Sisältö

1 Funktiojonoista

Reaaliset lukujonot määriteltiin funktioina $f : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Analogisesti funktiojonot määritellään funktioina positiivisten kokonaislukujen joukolta reaalifunktioiden joukolle. Täten funktiojono liittää jokaiselle kokonaisluvulle täsmälleen yhden funktion $f : A \mapsto B$, missä $A, B \subset \mathbb{R}$.

Jos $f_1 : D \mapsto \mathbb{R}, f_2 : D \mapsto \mathbb{R}, \ldots$ on jono reaalifunktioita, niin funktiojonoa merkitään $(f_k)_{k=1}^{\infty}$. Mikäli indeksistä ei ole epäselvyyttä, niin lyhennetään vain (f_k).

Olkoon $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ funktiojono, jossa $f_k : D \mapsto \mathbb{R}$ ja $D \subset \mathbb{R}$. Tämä funktiojono **suppenee pisteittäin** kohti funktiota $f : D \mapsto \mathbb{R}$, mikäli

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \text{aina, kun } x \in D.$$

Tällöin funktiota f sanotaan jonon (f_k) rajafunktioksi ja merkitään $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ tai $f_k \to f$, kun $k \to \infty$.

Kiinnittämällä $x_0 \in D$ saadaan normaali reaalinen lukujono $(f_k(x_0))_{k=1}^{\infty}$. Selvästi mikäli tämä lukujono hajaantuu, niin ei voi olla olemassa funktiota $f : D \mapsto \mathbb{R}$, joka toteuttaisi ehdon $f_k(x_0) \to f(x_0)$, kun $k \to \infty$. Tällöin funktiojono $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ ei voi supeta.

Esimerkiksi funktiojono (f_k), missä $f_k : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$ on jono jatkuvia funktioita, joka suppenee kohti funktiota $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, kun } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{, kun } x = 1. \end{cases}$$

Nyt funktio f ei ole jatkuva funktio, vaikka jokainen funktiojonon funktio f_k on. Tämä on hieman ongelmallista, sillä jatkoa ajatellen olisi hyödyllistä, että suppeneminen säilyttäisi rajafunktion jatkuvuuden. Otetaan käyttöön tiukempi ehto suppenemiselle.

Funktiojono (f_k) **suppenee tasaisesti** joukossa $D \subset \mathbb{R}$ kohti rajafunktiota f, mikäli

$$\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \to 0, \qquad \text{kun } k \to \infty.$$

Tasaisesta suppenemisesta seuraa suoraan pisteittäinen suppeneminen, sillä

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \to 0, \qquad \text{kun } k \to \infty.$$

Täten $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ kaikilla $x \in D$.

Pisteittäisessä suppenemisessa jokaista lukua $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen luku $k(x, \epsilon) \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|f_k(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } k > k(x, \epsilon),$$

missä $x \in D$. Koska jokainen $(f_k(x_0))$ on oma lukujononsa, niin $k(x_0, \epsilon)$ tulee riippumaan luvusta $\epsilon > 0$ ja määritysjoukon pisteestä $x_0 \in D$. Edellisessä esimerkissä jokainen $k \in \mathbb{Z}_+$ käy luvuksi $k(x, \epsilon)$, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Kun $0 < x < 1$, täytyy valita $k(x, \epsilon) > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$. Tämä arvio vakiolle saadaan ottamalla epäyhtälöstä

$$\left| x^k - 0 \right| = x^k < \epsilon$$

puolittain luonnollinen logaritmi. Tämä voidaan tehdä, koska molemmat puolet ovat positiivisia. Täten

$$\ln x^k = k \ln x < \ln \epsilon.$$

Epäyhtälön suunta säilyy, koska luonnollinen logaritmi on aidosti kasvava funktio. Koska $0 < x < 1$, niin $\ln x < 0$ ja saadaan

$$k > \frac{\ln \epsilon}{\ln x}.$$

Tasaisessa suppenemisessa vaaditaan luvun $k_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$ täyttävän ehdon

$$\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } k > k_\epsilon.$$

Täten k_ϵ tulee riippumaan vain luvusta $\epsilon > 0$ ja joukosta D. Siis

$$|f_k(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } k > k_\epsilon \text{ ja } x \in D.$$

Ero ei vaikuta ehkä järin suurelta, mutta on käytännössä huomattava, sillä erotuksen $|f_k(x) - f(x)|$ supremum lasketaan ennen kuin luvun k annetaan kasvaa rajatta.

