

Perustehtäviä

Tehtävä 1. Tutki seuraavien funktiojonojen $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ pisteittäistä ja tasaista suppenemista.

1. $f_k(x) = \cos \frac{x}{k}, x \in \mathbb{R}$
2. $f_k(x) = \frac{1}{1+kx^2}, x \in \mathbb{R}$
3. $f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2}, x \in [0, 1]$
4. $f_k(x) = (\sin x)^k, x \in \mathbb{R}$

Tehtävä 2. Osoita suoraan määritelmään perustuen, että funktiojono (f_k) , missä $f_k(x) = x^k, x \in [0, 1]$, ei suppene tasaisesti kohti rajafunktiotaan.

Tehtävä 3. Ovatko seuraavat väittämät totta?

1. Funktiojono voi supeta tasaisesti, mutta ei pisteittäisesti, joukossa D .
2. Jos funktiojono (f_k) suppenee pisteittäin kohti funktiota f joukossa $\mathbb{R}$ ja on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $|f_k(x)| \leq M$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $x \in \mathbb{R}$, niin $|f(x)| \leq M$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.
3. Jos rajoitetuista funktioista koostuva funktiojono (f_k) suppenee pisteittäin kohti funktiota f joukossa $\mathbb{R}$, niin funktio f on rajoitettu.
4. Jos funktiojono (f_k) , jonka jokainen funktio on epäjatkuva kaikissa reaali-pisteissä suppenee pisteittäin kohti funktiota f , niin funktio f on epäjatkuva kaikissa reaali-pisteissä.

Tehtävä 4. Laske rajafunktiot f seuraaville jonoille. Tutki myös onko $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$.

1. $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$
2. $f_k(x) = \int_0^x t^k dt, 0 \leq x \leq 1$
3. $f_k(x) = x + \frac{x^k}{k}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Tehtävä 5. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista. Onko sallittua derivoida ja integroida termeittäin?

1. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k$, kun $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^4 x)}{k^2}$, kun $x \in \mathbb{R}$

Tehtävä 6. Osoita, että funktio $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi^2 x)}{\pi k^2}$ on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 7. Laske summafunktio seuraavalle funktiosarjalle.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sin x)^{2k},$$

missä $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Tehtävä 8. Tutki funktiosarjojen suppenemista eri arvoilla $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k+1}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\pi^k} (\sin x)^k$

Tehtävä 9. Laske seuraavien funktiosarjojen suppenemissäde.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1 \right)^k x^k$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k} x^k$

Tehtävä 10. Olkoon $f(x) = \arctan x$. Laske potenssisarjakehitelmä funktiolle f ja sen avulla $f^{(99)}(0)$. Entä mitä on $f^{(100)}(0)$?

Tehtävä 11. Kehitä arvioiva lauseke funktiolle

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

kun $0 \leq x \leq 1$. Virhe saa olla korkeintaan 0.001 yksikköä.

Tehtävä 12. Olkoon $-1 < x < 1$. Johda sarjakehitelmä funktiolle

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Laske derivaattafunktio ja $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Vaativampia tehtäviä

Tehtävä 13. Oletetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja että $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. Osoita, että funktio on hyvin määritelty ainakin välillä $] - 1, 1]$. Näytä, että

$$f(x) = (1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} s_k x^k$$

kaikille $|x| < 1$, missä $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$. Perustele lopuksi miksi funktio f on jatkuva välillä $] - 1, 1[$.

Tehtävä 14. Oletetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti. Osoita, että funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

suppenee tasaisesti koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$ ja laske tarkka arvo integraalille

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \right) dx.$$

Tehtävä 15. Oletetaan, että (f_k) on jono funktioita, jotka ovat jatkuvia välillä $[a, b]$. Osoita, että jos jono (f_k) suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ kohti funktiota f , niin funktio f on integroitava välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Tehtävä 16. Esitä ja todista Weierstrassin M-testi.

