

Sisältö

1	Funktiot	2
1.1	<i>Määritelmä ja peruskäsitteitä</i>	2
1.2	<i>Bijektiivisyys</i>	3
1.3	<i>Käänteisfunktio f^{-1}</i>	4
1.4	<i>Funktioiden monotonisuus</i>	5
1.5	<i>Funktioiden laskutoimitukset ja yhdistetty funktio</i>	6
1.6	<i>Parillisuus</i>	6
1.7	<i>Jaksollisuus</i>	7
1.8	<i>Alkeisfunktioista</i>	7
2	Funktion raja-arvo	9
2.1	<i>Äärettömyys raja-arvoissa</i>	11
3	Funktion jatkuvuus	12
3.1	<i>Jatkuvan funktion ominaisuuksia</i>	13
4	Funktion tasainen jatkuvuus	15
5	Funktion derivaatta	17
5.1	<i>Derivoituvan funktion ominaisuuksia</i>	18
5.2	<i>Derivoimissääntöjä</i>	20
5.3	<i>Derivaatan käyttö funktion kulun arvioinnissa</i>	21
5.4	<i>l'Hospitalin säännöt</i>	22
5.5	<i>Differentioituvuus</i>	24

1 Funktiot

1.1 Määritelmä ja peruskäsitteitä

Funktio f joukolta A joukolle B on sääntö, joka liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ yhden ja vain yhden alkion $y \in B$. Tällöin merkitään $f : A \mapsto B$. Joukkoa A kutsutaan funktion f määrittäjäjoukoksi tai lähtöjoukoksi ja joukkoa B funktion f maalijoukoksi. Funktiota kutsutaan yleisesti myös kuvaukseksi, koska sen voidaan ajatella kuvaavan alkion $x \in A$ alkioksi $y = f(x) \in B$. Vaikka tässä keskitytään tarkastelemaan lähinnä reaalifunktioita $f : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, niin joukkojen A ja B alkioina voi olla muutakin kuin lukuja, vaikkapa toisia joukkoja. Tärkeää on vain, että funktio kuvaa jokaisen määrittäjäjoukon alkion täsmälleen yhdelle maalijoukon alkioille. Huomaa, että funktiossa on kolme osaa, jotka ovat lähtöjoukko, ”sääntö” f ja maalijoukko. Jotta kaksi funktiota olisivat samat, täytyy näiden kolmen osan täsmätä.

Olkoon $f : A \mapsto B$ funktio. Jos $A_0 \subset A$ ja $B_0 \subset B$, niin joukkoa

$$f(A_0) = \{f(x) | x \in A_0\}$$

sanotaan joukon A_0 kuvajoukoksi. Joukko $f(A)$ on funktion f kuvajoukko. Joukkoa

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A | f(x) \in B_0\}$$

kutsutaan joukon B_0 alkukuvaksi. Selvästi $f(A_0) \subset B$ ja $f^{-1}(B_0) \subset A$. Älä sekoita alkukuvan merkintää käänteisfunktioon.

Vastaavasti mikäli $y = f(x)$, niin alkion x kuva on alkio y ja alkion y eräs alkukuva on alkio x . Siis $x \in f^{-1}(\{y\})$.

Jatkossa keskitytään reaalifunktioihin, joiden määrittäjä- ja maalijoukot ovat reaalilukujen joukon osajoukkoja. Lisäksi vakiofunktioita $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = a$, missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio, tullaan merkitsemään lyhyemmin $f(x) \equiv a$.

1.2 Bijektiivisyys

Funktio f on **surjektio**, mikäli $f(A) = B$ eli funktion määrittäjäjoukon kuva on koko maalijoukko. Täten surjektiossa jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu yksi tai useampi alkukuva. Selvästi jokainen funktio $f : A \mapsto f(A)$ on surjektio.

Funktio f on **injektio**, mikäli oletuksesta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $x_1 = x_2$. Niinpä injektiossa jokaisella maalijoukon alkiolla on korkeintaan yksi alkukuva. Injektiivisyyden kanssa yhtäpitävä ehto on se, että väitteestä $x_1 \neq x_2$ seuraa, että $f(x_1) \neq f(x_2)$. Siis eri pisteillä on eri kuvat.

Funktio f on **bijektio**, mikäli se on sekä surjektio että injektio. Siten bijektiossa jokaisella maalijoukon alkiolla on täsmälleen yksi alkukuva. Koska funktio liitti jokaiselle määrittäjäjoukon alkiolle täsmälleen yhden maalijoukon alkion, niin bijektiossa alkiot joukoista A ja B tulevat vastaamaan toisiaan yksi yhteen. Tästä vastaavuudesta tuleekin bijektion englanninkielinen nimitys "one-to-one". Siis jos funktio $f : A \mapsto B$ on injektio, niin funktio $f^* : A \mapsto f(A)$ on bijektio, kun määritellään $f(x) = f^*(x)$ kaikilla $x \in A$. Tarkasti ottaenhan funktiot $f : A \mapsto B$ ja $f^* : A \mapsto f(A)$ ovat eri funktioita, mikäli $f(A) \neq B$.