Seuraava lause osoittaa, että määritelmänä tasainen suppeneminen on hyvin valittu, sillä se tulee takaamaan, että rajafunktio tulee säilyttämään jatkuvuuden.

Lause. *Jos jatkuvien funktioiden muodostama funktiojono* (f_k) *suppenee tasaisesti joukossa* $D \subset \mathbb{R}$ *kohti rajafunktiota* $f : D \mapsto \mathbb{R}$*, niin funktio* f *on jatkuva.*

Samalla lause antaa helpon tavan osoittaa joissakin tapauksissa, että funktiosarjan suppeneminen ei ole tasaista. Nimittäin jos rajafunktio f on epäjatkuva vaikka funktiojonon termit f_k ovat jatkuvia, niin suppeneminen ei voi olla tasaista.

Huomautus. Koska suljetulla ja rajoitetulla välillä $I = [a, b]$ jatkuva funktio saavuttaa maksiminsa tällä välillä, niin

$$\sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| = \max_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| \,.$$

Koska $\max\limits_{x \in I} |f_k(x) - f(x)|$ on luvusta k riippuva lukujono, niin tasaisen suppenemisen tarkastelu saadaan palautettua lukujonon suppenemiseen, mikäli maksimiarvo pystytään määräämään.

2 Funktiosarjoista

Olkoon (g_k) mielivaltainen jono funktioita $g_k : D \mapsto \mathbb{R}$. Vastaavalla tavalla kuin tavallinen sarja muodostetaan lukujonosta summaamalla lukujonon termejä, niin funktiosarja saadaan muodostamalla uusi funktiojono (f_n), missä

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) \quad \text{aina, kun } x \in D \text{ ja } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Tätä funktiota sanotaan funktiosarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ n:nneksi osasummaksi.

Funktiosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ **suppenee pisteittäin** kohti funktiota f joukossa D, mikäli osasummien jono (f_n) suppenee pisteittäinäin kohti funktiota f joukossa D. Siis jos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = f(x) \qquad \text{aina, kun } x \in D.$$

Kiinnittämällä $x_0 \in D$ saadaan aikaan reaalilukujen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x_0)$. Tähän voidaan soveltaa suoraan sarjateorian tuloksia. Esimerksi funktiosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x_0)$ ei voi supeta, mikäli $g_k(x_0) \to a \neq 0$, kun $k \to \infty$. Myös muita suppenemistestejä, esimerkiksi suhdetestiä ja juuritestiä, voidaan soveltaa pisteittäisissä suppenemistarkasteluissa.

Funktiosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ **suppenee tasaisesti** kohti funktiota f joukossa D, mikäli osasummien jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa D. Eli jos

$$\sup_{x\in D} \left| \sum_{k=1}^{n} g_k(x) - f(x) \right| \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Koska kahden jatkuvan funktion summafunktio on jatkuva, niin jatkuvien funktioiden muodostama sarjan jokainen osasumma on jatkuva funktio. Täten voidaan funktiojonoille osoitettua tulostaa soveltaa ja saada

Lause. *Jos funktiot* (g_k) *ovat jatkuvia kaikilla* $k \in \mathbb{Z}_+$ *joukossa* D *ja funktiosarja* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ *suppenee tasaisesti joukossa* $D \subset \mathbb{R}$ *kohti summafunktiota* $f : D \mapsto \mathbb{R}$, *niin summafunktio* f *on jatkuva.*

Varsinkin sarjojen tapauksessa tasaisen suppenemisen osoittaminen voi olla hyvin työlästä. Onneksi Weierstrassin M-testi yksinkertaistaa tätä huomattavasti, mikäli onnistuu löytämään sopivan majoranttisarjan.

Weierstrassin M-testi. *Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee ja*

$$|g_k(x)| \leq a_k \qquad \text{aina, kun } x \in D \text{ ja } k \in \mathbb{Z}_+,$$

niin funktiosarja $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ *suppenee tasaisesti joukossa* D.

Huomautus. Korvaamalla $g_n(x)$ termillä $|g_n(x)|$ huomataan, että jos Weierstrassin M-testin ehdot täyttyvät, niin myös funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$$

suppenee tasaisesti joukossa D.