Vinkkejä perustehtäviin

- Tehtävä 1.** 1. Osoita ensiksi, että raja-funktio on $f(x) \equiv 1$. Osoita sitten, että suppeneminen ei ole tasaista.
2. Tutki suppenemista silloin kun $x = 0$ tai $x \neq 0$. Tasaista suppenemista varten tarkastele rajafunktion jatkuvuutta.
3. Osoita suoraan, että suppeneminen on tasaista. Tutki missä pisteessä funktiojonon funktiot saavuttavat maksiminsa.
4. Kiinnitä muuttuja x sopivasti ja tutki suppeneeko jono tällä arvolla.

Tehtävä 2. Laske aluksi rajafunktio f . Osoita, että jos k on kiinnitetty, niin jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $x_0 \in [0, 1[$, että $1 - \epsilon < x_0^k < 1$. Käytä tätä apunasi pienemmän ylärajan

$$M_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)|$$

laskemisessa.

Tehtävä 3. Käytä teorian lauseita tai keksi sopiva vastaesimerkki.

- Tehtävä 4.** 1. Tutki suppeneeko derivaattafunktioiden jono kaikilla reaaliluvuilla.
2. Käytä apuna integraalilaskennan päälausetta.
3. Voit joko osoittaa, että funktiot todella yhtyvät tai voit käyttää apunasi teoriaa, joka kertoo milloin arvot yhtyvät.

- Tehtävä 5.** 1. Käytä Weierstrassin M-testiä. Huomioi funktiosarjan muoto.
2. Käytä Weierstrassin M-testiä. Huomaa, että nyt kyseessä ei ole potenssisarja, joten integoiminen ja derivoiminen on perusteltava tarkasti joko lausein tai suoraan laskemalla.

Tehtävä 6. Käytä Weierstrassin M-testiä ja tutki osasummien funktioiden jatkuvuutta.

Tehtävä 7. Muodosta sopiva geometrinen sarja.

Tehtävä 8. Käytä teorian osamäärä- tai juuritestejä. Muista tutkia suppenemista välien päätepisteissä erikseen. Kahdessa viimeisessä kohdassa käytä sopivaa sijoitusta.

Tehtävä 9. 1. Käytä osamäärätestiä.

2. Käytä juuritestiiä.

3. Käytä osamäärätestiä.

Tehtävä 10. Muodosta geometrinen sarja derivaattafunktiolle ja suorita integrointi.

Tehtävä 11. Integroi eksponenttifunktion sarjakehitelmää termeittäin. Suorita arviointi Leibnizin lauseen avulla.

Tehtävä 12. Käytä funktion $\ln(1+x)$ tuttua sarjakehitelmää. Huomioi funktion parillisuus integroitaessa.

Vinkkejä vaativampiin tehtäviin

Tehtävä 13. Käytä apuna potenssisarjojen suppenemissäteiden ominaisuuksia. Jälkimmäisessä osassa muotoile sopiva geometrinen sarja osasummille tai sievennä lauseketta sopivasti. Jatkuvuuden voit osoittaa käyttämällä potenssisarjojen ominaisuuksia. Valitse välin mielivaltaisen pisteen ja näytä, että funktio on jatkuva siinä.

Tehtävä 14. Käytä Weierstrassin M-testiä ja suorita integrointi termeittäin.

Tehtävä 15. Arvioi erotusta

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b f_k(x) \, dx \right|$$

sopivasti ylöspäin tasaisen jatkuvuuden perusteella.

Tehtävä 16. Osoita, että

$$\sup_{x \in D} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

arvioimalla termiä

$$\left| \sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|$$

sopivasti ylöspäin.

