Perustehtävät

Tehtävä 1. Miksi seuraavat esimerkit eivät ole funktioita?

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z},\ f(x) = x$
2. $$f : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1, 2\}\,,\ f(x) = \begin{cases} 2 & \text{kun } x \text{ on parillinen,} \\ 1 & \text{kun } x \text{ on alkuluku,} \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$
3. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$
4. $f \circ g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, missä $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x-1}$ ja
   $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+,\ g(x) = \mathrm{e}^x$
5. $f : \{A \mid A \subset \mathbb{R}\} \mapsto \mathbb{R},\ f(A) = \sup A$

Tehtävä 2. Mitkä ovat seuraavien funktioiden laajin mahdollinen määritysjoukko ja suppein maalijoukko. Voiko funktio tällöin olla bijektio?

1. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
3. $f(x) = \ln(x^2 - 2)$

Tehtävä 3. Mieti miksi käänteisfunktio on mielekästä määritellä vain bijektioille.

Tehtävä 4. Osoita, että funktio $f : \mathbb{Z}_+ \mapsto \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}\,,\ f(n) = n^2$ on bijektio. Täten joukoilla on sama mahtavuus, vaikka $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\} \subset \mathbb{Z}_+$ ja $\mathbb{Z}_+ \not\subset \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$.

Tehtävä 5. Osoita, että seuraavat funktiot ovat bijektioita ja määrää niiden käänteisfunktiot.

1. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{2\}\,,\ f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$
3. $f : \mathbb{R} \mapsto]-1, 1[,\ f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Tehtävä 6. Olkoon funktiot $f : A \mapsto B$ ja $g : B \mapsto C$ bijektioita. Osoita, että funktio $g \circ f : A \mapsto C$ on bijektio ja määrää sen käänteisfuntio.

Tehtävä 7. Mitä voidaan sanoa funktiosta $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, joka on sekä parillinen että pariton.

Tehtävä 8. Mitä voidaan sanoa funktiosta $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, joka on sekä kasvava että vähenevä.

Tehtävä 9. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funktioita. Mitä voidaan sanoa funktiosta $f \circ g$, kun

1. f kasvava ja g vähenevä
2. f vähenevä ja g kasvava
3. f ja g ovat kasvavia
4. f ja g ovat väheneviä.

Tehtävä 10. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ parillinen ja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ pariton. Mitä voit sanot seuraavien funktioiden parillisuudesta?

1. $f \circ g$
2. $f \circ f$
3. $g \circ g$
4. f^2
5. g^2
6. $f + g$
7. fg

Tehtävä 11. Tutki ovatko seuraavat funktiot jaksollisia ja määrää perusjakso.

1. $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{1}{2+\cos(3x)}$, $x \in \mathbb{R}$

Tehtävä 12. Kirjoita raja-arvon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ määritelmä ja selitä miksi ehdossa aina $x \neq a$.

Tehtävä 13. Osoita suoraan määritelmän nojalla, että

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 7$

2. $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x) = -1$

Tehtävä 14. Laske raja-arvot

1. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{5x}$
3. $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1-x}{1-x^2}}$
4. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{1-\cos x}$
6. $\lim_{x\to 1} \ln\left|\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}\right|$

Tehtävä 15. Laske raja-arvot

1. $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{9x^2}$
3. $\lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin x}{(x-2\pi)\cos x}$

Tehtävä 16. Perustele miksi seuraavat funktiot ovat kaikkialla jatkuvia.

1. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 3$
2. $f(x) = \cos(-x)$

Tehtävä 17. Tutki funktioiden jatkuvuutta.

1.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{, kun } x < 2 \\ -x + 1 & \text{, kun } x \geq 2 \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1+ax^2}}{x^2} & \text{, kun } x \neq 0 \\ a & \text{, kun } x = 0 \end{cases}$$

Tehtävä 18. Tutki funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & ,\ x \in \mathbb{Q} \\ -x & ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

jatkuvuutta.

Tehtävä 19. 1. Määrittele, mitä tarkoittaa funktion f jatkuvuus suljetulla välillä.

2. Osoita, että jos funktio f on jatkuva väleillä $[a, b]$ ja $[b, c]$ missä $a < b < c$, niin funktio f on jatkuva pisteessä $x = b$.
3. Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, joka on jatkuva välillä $[0, 1]$, mutta joka ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$.

Tehtävä 20. Funktiota $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$ ei ole määritelty pisteissä $x = \pm 1$. Tutki voidaanko funktiolle f määrätä sellaiset arvot $f(1)$ ja $f(-1)$, että funktio tulisi jatkuviksi näissä pisteissä.