Mikäli kahden joukon välillä on olemassa bijektio, niin joukoilla sanotaan olevan sama mahtavuus. Mikäli joukot ovat äärellisiä, niin niissä on yhtä monta alkioita. Äärettömillä joukoilla tämä tarkoittaa, että molempien joukkojen äärettömyydet ovat "yhtäsuuret". Luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ kanssa yhtä mahtavia joukkoja sanotaan numeroituviksi. Näitä ovat esimerkiksi kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ja rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$. Kuitenkin reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on joukkoa $\mathbb{N}$ mahtavampi, joten niin kutsuttuja ylinumeroituvia joukkoja on olemassa. Joukkojen mahtuvuutta käsitellään enemmän esimerkiksi topologian kursseilla.

Mikäli funktiosta on annettu vain lauseke, niin yleisenä käytäntönä on, että sen määrittäjäjoukko on suurin mahdollinen joukko, jolla lauseke on määritelty.

1.3 Käänteisfunktio f^{-1}

Jos funktio $f : A \mapsto B$ on bijektio, niin funktion f käänteisfunktio on funktio $f^{-1} : B \mapsto A$ jolle kaikilla $x \in A$ pätee

$$y = f(x) \qquad \text{jos ja vain jos} \qquad x = f^{-1}(y).$$

Määritelmä on mielekäs, sillä käänteisfunktioinkin tulee olemaan bijektio, joten silläkin tulee olemaan käänteisfunktio, joka on tietysti funktio f .

Lause. Jos funktio $f : A \mapsto B$ on bijektio, niin sen käänteisfunktio $f^{-1} : B \mapsto A$ on bijektio.

Funktion f käänteisfunktioita määrittäessä kannattaa noudattaa seuraavia ohjeita.

1. Määrää funktion f määritysjoukko M_f ja kuvajoukko K_f .
2. Ratkaise yhtälöstä $y = f(x)$ muuttuja x funktion arvon y avulla. Mikäli muuttujan x ratkaisu on yksikäsitteinen, niin f^{-1} on olemassa ja $x = f^{-1}(y)$. Kirjoita käänteisfunktion lauseke $f^{-1}(x)$.
3. Osoita edellisten kohtien perusteella, että käänteisfunktion määritysjoukko $M_{f^{-1}}$ on sama kuin funktion f kuvajoukko K_f ja että kuvajoukko $K_{f^{-1}}$ on sama kuin funktion f määritysjoukko M_f .

Jokaisella bijektioilla on käänteisfunktio, mutta voi olla, että sen lausekkeen määrittäminen voi olla hyvin vaikeaa tai mahdotonta. Muuttujan x ratkaisun yksikäsitteisyys tarkoittaa tietenkin sitä, että muuttujalla x on täsmälleen yksi alkukuva. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^2 = y$ ei ole injektio. Tällöin

$$y = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{y}.$$

Täten muuttujalla $x \in \mathbb{R}$ voi olla yksi tai kaksi alkukuvaa $y \in \mathbb{R}$, joten muuttuja x ei ratkea yksikäsitteisesti.

Huomautus. Piste y alkukuva $f^{-1}(y)$ ja käänteisfunktion f^{-1} arvo $f^{-1}(y)$ tässä pisteessä ovat merkinnästä huolimatta eri käsitteitä. Alkukuva on aina määritelty ja se on funktion määritysjoukon eräs osajoukko (myös tyhjä joukko, mikäli

funktio f ei ole surjektio) eli siinä voi olla useampi kuin yksi alkio. Mikäli käänteisfunktio on olemassa, niin sen arvo on eräs lähtöjoukon alkio. Tällöin tietysti alkukuva pitää sisällään vain tämän alkion.

1.4 Funktioiden monotonisuus

Funktio $f : A \mapsto B$ on

- aidosti kasvava, mikäli $f(x_2) > f(x_1)$ aina, kun $x_2 > x_1$
- aidosti vähenevä, mikäli $f(x_2) < f(x_1)$ aina, kun $x_2 > x_1$
- kasvava, mikäli $f(x_2) \geq f(x_1)$ aina, kun $x_2 > x_1$
- vähenevä, mikäli $f(x_2) \leq f(x_1)$ aina, kun $x_2 > x_1$

edellyttäen, että luvut x_1 ja x_2 kuuluvat funktion f määrittäjäjoukkoon A . Selvästi funktion aidosta kasvavuudesta seuraa sen kasvavuus. Kuitenkin esimerkiksi vakiofunktio $f(x) \equiv a$ on kasvava ja vähenevä, muttei aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Funktiota sanotaan aidosti monotoniseksi, mikäli se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Funktio on monotoninen, jos se on kasvava tai vähenevä.

Koska aidosti kasvava tai aidosti vähenevä funktio on injektio, niin rajaamalla kuvajoukko sopivasti saadaan aikaan surjektio, joten käänteisfunktio on olemassa. Lisäksi käänteisfunktio tulee säilyttämään monotonisuuden.