Perustehtävien ratkaisut

Tehtävä 1. 1. Koska funktio $\cos x$ on jatkuva, niin rajankäynti voidaan viedä funktion sisälle eli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{k} = \cos \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x}{k} \right) = \cos 0 = 1$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siten funktiojono f_k suppenee pisteittäin kohti funktiota $f(x) \equiv 1$. Tasaisesta suppenemista tarkasteltaessa huomataan, että

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \cos \frac{x}{k} - 1 \right| = |-1 - 1| = 2,$$

koska funktio $\cos \frac{x}{k}$ saa arvoja väliltä $[-1, 1]$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Siten suppeneminen ei ole tasaisesta. Tässä esimerkissä jatkuvien funktioden jono suppenee vain pisteittäin kohti jatkuvaa rajafunktiota. Pelkkä pisteittäinen suppeneminen voi siis säilyttää jatkuvuuden, mutta se ei ole varmaa.

2. Selvästi $f_k(0) = 1 \rightarrow 1$. Jos $x \neq 0$, niin

$$\frac{1}{1 + kx^2} \rightarrow 0, \quad \text{kun } k \rightarrow \infty.$$

Siis funktiojono suppenee pisteittäin kohti funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ kun } x = 0 \\ 0 & , \text{ kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Taaskaan suppeneminen ei ole tasaisesta, koska rajafunktio ei ole jatkuva, vaikka jonon funktiot ovat.

3. Selvästi funktiojono suppenee kohti funktiota $f(x) \equiv 0$ kaikilla reaaliluvuilla $x \in \mathbb{R}$. Koska funktiot $f_k(x)$ ovat jatkuvia välillä $[0, 1]$ ne saavuttavat maksiminsa myös tällä välillä. Nyt

$$f'(x) = \frac{(1 + kx^2) + x(2nx)}{(1 + kx^2)^2} = \frac{1 - kx^2}{(1 + kx^2)^2},$$

jolloin derivaatan nollakohta saavutetaan välillä $[0, 1]$ pisteessä $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Siten mahdolliset ääriarvot ovat

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{1 + k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \quad f(1) = \frac{1}{1 + k}$$

ja on helppo nähdä, että maksimiarvo saavutetaan pisteessä $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Siis

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1 + kx^2} \right| = \frac{1}{2\sqrt{k}} \rightarrow 0, \quad \text{kun } k \rightarrow \infty$$

Täten funktiojono suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(x) \equiv 0$, joten samalla todistettiin pisteittäinenkin suppeneminen.

4. Esimerkiksi, kun $x = -\frac{\pi}{2}$, niin $\sin x = -1$. Täten funktiojono ei suppene kohti mitään funktiota, koska jonolla $((-1)^k)$ ei ole raja-arvoa.

Tehtävä 2. Koska $x^k \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$ ja $0 < x < 1$, niin rajafunktio on

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ kun } x = 1 \\ 0 & , \text{ kun } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Osoitetaan tarkasti, että

$$M_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = 1$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Selvästi $1 \geq M_k$ eli luku 1 on eräs ylärajoista.

Tehdään vastaoletus, että $M_{k'} < 1$ eräällä $k' \in \mathbb{Z}_+$. Merkitään $1 - M_{k'} = \epsilon > 0$.

Nyt on olemassa sellainen $x_0 \in [0, 1[$, että

$$1 - \epsilon < x_0^{k'} < 1.$$

Tämä siksi, että funktio $h(x) = x^k$ on jatkuva funktio ja siten se tulee saavuttamaan kaikki arvot väliltä $[0, 1]$. Siis

$$M_{k'} = 1 - \epsilon < x_0^{k'} = |f_{k'}(x_0) - f(x_0)| \leq M,$$

mikä on ristiriita. Täten

$$M_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| = 1 \neq 0$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ ja suppeneminen ei ole tasaista.

- Tehtävä 3.** 1. Väittämä on valhetta, koska funktiojono (f_k) tasaisesta suppenemisesta seuraa pisteittäinen suppeneminen.
2. Väittämä on totta. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Oletuksen perusteella $f_k(x) \rightarrow f(x)$. Koska $(f_k(x))$ on luvun M rajoittama suppeneva jono, niin myös $|f(x)| \leq M$.
3. Väittämä on valhetta. Tarkastellaan funktiojonoa (f_k) , jossa

$$f_k(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } |x| \leq k \\ k, & \text{kun } |x| > k \end{cases}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Selvästi $f_k(x) \rightarrow x$, kun $k \rightarrow \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt jokainen funktio $f_k(x)$ on rajoitettu, mutta rajafunktiota $f(x) = x$ ei ole.

