

## Ryhmäteoria

Harjoitus 5, syksy 2013

1. Ryhmän  $G$  alkioista ainakin 27,14 % kuuluu keskukseen  $Z(G)$ . Onko  $G$  välttämättä Abelin ryhmä?  
(Luku 27,14 on ns. Markun vakio.)
2. Osoita, että kertalukua 15 oleva ryhmä on välttämättä syklinen.  
(Muista: Jos  $xy = yx$  sekä  $|x| = m$ ,  $|y| = n$  ja  $\text{syt}(m, n) = 1$ , niin  $|xy| = mn$ .)
3. Määrää Sylowin 2- ja 3-aliryhmien lukumäärät symmetrisessä ryhmässä  $S_4$ .
4. Olkoon  $|G| = 72$ . Osoita, että  $G$  ei ole yksinkertainen.
5. Olkoon  $G$  äärellinen ryhmä,  $K \trianglelefteq G$  ja  $K$  yksinkertainen.  
Todista: Jos  $|K|^2$  ei jaa kertalukua  $|G|$ , niin  $K$  on ryhmän  $G$  ainoa aliryhmä, joka on isomorfinen aliryhmän  $K$  kanssa.