Tehtävä 21. 1. Määrittele funktion tasainen jatkuvuus.

2. Osoita, että mikäli $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ei ole jatkuva funktio, niin seuraava väite on epätosi:

   Jos funktio f on tasaisesti jatkuva väleillä I_1 ja I_2 ja $I = I_1 \cup I_2$, niin funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I.

Tehtävä 22. Johda suoraan määritelmän nojalla kaava $D \sin x = \cos x$ ja todista sen avulla, että $D \cos x = -\sin x$. Käytä sitten osamäärän derivaattaa ja johda funktion $\tan x$ derivaatta.

Tehtävä 23. Derivoi

1. $\frac{(x-1)(x+2)(x+1)^2}{x^2-1}$
2. $x^3 \cos(3x)$
3. $\mathrm{e}^{2\ln(3x)}$
4. $\frac{\sin(3x)}{x^2+2}$
5. x^x, kun $x > 0$
6. $\ln(\ln(x^2 + 1))$

Tehtävä 24. Osoita, että funktiolla $f(x) = 3x + \sin(2x)$ on olemassa käänteisfunktio ja määritä $(f^{-1})'(\frac{3\pi}{2})$.

Tehtävä 25. Johda derivaattafunktiot funktioille $\arcsin x$, $\arccos x$ ja $\arctan x$.

Tehtävä 26. Osoita, että $D \sinh x = \cosh x$ ja $D \cosh x = \sinh x$, missä

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{ja} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Funktiota $\sinh x$ ja $\cosh x$ kutsutaan hyperboliseksi siniksi ja kosiniksi.

Tehtävä 27. Ovatko seuraavat väittämät totta vai valetta?

1. Jos funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0, niin se ei ole derivoituva pisteessä x_0
2. Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin funktio f on kasvaa rajatta.
3. Jos $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$, niin funktio f on rajoitettu.

Tehtävä 28. Osoita väliarvolauseen perusteella, että

$$9 + \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{83}} < 9 + \frac{1}{9}.$$

Tee samanlainen arvio luvulle $\sqrt{88}$.

Tehtävä 29. Osoita väliarvolauseen avulla, että jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva ja $f'(x) > 0$ välillä $]a, b[$, niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.

Tehtävä 30. Oletetaan, että funktio f on derivoituva välillä $]a, b[$ ja $f'(x_0) = 0$ eräällä $x_0 \in]a, b[$. Osoita, että jos $f'(x) > 0$, aina kun $x \in]a, x_0[$ ja $f'(x) < 0$, aina kun $x \in]x_0, b[$, niin funktiolla f on paikallinen maksimi pisteessä x_0.

Tehtävä 31. Mitä Bolzanon lauseen perusteella voidaan sanoa jatkuvasta funktiosta f, jolla ei ole nollakohtia välillä $[a, b]$.

Tehtävä 32. Tutki Bolzanon ja Rollen lauseiden avulla funktion

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

nollakohtien lukumäärää

Tehtävä 33. Tutki funktioiden paikallisia ääriarvoja.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $f(x) = e^x \sin x$

Vaativampia tehtäviä

Tehtävä 34. 1. Osoita, että jos $f : A \mapsto B$ on funktio (ei siis välttämättä bijektio), niin myös $g : B \mapsto P(A)$ on funktio, missä

$$g(b) = f^{-1}(\{b\}) \qquad \text{aina, kun } b \in B.$$

Tässä joukko $P(A)$ on niin sanottu joukon A potenssijoukko

$$P(A) = \{A_0 \mid A_0 \text{ on joukon } A \text{ osajoukko}\} = \{A_0 \mid A_0 \subset A\}.$$

Potenssijoukon alkiot ovat siis joukkoja ja $\emptyset, A \in P(A)$ kaikille joukoille A.

2. Osoita lisäksi, että funktio $f : A \mapsto B$ on bijektio jos ja vain jos joukko $f^{-1}(\{b\})$ sisältää täsmälleen yhden alkion kaikilla $b \in B$.

Tehtävä 35. Osoita, että jos $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, niin

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = a + b$$

Tehtävä 36. Olkoon $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on funktio. Osoita, että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

jos ja vain jos kaikilla jonoilla $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ pätee, että

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$

Tehtävä 37. Olkoon $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funktioita. Osoita, että jos $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, niin

$$\lim_{x \to \infty} f(g(x)) = a.$$

Tehtävä 38. Konstruoi funktio, jonka määrittelyjoukko on koko $\mathbb{R}$, ja jolla on raja-arvo olemassa vain pisteessä $x = 1$.