4. Väittämä on valhetta, sillä tarkasteltaessa funktiojonoa (f_k) , jossa

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

niin huomataan että se suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(x) \equiv 0$, joka on jatkuva kaikkialla. Kuitenkaan yksikään funktioista $f_k(x)$ ei ole jatkuva missään määrittämisalueensa pisteessä. Itseasiassa yksikään niistä ei ole edes integroitava millään välillä, vaikka niiden rajafunktio onkin.

- Tehtävä 4.** 1. Koska funktio $\sin(kx)$ on rajoitettu, niin funktiojonon rajafunktiona tulee olemaan funktio $f(x) \equiv 0$. Täten myös $\frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f'(x) = 0$. Kuitenkin

$$f'_k(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(kx)}{k} = \cos kx.$$

Täten jono (f'_k) ei suppene kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Esimerkiksi arvolla $x = \pi$ saadaan, että $f'_k(\pi) = (-1)^k$, joka hajaantuu kun $k \rightarrow \infty$.

Siis $\frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$.

2. Suoraan integroimalla saadaan, että

$$f_k(x) = \int_0^x t^k dt = \left/ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right/ \frac{x^{k+1}}{k+1} \rightarrow 0,$$

kun $k \rightarrow \infty$ kaikilla $0 \leq x \leq 1$. Siis jonon rajafunktio on $f(x) \equiv 0$. Lisäksi

$$\frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{d}{dx} f(x) \equiv 0.$$

Koska funktiot t^k ovat jatkuvia kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, niin integraalilaskennan päälauseen nojalla

$$f'_k(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x t^k dt = x^k \rightarrow \begin{cases} 1 & , \text{ kun } x = 1 \\ 0 & , \text{ kun } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

kun $k \rightarrow \infty$. Täten $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_k(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$.

3. Selvästi kun $x \in [0, \frac{1}{2}]$, niin $f_k(x) \rightarrow f(x)$, missä $f(x) = x$. Lisäksi

$$f'_k(x) = 1 + x^{k-1}.$$

Valitulla välillä $[0, \frac{1}{2}]$ derivaattafunktioiden jono näyttäisi suppenevan tasaisesti kohti funktiota $f'(x) \equiv 1$. Todistetaan tämä tarkasti. Nyt

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f'_k(x) - f'(x)| &= \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |1 + x^{k-1} - 1| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$. Koska derivaattafunktiot olivat lisäksi jatkuvia, niin teorian perusteella

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \frac{d}{dx} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

välillä $[0, \frac{1}{2}]$. Tietenkin olisi voitu todeta tämä tulos suoraankin laskemalla $f'(x)$ ja $f'_k(x)$ ja tutkimalla yhtyykö rajafunktion derivaatta derivaattojen raja-arvoon.

Tehtävä 5. 1. Käytetään Weierstrassin M-testiä. Olkoon $\frac{1}{2} < a < 1$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Jos $x \in [-a, a]$, niin

$$|(-1)^{k+1} x^k| = |x^k| \leq a^k.$$

Geometrisen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ suppenee, koska $a < 1$. M-Testin nojalla sarja suppenee, ja vieläpä tasaisesti. Koska funktiosarja

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k$$

on potenssisarja, niin sitä saa derivoida ja integroida termeittäin suppenemissäteensä sisälle. Koska $\frac{1}{2} < a < 1$ oli mielivaltainen ja arvoilla $x = \pm 1$ sarja hajaantuu, niin sarjan suppenemissäde $R = 1$. Täten väli $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ kuuluu suppenemissäteeseen sisälle ja derivointi ja integrointi termeittäin on luvallista.