Lause. *Aidosti kasvavalla funktiolla $f : A \mapsto f(A)$ on aidosti kasvava käänteisfunktio $f^{-1} : f(A) \mapsto A$.*

1.5 Funktioiden laskutoimitukset ja yhdistetty funktio

Olkoon $f : A \mapsto B$ ja $g : A \mapsto B$ funktioita. Funktioiden laskutoimitukset määritellään seuraavasti

$$\begin{array}{lll} \text{summa} & (f + g)(x) = f(x) + g(x) & \text{kaikilla } x \in A \\ \text{vähennyslasku} & (f - g)(x) = f(x) - g(x) & \text{kaikilla } x \in A \\ \text{kertolasku} & (fg)(x) = f(x)g(x) & \text{kaikilla } x \in A \\ \text{jakolasku} & \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & \text{kaikilla } x \in A \text{ ja } g(x) \neq 0. \end{array}$$

Olkoon $f : A \mapsto B$ ja $g : C \mapsto D$ funktioita. Jos $D \subset A$, niin funktioiden f ja g yhdistetty funktio $f \circ g : C \mapsto B$ on

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{kaikilla } x \in C.$$

Yleisesti yhdistetyn funktion $f \circ g$ määrittäjäjoukko on

$$\{ x \in C \mid g(x) \in A \}.$$

Esimerkiksi jos $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = -|x|$, niin funktiota $(f \circ g)$ ei ole määritelty, koska funktion g maalijoukossa ja funktion f määrittelyjoukossa ei ole yhtään yhteistä pistettä. Kuitenkin funktio $g \circ f$ on määritelty ja on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -|\ln x| \quad \text{kaikilla } x > 0$$

Yleensä $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, mikäli molemmat funktiot ovat määritellyt.

1.6 Parillisuus

Olkoon $f : A \mapsto \mathbb{R}$ funktio ja lähtöjoukko $A \subset \mathbb{R}$ on symmetrinen origon suhteen. Täten jos $x \in A$, niin $-x \in A$. Funktiota f sanotaan parilliseksi, mikäli

$$f(x) = f(-x) \quad \text{kaikilla } x \in A$$

ja parittomaksi, mikäli

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Lähtöjoukon symmetrisyyden perusteella arvo $f(x)$ on olemassa jos ja vain jos arvo $f(-x)$ on määritelty.

1.7 Jaksollisuus

Funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on jaksollinen, mikäli on olemassa sellainen $T > 0$, että $f(x + T) = f(x)$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Pienintä reaalilukua T , joka toteuttaa edellisen ehdon, sanotaan funktion f perusjaksoksi. Vaikka funktio olisi jaksollinen, niin perusjaksoa ei ole aina olemassa. Esimerkkinä käy vakiofunktio, joka on jaksollinen (jokainen $T > 0$ on jakso), mutta sillä ei ole lyhintä jaksoa.

Yleisemmässä tapauksessa, jossa funktio $f : A \mapsto \mathbb{R}$ ja $A \subset \mathbb{R}$ täytyy lisäksi olettaa, että $x + T \in A$ kaikilla $x \in A$. Esimerkiksi funktio $f(x) = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ on jaksollinen perusjaksolla $T = \pi$.

1.8 Alkeisfunktioista

Polynomifunktiot ovat muotoa $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n \neq 0$. Lukua n sanotaan polynomin asteeksi ja merkitään $\deg P(x) = n$. Polynomifunktiot ovat määriteltyjä koko $\mathbb{R}$:ssä.

Rationaalifunktiot ovat funktioita $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomifunktioita. Rationaalifunktiot eivät ole määritelty nimittäjässä olevan polynomin nollakohdissa.

Muita tavallisia nk. alkeisfunktioita ovat juurifunktiot $\sqrt[n]{x}$, trigonometriset funktiot $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$, näiden käänteisfunktiot $\arcsin x$, $\arccos x$ ja $\arctan x$, eksponenttifunktiot a^x ja logaritmfunktiot $\log_a x$.

Hyperboliset funktiot $\sinh x$ ja $\cosh x$ voidaan määritellä eksponenttifunktion avulla seuraavasti

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{ja} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2 Funktion raja-arvo

Pisteen $x \in \mathbb{R}$ **δ -ympäristö** on joukko $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \delta\}$ ja **aito δ -ympäristö** on joukko $B'(x, \delta) = B(x, \delta) \setminus \{x\}$. Täten δ -ympäristö on väli $]x - \delta, x + \delta[$ eli kaikki ne reaaliluvut, joiden etäisyys luvusta x on pienempi kuin δ . Aito ympäristö on välien $]x - \delta, x[$ ja $]x, x + \delta[$ unioni.

Olkoon funktio f määritelty luvun x_0 eräässä aidossa ympäristössä. Luku a on funktion f **raja-arvo** pisteessä x_0 , jos jokaista positiivista reaalilukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen reaaliluku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ tai $f(x) \rightarrow a$, kun $x \rightarrow x_0$.

Olkoon funktio f määritelty luvun x_0 eräässä vasemman puolisessa aidossa ympäristössä. Luku a on funktion f **vasemmanpuoleinen raja-arvo** pisteessä x_0 , jos jokaista positiivista reaalilukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen reaaliluku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{aina, kun } x_0 - \delta < x < x_0$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ tai $f(x) \rightarrow a$, kun $x \rightarrow x_0^-$.

Olkoon funktio f määritelty luvun x_0 eräässä oikean puolisessa aidossa ympäristössä. Vastaavasti luku a on funktion f **oikeanpuoleinen raja-arvo** pisteessä x_0 , jos jokaista positiivista reaalilukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen reaaliluku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{aina, kun } x_0 < x < x_0 + \delta$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ tai $f(x) \rightarrow a$, kun $x \rightarrow x_0^+$.