Tehtävä 39. Todista väliarvolause Rollen lauseen avulla.

Tehtävä 40. Osoita, että jos funktio $f :]a, b[\mapsto f(]a, b[)$ on derivoituva ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in A$, niin funktio f on bijektio.

Tehtävä 41. Olkoon f jatkuva funktio pisteessä x_0. Osoita, että jos $\lim_{x \to x_0} g(x) = a$, niin

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(a).$$

Täten mikäli funktio on jatkuva, niin rajankäynnin saa viedä funktion sisään. Osoita esimerkeillä, että mikäli funktio f ei ole jatkuva pisteessä x_0 ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = a$, niin

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x))$$

ja

$$f(\lim_{x \to x_0} g(x))$$

voivat olla joko yhtäsuuria tai ei.

Tehtävä 42. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

1. Millä parametrin α arvolla funktio f on jatkuva origossa?
2. Millä parametrin α arvolla funktio f on derivoituva origossa?

Vinkkejä perustehtäviin

Tehtävä 1. Tutki täyttyykö funktion ehto, että *jokaisella* lähtöjoukon pisteellä on *yksikäsitteinen* kuvapiste.

Tehtävä 2.
1. Mieti miten lauseke $1+x^2$ käyttäytyy eri muuttujien x arvoilla.
2. Tee sijoitus $y = x + 1$, jolloin funktio muuttuu tutumpaan muotoon.
3. Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 > 0$. Mieti esimerkkiä, joka osottaisi, että funktio ei ole injektio.

Tehtävä 3. Mieti tapauksia, joissa funktio f joko ei ole injektio tai ei ole surjektio. Mieti mikä käänteisfunktion määrittelyssä tällöin menee pieleen.

Tehtävä 4. Osoita funktio injektioksi ja surjektioksi.

Tehtävä 5.
1. Surjektiivisyyden osoittamiseksi oleta, että $y \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen ja osoita, että on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$, että $y = f(x)$. Injektiivisyyteen käytä suoraan määritelmää
2. Oleta, että $y \neq 2$ ja ratkaise yhtälö $y = \frac{1}{x+1} + 2$.
3. Tutki, mitä arvoja funktio f saa, kun $x > 0$, $x < 0$ tai $x = 0$. Injektiivisyyden kohdella huomaa, että funktion arvon etumerkki riippuu täysin funktion osoittajan etumerkistä ja tutki erikseen tapaukset $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ja $f(x) < 0$.

Tehtävä 6. Osoita surjektiivisuus ja injektiivisyys erikseen. Todistus menee suoraan määritelmiä soveltamalla. Käänteisfunktion määräämiseksi huomaa, että funktioilla f ja g on käänteisfunktiot.

Tehtävä 7. Sovella parillisuuden ja parittomuuden määritelmiä suoraan funktioon f. Vertaa arvoja pisteissä x ja $-x$.

Tehtävä 8. Oleta, että $x_2 > x_1$ ja sovella kasvavuuden ja vähenevyyden määritelmiä. Vertaa arvojen $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ keskinäistä suuruutta.

Tehtävä 9. Oleta, että $x_2 > x_1$. Tutki määritelmän avulla arvoja $g(x_2)$ ja $g(x_1)$. Täten joko $g(x_2) \geq g(x_1)$ tai $g(x_2) \leq g(x_1)$. Sovella näihin arvoihin joko kasvavuutta tai vähenevyyttä. Apumerkinnät $y_2 = g(x_2)$ ja $y_1 = g(x_1)$ voivat selkiyttää tilannetta.

Tehtävä 10. Sovella parillisuuden ja parittomuuden määritelmiä. Huomaa, että kaikissa tapauksissa et voi välttämättä sanoa mitään varmaa funktioiden parillisuudesta tai parittomuudesta.

Tehtävä 11.

1. Sievennä funktio yksinkertaisemmaksi. Jakson määrittämisessä käytä apuna trigonometristen funktioiden perusjaksoa.
2. Oleta, että funktiolla olisi jakso ja johda sille ominaisuuksia tarkastelemalla arvoja, joissa funktio saa arvon nolla.
3. Käytä trigonometrisen funktion perusjaksoa apuna.

Tehtävä 12. Tutki ja keksi esimerkkejä millaisissa tapauksissa raja-arvoa ei olisi määritelty, jos ehtoa $x \neq a$ ei ole.