2. Vastaavalla päättelyllä kuin edellä ja arviolla

$$\left| \frac{\sin(k^4 x)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}, \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

saadaan, että funktiosarja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^4 x)}{k^2}$ suppenee tasaisesti koko reaaliakselilla. Lisäksi funktiot $\frac{\sin(k^4 x)}{k^2}$ ovat jatkuvia, niin teorian perusteella integrointi termeittäin on sallittu. Kuitenkin koska

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin(k^4 x)}{k^2} = \frac{k^4 \cos(k^4 x)}{k^2} = k^2 \cos(k^4 x),$$

niin derivaattojen jono hajaantuu. Täten termeittäin derivointi ei ole luvallista.

Tehtävä 6. Funktiot $\frac{\sin(k\pi^2 x)}{\pi k^2}$ ovat jatkuvia kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Koska jatkuvien funktioiden äärellinen summa on myös jatkuva, niin sarjan osasummafunktiot $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\pi^2 x)}{\pi k^2}$ ovat myös jatkuvia. Osoitetaan Weierstrassin M-testin nojalla, että funktiosarjan suppeneminen on tasaista. Koska

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(k\pi^2 x)}{\pi k^2} \right| &= \frac{|\sin(k\pi^2 x)|}{|\pi k^2|} \\ &\leq \frac{1}{\pi k^2} \\ &\leq \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $x \in \mathbb{R}$ sekä sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, niin M-testin nojalla funktio-sarja suppenee tasaisesti reaalilukujen joukossa. Tasainen suppeneminen säilyttää jatkuvuuden, joten funktio $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi^2 x)}{\pi k^2}$ on jatkuva.

Tehtävä 7. Kun $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, niin $(\sin x)^2 \in [0, 1[$, joten geometrisen sarjan summana saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\sin x)^{2k} \\ &= 1 + (\sin x)^2 + (\sin x)^4 + \dots = \frac{1}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Tehtävä 8. 1. Koska $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1$, kun $k \rightarrow \infty$, niin osamäärätestin perusteella suppenemissäde on $R = 1$. Kun $x = 1$, niin tarkasteltavana on sarja $\sum_{k=1}^{\infty} k$, joka hajaantuu. Kun $x = -1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$, joka myös hajaantuu. Teorian perusteella funktiosarja suppenee siis täsmälleen, kun $-1 < x < 1$.

2. Nyt $a_k = \frac{1}{k+1}$. Osamäärätestin perusteella suppenemissäde $R = 1$, koska

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2-1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2} \rightarrow 1 - 0 = 1,$$

kun $k \rightarrow \infty$. Tutkitaan vielä suppenemistä päätepisteissä $x = 1$ ja $x = -1$. Kun $x = 1$, niin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i},$$

eli harmoninen sarja, joka tunnetusti hajaantuu. Eli potenssisarja ei sup-pene arvolla $x = 1$. Kuitenkin, kun $x = -1$, niin tuloksena on

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

eli alternoiva harmoninen sarja, joka suppenee Leibnizin lauseen perusteel-la. Täten potenssisarja suppenee täsmälleen silloin, kun $-1 \leq x < 1$.

3. Sijoittamalla $y = x - 2$ saadaan termi samaan muotoon kuin edellisessä kohdassa. Potenssisarja suppenee silloin ja vain silloin, kun $-1 \leq y < 1$ eli $1 \leq x < 3$.
4. Tehdään sijoitus $t = \sin x$, joilloin summa muuttuu normaaliksi potenssisarjaksi ja testejä voidaan soveltaa. Tällöin

$$\sqrt[k]{\frac{2^k}{\pi^k}} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\sqrt[k]{\pi^k}} = \frac{2}{\pi}.$$

Täten suppenemissäde $R = \frac{\pi}{2}$. Koska $t = \sin x \in [-1, 1] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, niin sarja suppenee kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Siten sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 9. 1. Nyt $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$. Täten

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{((k+1)!)^2 (2k)!}{(2k+2)! (k!)^2} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{4k^2 + 6k + 2} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}{4 + \frac{6}{k} + \frac{2}{k^2}} \\ &\rightarrow \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$. Täten suppenemissäde on $R = 4$.