3 Funktiojonojen ja -sarjojen derivointi ja integrointi

Jatkuvuuden lisäksi tasainen suppeneminen tulee säilyttämään myös funktion integroituvuuden ja lisäksi integroimisen saa suorittaa termeittäin.

Lause. *Olkoon* (f_k) *jono funktioita, jotka ovat integroituvia välillä* $[a, b]$. *Jos jono* (f_k) *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$ *kohti funktiota* f, *niin funktio* f *on integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$$

Vastaava tulos funktiosarjoille on:

Lause. *Olkoon* (f_k) *jono funktioita, jotka ovat integroituvia välillä* $[a, b]$. *Jos sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$ *kohti funktiota* f, *niin funktio* f *on integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$$

Koska esimerkiksi kaikki suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuvat funktiot ovat integroituvia tällä välillä, niin käytännön laskutehtävissä usein riittää todeta, että funktiojonon funktiot ovat jatkuvia välillä, jonka yli integrointi suoritetaan.

Ikävä kyllä, derivoimisen suhteen tilanne ei ole yhtä yksinkertainen.

Lause. *Olkoon* (f_k) *jono funktioita, jotka ovat jatkuvasti derivoituvia välillä* $[a, b]$. *Jos jono* (f_k) *suppenee pisteittäin välillä* $[a, b]$ *kohti funktiota* f *ja derivaattojen jono* (f_k') *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$ *kohti funktiota* g, *niin funktio* f *on derivoituva jatkuvasti välillä* $[a, b]$ *ja*

$$f'(x) = g(x) = \lim_{k\to\infty} f_k'(x) \qquad \text{aina, kun } x \in [a, b].$$

Funktio f_k on jatkuvasti derivoituva välillä, mikäli funktion derivaattafunktio on olemassa ja se on jatkuva. Tämän merkintään kirjoittamalla $f_k \in C^1(\mathbb{R})$.

Ja sarjoille sama tulos on:

Lause. *Olkoon* (f_k) *jono funktioita, jotka ovat jatkuvasti derivoituvia välillä* $[a, b]$. *Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *suppenee pisteittäin välillä* $[a, b]$ *kohti funktiota* f *ja derivaattojen sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ *suppenee tasaisesti välillä* $[a, b]$ *kohti funktiota* g*, niin funktio* f *on derivoituva jatkuvasti välillä* $[a, b]$ *ja*

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = g(x) \qquad \textit{aina, kun } x \in [a, b].$$

Huomautus. Edellä olevia tuloksia voidaan parantaa, eli osa oletuksista on turhia. Tämän kurssin tarpeisiin tulokset ovat kuitenkin riittäviä.

Voidaan osoittaa, että jos f on välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, niin on olemassa polynomijono (P_k), joka suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti funktiota f. Jokainen polynomi on derivoituva kaikissa reaalilukupisteissä. Kuitenkin on olemassa funktioita, jotka ovat jatkuvia kaikkialla, mutta eivät missään derivoituvia. Täten derivoituvuus ei ole ominaisuus, jonka tasainen suppeneminen säilyttää. Tämä voi tuntua oudolta, koska tasainen suppeneminen säilyttää kuitenkin jatkuvuuden ja integoituvuuden. Derivoituvuus on vain paljon tiukempi ehto kuin integroituvuus tai jatkuvuus.

4 Potenssisarjat

Olkoon x_0 mielivaltainen reaaliluku ja $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ mielivaltainen reaalinen lukujono. Funktiosarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-x_0)^k$$

sanotaan potenssisarjaksi. Lukuja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ kutsutaan potenssisarjan kertoimiksi ja luku x_0 on sarjan keskipiste. Merkitsemällä $x = z - x_0$ saadaan kaikki potenssisarjat palautettua muotoon

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

joissa keskipisteenä on siis 0. Potenssisarja määrittelee siis funktion

$$f : D \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

missä funktion f määritysjoukko D sisältää täsmälleen ne luvut $x \in \mathbb{R}$, joissa potenssisarja suppenee. Eli $x \in D$ jos ja vain jos sarjan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ summa on äärellisenä olemassa. Siis