Tehtävä 13. Oleta $\epsilon > 0$ mielivaltaiseksi. Laske mikä luvun $\delta > 0$ täytyy olla luvun ϵ avulla kirjoitettuna, että ehdosta $0 < |x - 2| < \delta$ seuraa, että $|3x + 1 - 7| < \epsilon$. Vastaalla tavalla toisessa kohdassa.

Tehtävä 14.

1. Lavenna termillä $2 + \sqrt{x}$.
2. Muokkaa raja-arvo muotoon $a\frac{\sin y}{y}$, missä y saatu sopivalla sijoituksella.
3. Huomaa, että $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Vie rajankäynti funktion sisälle.
4. Lavenna termillä $\sqrt{x^2 + 1} + x$.
5. Lavenna termillä $1 + \cos x$ ja käytä sopivia trigonometrisiä kaavoja.
6. Huomaa, että $\cos(\frac{\pi}{2}x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)$.

Tehtävä 15.

1. Arvioi funktion itseisarvoa sopivasti ylöspäin.
2. Pyri käyttämään raja-arvoa $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
3. Huomaa sinifunktion jaksollisuus.

Tehtävä 16. Perustele yleisellä tasolla miten funktio on saatu yhdistämällä jatkuvia funktioita.

Tehtävä 17. Tutki miten parametrit pitäisivät valita, että funktion arvo ja raja-arvo yhtyisivät.

Tehtävä 18. Tutki erikseen tapauksia $x = 0$ ja $x \neq 0$. Käytä tehtävää 36 tai todista suoraan määritelmien avulla.

Tehtävä 19. 1. Määritelmä.

2. Käytä hyväksi toispuolista jatkuvuutta välin päätepisteissä.
3. Huomaa, että suljetulla välillä jatkuvan funktion tarvitsee olla vain puolittain jatkuva välin päätepisteessä.

Tehtävä 20. Huomaa, että $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Sievennä funktio sievempään muotoon ja tarkastele raja-arvoja.

Tehtävä 21. Keksi vastaesimerkiksi funktio, joka on epäjatkuva yhdessä pisteessä, mutta joka täyttää muut ehdot.

Tehtävä 22. Osoita, että $\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1}$ ja käytä sitä apuna todistuksessa. Kosinifunktiota derivoitaessa huomaa, että $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Tehtävä 23. 1. Supista osamäärää.

2. Käytä tulon derivaatan kaavaa.
3. Suoraan laskemalla.
4. Käytä osamäärän derivaattaa.
5. Huomaa, että $x^x = \mathrm{e}^{\ln x^x} = \mathrm{e}^{x \ln x}$.
6. Huomioi yhdistetyt funktiot.

Tehtävä 24. Tutki funktion derivaattaa. Huomaa, että $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$.

Tehtävä 25. Rajoita funktiota sopivasti ja sovella käänteisfunktion derivoimislausetta siihen.

Tehtävä 26. Laske suoraan derivoimalla.

Tehtävä 27. 1. Tee vastaoletus.

2. Keksi vastaesimerkki.
3. Keksi vastaesimerkki.

Tehtävä 28. Merkitse $f(x) = \sqrt{x}$ ja arvioi erotusta $f(83) - f(81)$ väliarvolauseen avulla.

Tehtävä 29. Valitse mielivaltainen väli väliltä $[a, b]$ ja sovella väliarvolausetta siihen.

Tehtävä 30. Sovella edellistä tehtävää.

Tehtävä 31. Valitse mielivaltainen väli ja tee vastaoletus.

Tehtävä 32. Laske funktion f derivaattafunktio. Valitse kolme väliä sopivasti, niin että jokaisella on täsmälleen yksi nollakohta ja osoita, että näin on. Osoita, että näiden välien ulkopuolella ei ole nollakohtia.

Tehtävä 33. Laske derivaattafunktiot ja sovella teoriaa niihin.

Vinkkejä vaativimpiin tehtäviin

Tehtävä 34. 1. Mieti miten funktiota voisi luonnehtia.

2. Oleta ensin, että funktio on bijektio ja todista toinen väite. Oleta sitten toinen väite todeksi ja osoista, että bijektiivisyys seuraa siitä.

Tehtävä 35. Saadaan määritelmistä kolmioepäyhtälön avulla.

Tehtävä 36. Suuntaan $\Rightarrow$ valitse mielivaltainen jono ja sovella määritelmiä. Toiseen suuntaan tee vastaoletus ja sen avulla konstruoi jono, joka on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Tehtävä 37. Todistus menee suoraan määritelmien perusteella.