2. Nyt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k} = \sqrt[k]{k} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0,$$

kun $k \rightarrow \infty$. Täten juuritestin perusteella suppenemissäde $R = \infty$ ja siten sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

3. Koska

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{k} = \frac{k+1}{4k} \frac{1}{4} + \frac{1}{4k} \rightarrow \frac{1}{4},$$

niin osamäärätestin perusteella suppenemissäde on $R = 4$.

Tehtävä 10. Huomataan, että derivaattafunktio $f'(x)$ muodostaa geometrisen sarjan summan

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k,$$

missä $|x^2| < 1$ eli $-1 < x < 1$. Koska kyseessä on potenssisarja, niin integrointi voidaan suorittaa termeittäin ja saadaan

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

kun $-1 < x < 1$. Täten $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, missä

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^i}{2i+1}, & \text{kun } k = 2i+1 \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } k = 2i. \end{cases}$$

Derivoidaan saatua potenssisarjaa k kertaa ja sijoitetaan siihen nolla, jolloin

$$f^{(k)}(0) = k!a_k.$$

Nyt $k = 99 = 2 \cdot i + 1$, kun $i = 49$, ja saadaan

$$f^{(99)}(0) = 99!a_{99} = 99! \frac{(-1)^{49}}{99} = -98!$$

Vastaavasti koska $a_{100} = 0$, niin $f^{(100)}(0) = 0$.

Tehtävä 11. Käyttämällä funktion e^t sarjakehitelmää saadaan, että

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

Integroidaan sarja termeittäin ja päädytään muotoon

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{5 \cdot 2!} t^5 - \frac{1}{7 \cdot 3!} t^7 + \dots \right) dt \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2!} x^5 - \frac{1}{7 \cdot 3!} x^7 + \dots \end{aligned}$$

Kyseessä on alternoiva sarja, joten Leibnizin lauseen nojalla virhe on pienempi kuin arvion ensimmäinen pois jätetty termi. Koska

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < \frac{1}{1000}$$

ja $0 \leq x^k \leq 1$, kun $0 \leq x \leq 1$, niin mukaan tarvitsee ottaa vain 5 ensimmäistä termiä. Siis

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 2!}x^5 - \frac{1}{7 \cdot 3!}x^7 + \frac{1}{9 \cdot 4!}x^9.$$

Tehtävä 12. Nyt

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)).$$

Koska funktiolla $\ln(1+x)$ on sarjakehitelmä

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

kun $-1 < x \leq 1$, niin

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

Siis $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots)$, koska osa termeistä kumoaa toisensa. Siis

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Koska kysymys on potenssisarjasta, niin termeittäin derivointi on sallittua. Siis

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

Sama tulos saataisiin myös derivoimalla suoraan funktiota f . Sarjakehitelmän perusteella $f(x) = -f(-x)$ eli funktio on pariton. Siten

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

Vaativampien tehtävien ratkaisut

Tehtävä 13. Oletetaan, että $x = 1$. Tällöin

$$f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

joka suppenee oletuksen perusteella. Täten suppenemissäteän määritelmän perusteella potenssisarjan $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde $R \geq 1$. Täten funktio f on määritelty äärellisenä ainakin arvoilla $x \in]-1, 1]$. Pisteessä $x = -1$ suppeneminen ei ole enää varmaa. Esimerkiksi jos $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, niin $f(-1)$ on harmoninen sarja, joka hajaantuu.