Lause. Jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0 , niin se on yksikäsitteinen.

Myöskin vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot ovat yksikäsitteisiä.

Lause. Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 jossakin aidossa ympäristössä.

Tällöin $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ jos ja vain jos $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$

Funktion raja-arvo voitaisiin määritellä myös toisellakin tavalla. Koska seuraavan lauseen ehdot ovat keskenään yhtäpitävät, niin olisi ihan sama kumman ehdon valitsisi määritelmäksi.

Lause. Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 jossakin aidossa ympäristössä $B'(x_0, \delta)$. Tällöin $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ jos ja vain jos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = a$ jokaiselle sellaiselle jonolle $(a_n) \subset B'(x_0, \delta)$, että $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

Edellinen lause tarjoaa erään tavan osoittaa, että funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä x_0 . Tarvitsee vain konstruoida kaksi jonoa (a_n) ja (b_n) , jotka suppenevat kohti lukua x_0 , mutta raja-arvoja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ ei ole olemassa tai ne ovat erisuuret.

Raja-arvojen laskusäännöt noudattavat intuitiota.

Lause. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, niin

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = a + b$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = a - b$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = ab$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = ca$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{a}{b}$, mikäli $b \neq 0$.

Rakkaalla lapsella on monta nimeä ja seuraava tärkeä lause tunnetaan ainakin nimillä puristuslause ja voileipälause.

Puristuslause. Olkoot funktiot f, g, h ovat määriteltyjä ja $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ eräessä pisteen x_0 aidossa ympäristössä. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, niin funktiolla f on raja-arvo pisteessä x_0 ja $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Trigonometristen funktioiden raja-arvojen laskennassa usein tarpeellinen tulos on

Lause.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2.1 Äärettömyys raja-arvoissa

Olkoon funktio f määritelty jollakin välillä $[r, \infty[$. Funktion f raja-arvo on a muuttujan x kasvaessa rajatta, mikäli jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $x_0 \geq r$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{aina, kun } x > x_0$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.

Vastaavasti määritellään funktion f raja-arvo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen x_0 aidossa ympäristössä. Funktion f arvo kasvaa rajatta muuttujan x lähestyessä arvoa x_0 , mikäli jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$f(x) > M \quad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, joka siis tarkoittaa, että raja-arvo hajaantuu sillä tavoin, että funktion arvo kasvaa rajatta, kun lähestytään pistettä x_0 .

Vastaavasti voiaan määritellä raja-arvot $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ tai $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

Olkoon funktio f määritelty jollakin välillä $[r, \infty[$. Funktion f arvo kasvaa rajatta muuttujan x kasvaessa rajatta, mikäli jokaista lukua $M > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $x_0 \in \mathbb{R}$, että

$$f(x) > M \quad \text{aina, kun } x > x_0$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. Tämä siis tarkoittaa, että funktiolle f saadaan mielivaltaisen suuria arvoja, kunhan vain valitaan muuttuja x tarpeeksi suureksi.

Vastaavasti määritellään raja-arvot $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3 Funktion jatkuvuus

Olkoon reaalinen funktio f on määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. Tällöin funktio f on **jatkuva** pisteessä x_0 , mikäli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Toisinsanoen jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{aina, kun } |x - x_0| < \delta.$$

Mikäli raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ei ole olemassa tai se on erisuuri kuin $f(x_0)$ sanotaan, että funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0 ja että piste x_0 on funktion f epäjatkuvuuskohta.

Funktio f on vasemmalta jatkuva pisteessä x_0 , mikäli $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Vastaavasti määritellään funktion oikealta jatkuvuus. Selvästi funktio on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos se sekä vasemmalta että oikealta jatkuva pisteessä x_0 .

Funktio f on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$, mikäli se jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in]a, b[$. Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, mikäli se on jatkuva välillä $]a, b[$, oikealta jatkuva pisteessä a ja vasemmalta jatkuva pisteessä b . Täten siitä, että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ei seuraa sitä, että se olisi jatkuva pisteissä a tai b , vaikka funktio f olisikin määritelty näiden pisteiden joissakin ympäristössä.

Funktio f on jatkuva, mikäli se on jatkuva määritysjoukkonsa kaikissa pisteissä. Toispuolinen jatkuvuus riittää suljetun välin päätepisteissä. Huomaa, että funktion jatkuvuudesta tai epäjatkuvuudesta voidaan puhua vain pisteissä, joissa funktio on määritelty. Täten esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ on jatkuva, koska se on jatkuva jokaisessa määritysjoukkonsa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pisteessä. Pisteessä $x = 0$ ei jatkuvuudesta voida puhua, koska funktiota f ei ole määritelty yhdessäkään pisteen $x = 0$ ympäristössä, mikä oli eräs määritelmän vaatimuksista. Yleisempi määritelmä reaalifunktion jatkuvuudelle esitetään kurssilla Analyysi I. Vielä yleisemmin jatkuvuutta käsitellään topologian kurssilla.