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ suppenee} \right\}.$$

Huomautus. Yleensä lauseketta 0^0 ei ole määritelty, mutta potenssisarja käsiteltäessä sovitaan, että $0^0 = 1$. Tällöin

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0.$$

Potenssisarjan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ **suppenemissäde** on luku

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ suppenee} \right\} = \sup D.$$

Selvästi jokainen potenssisarja suppenee, kun $x = 0$, joten $R \geq 0$. Mikäli potenssisarja suppenee kaikilla reaaliluvuilla $x \in \mathbb{R}$ eli

$$\mathbb{R} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ suppenee} \right\} = D,$$

niin joukon suprenumia ei ole äärellisenä olemassa, jolloin merkitään $R = \infty$. Siten $0 \leq R \leq \infty$.

Määritelmän nimi on mielekäs, sillä majorantti- ja minoranttiperiaatetta käyttämällä saadaan, että

Lause. *Potenssisarja* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *suppenee aina, kun* $|x| < R$ *ja hajaantuu aina, kun* $|x| > R$

Huomautus. Lauseen suppenemis- ja hajaantumisehdot eivät ole "jos ja vain jos", sillä potenssisarja voi supeta tai hajaantua arvoilla $x = R$ tai $x = -R$. Nämä pitää siis tarkastella erikseen sarjan suppenemista tutkittaessa.

Sarjojen osamäärä- ja juuritestiä muokkaamalla saadaan seuraavat tulokset:

Osamäärätesti. *Olkoon* $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = p$.
Jos $p = 0$, *niin* $R = \infty$.
Jos $p = \infty$, *niin* $R = 0$.
Jos $0 < p < \infty$, *niin* $R = \frac{1}{p}$.

ja

Juuritesti. *Olkoon* $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = p$.
Jos $p = 0$, *niin* $R = \infty$.
Jos $p = \infty$, *niin* $R = 0$.
Jos $0 < p < \infty$, *niin* $R = \frac{1}{p}$.

Weierstrassin M-testia soveltamalla saadaan taasen:

Lause. *Potenssisarja* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *suppenee tasaisesti jokaisella välillä* $[a, b] \subset]-R, R[$, *missä* $a, b \in \mathbb{R}$ *ja* $a < b$.

Koska funktiot $f_k(x) = a_k x^k$ ovat jatkuvia ja tasainen suppeneminen säilyttää jatkuvuuden, niin

Lause. *Funktio* $f :]-R, R[\mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *on jatkuva.*

Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ jatkuvat funktiot ovat myös integoituvia tällä välillä. Tasainen suppeneminen säilytti integoituvuuden ja salli termeittäin integroinnin, joten

Lause. *Jos* $[a, b] \subset]-R, R[$, *niin funktio* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *on integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_a^b x^k \mathrm{d}x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \Big/_a^b \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Derivoituvuuden osoittamiseen tarvitaan seuraavaan aputulosta.

Lause. *Potenssisarjoilla*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \quad \textit{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

on samat suppenemissäteet.

Lause. *Jos* $x \in]-R, R[$, *niin funktio* f *on derivoituva pisteessä* x *ja*

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Täten jokainen potenssisarjaa voidaan derivoida mielivaltaisen monta kertaa suppenemissäteensä $]-R, R[$ sisällä. Tutkimalla sarjan derivaattoja saadaan seuraava tulos.

Lause. *Jos*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \textit{ja} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

sekä on olemassa sellainen $r > 0$, *että* $f(x) = g(x)$ *aina, kun* $x \in]-r, r[$, *niin* $a_k = b_k$ *kaikilla* $k = 0, 1, 2 \ldots$

Täten potenssisarjan kertoimet ovat yksikäsitteisiä.

5 Taylorin polynomit ja sarjat

Jokaista potenssisarjaa voidaan derivoida mielivaltaisen monta kertaa suppenemissäteensä $]x_0 - R, x_0 + R[$ sisällä. Ottamalla sarjan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

i:s derivaatta, saadaan

$$f^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{\infty} i(i-1)(i-2)\cdots(k-i+1) a_k (x - x_0)^{k-i}$$

Sijoittamalla $x = x_0$ kaikki kertoimen $(x - x_0)$ sisältävät termit supistuvat pois ja jäljelle jää

$$f^{(i)}(x_0) = i! a_i$$

eli potenssisarjan kertoimelle a_i saadaan uusi esitysmuoto

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}.$$

Nyt potenssisarjat voidaan kirjoittaa uudella tavalla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

jota sanotaan funktion f **Taylorin sarjaksi** pisteen x_0 ympäristössä. Mikäli $x_0 = 0$, niin sarjaa kutsutaan Maclaurinin sarjaksi. Jokainen potenssisarjan määräämä funktio f voidaan siis kirjoittaa Taylorin sarjana. Seuraavaksi tarkastellaan milloin funktiolle on mahdollista muodostaa Taylorin sarja eli milloin se voidaan esittää potenssisarjana.