Oletetaan nyt, että $|x| < 1$ ja merkitään $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$. Tällöin geometrisen summan perusteella

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s_k x^k &= a_1 x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^n \\ &= a_1(x + x^2 + \dots + x^n) + a_2(x^2 + x^3 + \dots + x^n) + \dots + a_n x^n \\ &= a_1 x \frac{1 - x^n}{1 - x} + a_2 x^2 \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x} + \dots + a_n x^n \frac{1 - x}{1 - x} \end{aligned}$$

eli

$$(1 - x) \sum_{k=1}^n s_k x^k = a_1 x(1 - x^n) + a_2 x^2(1 - x^{n-1}) + \dots + a_n x^n - a_n x^{n+1}$$

Luvun n annettaessa kasvaa rajatta, niin $(1 - x^k)$ muotoiset termit suppenevat kohti lukua 1 ja $a_n x^{n+1} \rightarrow 0$, joten saadaan väite

$$(1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} s_k x^k = a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = f(x).$$

Toinen tapa osoittaa tämä on laskea suoraan, että

$$\begin{aligned}
 (1-x) \sum_{k=1}^n s_k x^k &= \sum_{k=1}^n s_k x^k - \sum_{k=1}^n s_k x^{k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^n s_k x^k - \sum_{k=2}^{n+1} s_{k-1} x^k \\
 &= s_1 x + \sum_{k=2}^n (s_k - s_{k-1}) x^k - s_n x^{n+1} \\
 &= a_1 x + \sum_{k=2}^n a_k x^k - s_n x^{n+1} \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k x^k - s_n x^{n+1} \\
 &\rightarrow f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 0 = f(x),
 \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Osoittaaksemme, että funktio f on jatkuva välillä $] -1, 1[$, niin valitaan mielivaltainen $|x| < 1$. Merkitään $\epsilon = \frac{1-|x|}{2} > 0$. Nyt $x \in]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset] -1, 1[$ eli väli $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ on suljettu ja rajoitettu väli suppenemissäteen sisällä. Tällöin funktio f on jatkuva tällä välillä ja erityisesti pisteessä x . Koska luku $|x| < 1$ oli valittu mielivaltaiseksi, niin funktio f on potenssisarjana jatkuva koko välillä $] -1, 1[$.

Tehtävä 14. Oletuksen perusteella sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee. Koska

$$|a_k \cos(kx)| = |a_k| |\cos(kx)| \leq |a_k|$$

aina, kun $x \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$, niin funktiosarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$ Weierstrassin M-testin nojalla. Täten integrointi

voidaan viedä summan sisään ja koska a_k on vakio kunkin integraalin sisällä, niin

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \right) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\pi a_k \cos(kx) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^\pi \cos(kx) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{k} (\sin(k\pi) - 0) = 0. \end{aligned}$$

Tehtävä 15. Koska jonon (f_k) funktiot ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja tasainen suppeneminen säilyttää jatkuvuuden, niin myös rajafunktio f on jatkuva välillä $[a, b]$. Funktion jatkuvuudestaan seurasi integroituvuus, joten integraalit

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b f_k(x) dx$$

ovat olemassa. Koska suppeneminen on tasaista, niin $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_k(x)| \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Täten

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_k(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_k(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_k(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_k(x)| (b - a) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $k \rightarrow \infty$ ja näin ollen saadaan jälkimmäinen väite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Tehtävä 16. Olkoon $f_k : D \mapsto \mathbb{R}$ jono funktioita. Oletetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja että

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \text{kaikilla } x \in D \text{ ja } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Kun $x_0 \in D$ on kiinnitetty, niin $(f_k(x_0))$ on normaali reaalin lukujono, joka suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Olkoon funktio $f : D \mapsto \mathbb{R}$ sellainen funktio, että $\sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow f(x)$ kaikilla $x \in D$ ja $n \rightarrow \infty$. Olkoon $n, p \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Tällöin

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k. \end{aligned}$$

Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeni, niin

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$$

kun $p \rightarrow \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Täten joukko $\left| \sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|$ on ylhäältä rajoitettu eli

$$\sup_{x \in D} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|$$

on olemassa ja

$$\sup_{x \in D} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$, sillä $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ on suppenevan sarjan jäännöstermi. Näin ollen suppeneminen on tasaista ja väite on todistettu.