Koska polynomi-, rationaali-, itseisarvo-, eksponentti-, juuri- ja trigonometrinen

funktioiden määrittäjäjoukon pisteiden raja-arvo on sama kuin funktion arvo, niin ne ovat jatkuvia koko määrittäjäjoukossaan. Suoraan raja-arvojen ominaisuuksien perusteella saadaan myös seuraava tulos.

Lause. Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0 , niin

1. funktio $f + g$ on jatkuva pisteessä x_0
2. funktio $f - g$ on jatkuva pisteessä x_0
3. funktio fg on jatkuva pisteessä x_0
4. funktio cf on jatkuva pisteessä x_0 kaikilla $c \in \mathbb{R}$
5. funktio $\frac{f}{g}$ on jatkuva pisteessä x_0 , mikäli $g(x_0) \neq 0$

Lause. Jos funktio f on jatkuva pisteessä x_0 ja funktio g on jatkuva pisteessä $f(x_0)$, niin funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä x_0 .

Jatkuvuus voitaisiin raja-arvojen tapaan määritellä jonojen avulla, sillä seuraava lause antaa yhtäpitävän jatkuvuudelle yhtäpitävän ehdon.

Lause. Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 jossakin ympäristössä $B(x_0, \delta)$. Tällöin funktion f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ jokaiselle sellaiselle jonolle $(a_n) \subset B(x_0, \delta)$, että $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

3.1 Jatkuvan funktion ominaisuuksia

Jatkuvalla funktiolla on seuraavat tärkeät ominaisuudet.

Bolzanon lause. Jos funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ on jatkuva ja luvut $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkisiä, niin on olemassa sellainen luku $x_0 \in]a, b[$, että $f(x_0) = 0$.

Bolzanon lauseen nojalla jatkuva funktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Täten funktio voi vaihtaa merkkiään vain epäjatkuvuus- tai nollakohdissa.

Bolzanon lauseen sovelluksena saadaan

Lause. Jos funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva ja $f(a) \neq f(b)$, niin funktio f käy läpi kaikki arvot lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ väliltä.

Suljetulla välillä jatkuvilla funktioilla on myös omat ominaispiirteensä.

Lause. Jos funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva, niin on olemassa sellainen luku $M \in \mathbb{R}$, että $|f(x)| < M$ kaikilla $x \in [a, b]$ eli funktio f on rajoitettu.

Oletus, että funktio on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ on tärkeä. Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on jatkuva välillä $]0, 1]$, mutta $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$.

Lause. Jos funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva, niin se saa kaikki arvot väliltä $\min f(x)$ ja $\max f(x)$, myös nämä minimi- ja maksimiarvot.

Useasti tätä tulosta käytetään, kun halutaan etsiä funktion arvojen maksimeita ja minimeitä tietyltä väliltä. Oletus, että väli $[a, b]$ on suljettu on äärimmäisen tärkeä. Esimerkiksi funktio $f :]0, 1[\mapsto]0, 1[$, $f(x) = x$ on jatkuva määrittäjäjoukon jokaisessa pisteessä, mutta silti funktio f ei tule saavuttamaan minimi- tai maksimiarvojaan.

Lisäksi voidaan todistaa, että jatkuvuus on ominaisuus, joka säilyy käänteisfunktioille.

Lause. Jos funktio $f : [a, b] \mapsto [c, d]$ on jatkuva bijektio, niin sen käänteisfunktio $f^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]$ on jatkuva bijektio.

Oletus siitä, että funktion määrittäjäjoukko on väli, on välttämätön. Funktio $f :]-\infty, 0] \cup]1, \infty[\mapsto \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

on jatkuva bijektio. Sen käänteisfunktio $f^{-1} : \mathbb{R} \mapsto]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$, missä

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

on bijektio, mutta epäjatkuva pisteessä $x = 0$.

4 Funktion tasainen jatkuvuus

Funktion f jatkuvuus on pisteittäinen ominaisuus. Funktio saattaa esimerkiksi olla jatkuva jokaisessa irrationaalipisteessä, mutta epäjatkuva rationaalipisteissä.

Funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon \quad \text{aina, kun } |x_2 - x_1| < \delta \text{ ja } x_1, x_2 \in I$$

Huomautus. Väli I voi olla millainen reaalilukusuoran väli tahansa. Siis se voi olla muotoa $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ tai $]a, b[$, missä $a < b$. Myöskin tapaukset $a = -\infty$ ja $b = \infty$ ovat mahdollisia.

Mikäli funktio f on tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$, niin suoraan määritelmästä saadaan raja-arvot $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Tästä saadaan seuraava lause:

Lause. Jos funktio $f : A \mapsto \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva välillä $I \subset A$, niin se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in I$.

Täten tasainen jatkuvuus on siis funktion f ja välin I ominaisuus, josta seuraa funktion jatkuvuus välin jokaisessa pistessä. Jatkuvuus välin I jokaisessa pisteessä ei kuitenkaan takaa tasaista jatkuvuutta. Tämän osoittaa funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ välillä $]0, x_0]$, missä $x_0 > 0$. Täten tasainen jatkuvuus on siis pisteittäistä jatkuvuutta tiukempi ehto. Suljetuilla ja rajoitetuilla väleillä tasainen ja pisteittäinen jatkuvuus yhtyvät, kuten seuraava lause näyttää.