5.1 Taylorin polynomit

Olkoon f sellainen funktio, että se on n kertaa derivoituva pisteessä x_0. Tällöin sen n:nnen asteen **Taylorin polynomi** pisteessä x_0 on

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Funktiota

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$$

sanotaan Taylorin polynomin jäännöstermiksi. Se siis kertoo millainen virhe tehdään, kun funktiota f arvioidaan n:nnen asteen Taylorin polynomilla.

Lause. *Jos funktio f on äärettömän monta kertaa derivoituva pisteen x_0 eräässä R-säteisessä ympäristössä, niin*

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$$

aina, kun $|x - x_0| < R$ *ja* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Soveltamalla integraalilaskennan väliarvolauseen yleistettyä muotoa tähän saadaan, että on olemassa sellainen luku s pisteiden x ja x_0 (ei tiedetä kumpi on suurempi) välissä, että

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Täten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

mikä on väliarvolauseen yleistys, sillä tapauksessa $n = 0$ yhtälö on supistuu muotoon

$$f(x) = f(x_0) + f'(s)(x - x_0).$$

Huomautus. Edellisen lauseen kaava antaa virheelle tarkan arvon, mikäli integraalin $\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t$ arvo osataan laskea. Koska yleensä halutaan tietää vain arvio virheelle luvun n eri arvoilla, niin helpoin tapa tähän voi olla laskea jokin yläraja lausekkeelle

$$\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

missä $s \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

5.2 Taylorin sarjat

Olkoon $R > 0$ sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ suppenemissäde.

Oletetaan, että $R_n(x, x_0) \to 0$, kun $n \to \infty$ välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$. Tällöin

$$T_n(x, x_0) \to f(x), \qquad \text{kun } n \to \infty \text{ ja } x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Siis funktiolla f on sarjakehitelmä pisteen x_0 ympäristössä, joka yhtyy funktioon f funktiosarjan suppenemissäteen $]x_0 - R, x_0 + R[$ sisällä. Tätä sarjakehitelmää

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{aina, kun } x \in]x_0 - R, x_0 + R[$$

kutsutaan funktion f **Taylorin sarjaksi** pisteen x_0 ympäristössä.

Useimmissa tapauksissa funktion Taylorin polynomin virhefunktion $R_n(x, x_0)$ raja-arvoa on hankalaa tarkastella. Seuraavan lauseen soveltaminen voi helpottaa tarkastelua.

Lause. *Jos funktion f jokainen derivaatta $f^{(k)}(x)$ on rajoitettu pisteen x_0 ympäristössä $B_R(x_0)$ eli on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että*

$$\left|f^{(k)}(x)\right| < M \qquad \textit{aina, kun } |x - x_0| < R \textit{ ja } k = 0, 1, \ldots,$$

niin $\lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) = 0$ aina, kun $|x - x_0| < R$.

Täten esimerkiksi funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ Taylorin sarjat suppenevat kaikkialla alueessa $\mathbb{R}$.

Mikäli funktio f voidaan kirjoittaa funktioon yhtyvänä Taylorin sarjana, niin funktio on polynomifunktioiden raja-arvo. Polynomien ja raja-arvon käsitteet voidaan helposti yleistää esimerkiksi kompleksiluvuille ja matriiseille. Täten funktio f voidaan määritellä mielekkäästi myös kompleksiluvuille ja matriiseille.

5.3 Yleisimpia sarjakehitelmiä

1. $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

2. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$, kun $-1 < x \leq 1$
3. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
4. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots$ kaikilla $|x| < 1$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Edellisessä merkintä $\binom{\alpha}{n}$ on nk. yleistetty binomikerroin ja

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $n = 0, 1, 2, \ldots$.