiset?
3. Tarkastellaan tehtävän 1. ryhmää $SL(2, K)$. Mikä on ryhmän alkion $C = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix}$ kertaluku?
4. Olkoon M äärellisen ratkeavan ryhmän G maksimaalinen aliryhmä. Osoita, että $[G : M]$ on alkuluvun potenssi.
(Vihje: Oleta, että G on kertaluvultaan pienin ryhmä, jolle väite ei pidä paikkaansa. Olkoon N ryhmän G minimaalinen normaali aliryhmä. Tutki erikseen tapaukset $N \leq M$ ja $N \not\leq M$.)