Lause. Jos funktio f on jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$, niin se tasaisesti jatkuva välillä $[a, b]$.

Lause. Olkoon I_1 , I_2 ja I välejä, joille pätee $I = I_1 \cup I_2$ ja olkoon $f : I \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin funktio f on tasaisesti jatkuva väleillä I_1 ja I_2 jos ja vain jos se on tasaisesti jatkuva välillä I .

Lause. Jos funktio $f : I \mapsto \mathbb{R}$ toteuttaa eräällä vakion $L > 0$ arvolla nk.

Lipschitz-ehdon

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1| \quad \text{aina, kun } x_1, x_2 \in I,$$

niin funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I .

Jos funktio f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja on olemassa sellainen vakio $L > 0$, että $|f'(x)| < L$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin edellistä lausetta ja väliarvolausetta soveltamalla voidaan osoittaa, että funktio toteuttaa Lipschitz-ehdon ja on täten tasaisesti jatkuva välillä $]a, b[$.

5 Funktion derivaatta

Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 eräässä ympäristössä. Funktio on **derivoituva** pisteessä x_0 , mikäli raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on olemassa. Tällöin $f'(x_0)$ on funktion derivaatan arvo pisteessä x_0 . Merkitsemällä $x = x_0 + h$ saadaan raja-arvolle muoto

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Koska raja-arvo on yksikäsitteinen, niin myöskin derivaatan arvo on yksikäsitteinen. Mikäli funktio f on derivoituva välin $]a, b[$ jokaisessa pisteessä, niin saadaan derivaattafunktio $f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{aina, kun } x \in]a, b[.$$

Mikäli funktio f' on edelleen derivoituva pisteessä $x_0 \in]a, b[$, voidaan määritellä sen derivaatta $f''(x_0)$, jota kutsutaan funktion toisen asteen derivaataksi pisteessä x_0 . Vastaavasti saadaan määriteltyä korkeamman asteen derivaatat, mikäli ne ovat olemassa. Merkintöjä funktion f n :nnen asteen derivaatalle ovat

$$f^{(n)}, \quad \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} f, \quad \text{ja } D^n f.$$

Huomautus. Usein merkintä $(f(x))^n$ lyhennetään muotoon $f^n(x)$, joka saattaa helposti sotkeentua funktion derivaattaa tarkoittavaan merkintään $f^{(n)}(x)$.

Funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 (kun funktio f on määritelty jollain välillä $[x_0, x_0 + \delta[$) on raja-arvo

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Funktion f on oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x_0 (kun funktio f on määritelty jollain välillä $]x_0 - \delta, x_0]$) on raja-arvo

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Raja-arvon ominaisuuksista saadaan suoraan, että

Lause. *Olko funktio f määritelty eräässä pisteen x_0 ympäristössä. Tällöin funktio f on derivoituva pisteessä x_0 ja derivaatan arvo on $f'(x_0) = a$ jos ja vain jos toispuoleiset derivaatat $f'(x_0^+)$ ja $f'(x_0^-)$ pisteessä x_0 ovat olemassa ja*

$$a = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Huomaa, että $f'(x_0^+)$ ei ole sama asia kuin $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$. Koska $f'(x_0^+)$ on erotusosamäärän toispuoleinen raja-arvo, niin se ei vaadi esimerkiksi funktion derivoituvuutta pisteen x_0 ympäristössä. Toisaalta $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ on derivaattafunktion toispuoleinen raja-arvo, joten se vaatii että derivaattafunktio f' on määritelty pisteen x_0 toispuolisessa aidossa ympäristössä. Täten tämä raja-arvo voi olla olemassa, vaikka funktiota f ei ole määritelty pisteessä x_0 , jolloin taasen arvoa $f'(x_0^+)$ ei ole määritelty.

5.1 Derivoituvan funktion ominaisuuksia

Lause. *Jos funktio f on derivoituva pisteessä x_0 , niin se on myös jatkuva pisteessä x_0 .*

Kuten itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ osoittaa pisteessä $x = 0$, niin jatkuvuus ei takaa derivoituvuutta. Täten derivoituvuus on jatkuvuutta tiukempi ehto.

Funktion f jatkuvuus suljetulla välillä $[a, b]$ seuraa derivoituvuudesta avoimella välillä $]a, b[$, kun lisäksi oletetaan, että $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. Täten seuraavissa lauseissa tarvitsisi tarkastella itseasiassa vain funktion f derivoituvuutta välillä $]a, b[$ ja välin päätepisteiden toispuolisia raja-arvoja.

Rollen lause. Olkoon $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]a, b[$. Jos $f(a) = f(b)$, niin on olemassa ainakin yksi sellainen $x_0 \in]a, b[$, että $f'(x_0) = 0$.

Rollen lauseen avulla saadaan erittäin tarpeellinen väliarvolause.

Väliarvolause. Olkoon $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]a, b[$. Tällöin on olemassa ainakin yksi sellainen $x_0 \in]a, b[$, että

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Jatkuvuus välin päätepisteissä on molemmissa lauseissa tarpeellinen oletus. Esimerkiksi käy funktio

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Tällöin $f'(x) = 1$ kaikilla $x \in]0, 1[$, jolloin Rollen lauseen tai väliarvolauseen tulos ei voi pitää paikkaansa.

Cauchyn väliarvolause on edellisen lauseen yleistys, sillä väliarvolause saadaan Cauchyn väliarvolauseesta valitsemalla $g(x) = x$.

Cauchyn väliarvolause. Olkoot $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita, jotka ovat derivoituvia välillä $]a, b[$. Tällöin on olemassa ainakin yksi sellainen $x_0 \in]a, b[$, että

$$f'(x_0)(g(b) - g(a)) = g'(x_0)(f(b) - f(a)).$$

Tämä lauseen tulos on ehkä helpompi muistaa muodossa

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

mutta tällöin pitää olettaa, että $g'(x_0) \neq 0$ ja $g(b) \neq g(a)$.

5.2 Derivoimissääntöjä

Olkoon funktiot f ja g derivoituvia pisteessä $x \in \mathbb{R}$ ja olkoon $k \in \mathbb{R}$ vakio.

1. $Dkf(x) = k Df(x)$
2. $D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$
3. $D(fg)(x) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$
4. $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}$, mikäli $g(x) \neq 0$
5. $Df^n(x) = nf^{n-1}(x)Df(x)$

Ketjusääntö. Jos funktio g on derivoituva pisteessä x_0 ja funktio f on derivoituva pisteessä $g(x_0)$, niin yhdistetty funktio $f \circ g$ on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Käänteisfunktion derivaatta. Olkoon $f : [a, b] \mapsto [c, d]$ jatkuva bijektio, joka on derivoituva välillä $]a, b[$. Jos $x_0 \in]a, b[$ ja $f'(x_0) \neq 0$, niin käänteisfunktio $f^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]$ on derivoituva pisteessä $y_0 = f(x_0) \in]c, d[$ ja

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Yleisempien alkeisfunktioiden derivoimissäännöt ovat

1. $Dx^n = nx^{n-1}$
2. $D \sin x = \cos x$
3. $D \cos x = -\sin x$
4. $D \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
5. $D e^x = e^x$
6. $D \ln x = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$
7. $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $D \arcsin x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

5.3 Derivaatan käyttö funktion kulun arvioinnissa

Oletetaan seuraavassa, että funktio f on määritelty pisteen x_0 ympäristössä.

Piste x_0 on funktion **paikallinen maksimikohta**, mikäli on olemassa sellainen ympäristö $B(x_0, \delta)$, että

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in B(x_0, \delta).$$

Tällöin luku $f(x_0)$ on funktion f paikallinen maksimiarvo.

Piste x_0 on funktion **paikallinen minimikohta**, mikäli on olemassa sellainen ympäristö $B(x_0, \delta)$, että

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{aina, kun } x \in B(x_0, \delta).$$

Tällöin luku $f(x_0)$ on funktion f paikallinen minimiarvo.

Lause. Jos funktio f on derivoituva pisteen x_0 eräässä ympäristössä ja piste x_0 on paikallinen ääriarvokohta, niin $f'(x_0) = 0$.

Kuitenkaan $f'(x_0) = 0$ ei tarkoita sitä, että piste x_0 olisi paikallinen ääriarvokohta. Esimerkiksi funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole paikallisia ääriarvokohtia, vaikka $f'(0) = 0$. Lisäksi funktion ei tarvitse olla derivoituva paikallisessa ääriarvokohdassaan, kuten funktio $f(x) = |x|$ osoittaa.

Pisteitä x_0 , joissa $f'(x_0) = 0$, sanotaan funktion f **kriittisiksi pisteiksi**. Kriittinen piste, joka ei ole paikallinen ääriarvokohta, on satulapiste.

Funktion kulkemisen tutkimisessa yleensä käytetään seuraavia tuloksia

Lause. Jos funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$, niin

1. funktio f on vakio välillä $[a, b]$, mikäli $f'(x_0) = 0$ aina, kun $x_0 \in]a, b[$.
2. funktio f kasvava, mikäli $f'(x_0) \geq 0$ aina, kun $x_0 \in]a, b[$.
3. funktio f aidosti kasvava, mikäli $f'(x_0) > 0$ aina, kun $x_0 \in]a, b[$.
4. funktio f vähenevä, mikäli $f'(x_0) \leq 0$ aina, kun $x_0 \in]a, b[$.

5. *funktio f aidosti vähenevä, mikäli $f'(x_0) < 0$ aina, kun $x_0 \in]a, b[$.*

Kaikki nämä tulokset saadaan väliarvolauseetta soveltamalla. Aidosti kasvavuuden ja aidosti vähenevyyden kriteereita soveltamalla saadaan

Lause. *Jos piste x_0 on funktion f kriittinen piste ja derivaattafunktio $f'(x)$ vaihtaa merkkiään pisteessä x_0 , niin piste x_0 on paikallinen ääriarvokohta.*

5.4 l'Hospitalin säännöt

Cauchyn väliarvolauseen sovellutuksina saadaan niin kutsutut l'Hospitalin säännöt, jotka on nimetty ranskalaisen markiisin G. F. A. l'Hospitalin mukaan. Tulokset keksi kuitenkin Johann Bernoulli, joka myi ne markiisille, jonka mukaan tulokset nyt tunnemme.

Seuraavassa kahdessa lauseessa tarkasteellaan tyyppin $\frac{0}{0}$ raja-arvoja.

Lause. *Olkoot f ja g jatkuvia funktioita, jotka ovat derivoituvia pisteen x_0 eräässä aidossa ympäristössä. Jos $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ja $g(x) \neq 0$ eräässä x_0 aidossa ympäristössä, niin*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ on olemassa äärellisenä.

Edellisestä lauseesta saisi osoitettua myös yleisemmän version, jossa käsiteltäisiin vasemman ja oikeinpuoleisia raja-arvoja.

Lause. *Olkoot f ja g derivoituvia funktioita eräällä välillä $]a, \infty[$, missä $a > 0$. Jos $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ja $g(x) \neq 0$, kun $x > a$, niin*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ on olemassa.

Seuraavassa kahdessa lauseessa tarkasteellaan tyyppin $\frac{\infty}{\infty}$ raja-arvoja.

Lause. Olkoot funktiot f ja g jatkuvia, kun $x \leq x_0$ ja derivoituvia, kun $x < x_0$. Jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \infty,$$

niin

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli oikeanpuolimmainen raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Vastaavalla tavalla lause voidaan muokata tapauksiin, kun $x \rightarrow x_0^+$ tai $x \rightarrow x_0$. Tutkimalla funktiota $-f(x)$ saadaan lause muokattua tapaukseen, jossa funktion arvo vähenee rajatta.

Lause. Olkoon funktiot f ja g derivoituvia välillä $[a, \infty[$, missä $a > 0$. Jos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty,$$

niin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

mikäli oikeanpuolimmainen raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Huomautus. Näppäryydestään huolimatta l'Hospitalin sääntöä tulee käyttää harkiten. Eteenkin lauseiden oletusten voimassa oloon pitää kiinnittää huomiota. Esimerkiksi tapauksessa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$$

l'Hospitalin sääntöä ei voida käyttää, sillä vaikka muut oletukset ovatkin voimassa, niin säännössä oletettiin, että raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ olisi olemassa. Oikea tapauksella olevan raja-arvon laskemiseen on tietenkin käyttää arviota

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0, \quad \text{kun } x \rightarrow \infty.$$

5.5 Differentioituvuus

Olkoon reaalifunktio f määritelty pisteen x_0 jossakin ympäristössä $B(x_0, \delta)$ ja olkoon $0 < |\Delta x_0| < \delta$. Mikäli funktion muuttujaa x_0 muutetaan arvon Δx_0 verran, tulee funktion arvon muutos olemaan

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} \Delta x_0.$$

Jos funktio f on derivoituva pisteessä x_0 voidaan arvioida, muuttujan Δx_0 ollessa riittävän pieni, että

$$\Delta f \approx f'(x_0) \Delta x_0.$$

Tätä arviota käytetään esimerkiksi fysiikassa mittausvirheiden arvioinnissa. Tämä approksimaatio on pohjana myös differentiaalin määritelmälle.

Jos funktio f määritelty pisteen x_0 eräässä ympäristössä ja on olemassa sellainen luku $A \in \mathbb{R}$ ja sellainen funktio $\eta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, että

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \eta(h)h,$$

missä $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$, niin funktio f on differentioituva. Määritelmässä oletetaan lisäksi, että h on niin pieni, että $f(x_0 + h)$ on määritelty.

Huomautus. Funktio η voidaan aina valita siten, että $\eta(0) = 0$, jolloin se saadaan jatkuvaksi origossa.

Koska $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$, niin termi $\eta(h)h$ saadaan mielivaltaisen pieneksi valitsemalla muuttuja h tarpeeksi läheltä origoa. Täten

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) \approx Ah$$

eli differentioituvan funktion f muutosta voidaan approksimoida funktiolla $g(h) = Ah$, joka on suora. Täten differentioituvuutta pisteessä x_0 voidaan ajatella siis funktion approksimoimisena lineaarisella kuvauksella pisteen x_0 ympäristössä (vertaa derivaatan tulkintaan funktion tangentin kulmakertoimena). Täten termi $\eta(h)h$ on virhe, joka arviossa tehdään pisteessä $x_0 + h$.

Toisaalta jakamalla puolittain lauseketta

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \eta(h)h,$$

muuttujalla h saadaan

$$A = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \eta(h) \rightarrow f'(x_0), \quad \text{kun } h \rightarrow 0,$$

mikäli $\eta(h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$.

Täten ei vaikuta enää kovin yllättävältä, että reaalifunktioiden kohdalla differentioituvuus ja derivoituvuus ovat yhdenpitäviä eli kyse on periaatteessa samasta asiasta.

Lause. *Olkoon f reaalifunktio. Tällöin f on derivoituva pisteessä x_0 jos ja vain jos funktio f on differentioituva pisteessä x_0 . Lisäksi jos ehdot ovat tosia, niin $A = f'(x_0)$.*

Funktioille $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ derivoituvuutta ei voida aina määritellä, sillä erotusosamäärän määritelmää ei voi oikein mielekkäästi yleistää vektoreille. Sen sijaan differentioituvuuden käsite on helppo laajentaa vektoriavaruuksien välisille funktioille. Tästä puhutaan enemmän Analyysi II:n kurssilla.