Tehtävä 38. Käytä funktiota $f(x) = x$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Todista, että tämä funktio toteuttaa vaadittavan ehdon. Myös muutkin funktiot voivat toteuttaa tehtävän ehdon.

Tehtävä 39. Tarkastele funktiota $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$. Tai määrittele funktioksi $g(x) = f(x) + Ax + B$ ja valitse vakiot A ja B niin, että Rollen lauseen oletukset ovat voimassa.

Tehtävä 40. Funktion surjektiivisyys on selvä. Osoita injektiivisyys vastaväitteellä.

Tehtävä 41. Ensimmäinen väite todistetaan suoraan määritelmiä soveltamalla. Esimerkkifunktiot voivat olla hyvin yksinkertaisia.

Tehtävä 42. Laske aluksi raja-arvo $\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin x$ luvun α eri arvoilla. Raja-arvoa $\frac{\sin x}{x} \to 1$, kun $x \to 0$ voi käyttää apuna.

Perustehtävien ratkaisut

Tehtävä 1. 1. Kaikille lähtöjoukon alkioille ei ole kuvaa maalijoukossa $\mathbb{Z}$. Esimerkiksi arvoa $f(\pi)$ ei ole määritelty, koska π on irrationaaliluku.

2. Luku 2 on sekä parillinen että alkuluku, joten sen kuva ei ole yksikäsitteinen.
3. Kuvaukselle ei ole määritelty arvoa määritysjoukon pisteessä $x = 0 \in \mathbb{R}$.
4. Funktion g kuvajoukko on $\mathbb{R}_+$, mutta funktiota f ei ole määritelty pisteessä $g(0) = 1$.
5. Koska esimerkiksi $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, mutta reaalilukujen joukolla $\mathbb{R}$ ei ole olemassa yhtään ylärajaa saati pienintä sellaista. Täten arvoa $\sup \mathbb{R}$ ei ole määritelty.

Tehtävä 2. 1. Neliöjuuri on määritelty, kun juurrettava on positiivinen. Koska $1+x^2 \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin funktion laajin mahdollinen määritysjoukko on koko $\mathbb{R}$. Tällä määritysjoukolla funktio tulee samaan arvoja arvosta $\sqrt{1} = 1$ ylöspäin. Täten $f : \mathbb{R} \mapsto [1, \infty[$. Koska

$$f(-1) = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1^2} = f(1),$$

niin funktio f ei ole injektio eikä myöskään bijektio.

2. Koska lukua $\frac{1}{0}$ ei ole määritelty, niin on oltava $x \neq -1$. Merkitsemällä $y = x+1$ funktio tulee muotoon $f(y) = \frac{1}{y}$. Tämä saa kaikki muut reaalilukuarvot lukua 0 lukuunottamatta, joten $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Koska jokaisella nollasta poikkeavalla luvulla on käänteisluku, niin funktio f on surjektio. Funktio on myös injektio, koska jos $f(x_1) = f(x_2)$, niin

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \\ \Rightarrow\ & x_1 + 1 = x_2 + 1 \\ \Rightarrow\ & x_1 = x_2. \end{aligned}$$

3. Logaritmifunktiot, erityisesti luonnollinen logaritmi, on määritelty aidosti positiivisille luvuille. Laajin mahdollinen ratkaisujoukko on siis epäyhtälön

$$x^2 - 2 > 0$$

ratkaisujoukko. Koska $y = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ on ylöspäin aukeava parabeli, niin edellisen epäyhtälön ratkaisujoukko on

$$A =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \infty[.$$

Täten funktion laajin määrittely on $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Funktio ei voi olla bijektio, koska

$$f(-2) = \ln((-2)^2 - 2) = \ln(2^2 - 2) = f(2)$$

eli injektiivisyyden ehto ei täyty.

Tehtävä 3. Mikäli funktio $f : A \mapsto B$ ei ole injektio, niin on olemassa sellaiset alkiot $x_1, x_2 \in A$, että $f(x_1) = f(x_2)$ ja $x_1 \neq x_2$. Täten $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ eli

$$x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y_0\}).$$

Joukossa $f^{-1}(y_0)$ voi tietenkin olla useampiakin kuin kaksi alkiota. Ongelma on se, että käänteiskuvaus ei tulisi olemaan yksikäsitteinen pisteessä $f(x_1) = f(x_2) \in B$, joten se ei olisi funktio.

Mikäli funktio $f : A \mapsto B$ ei ole surjektio, niin on olemassa sellainen alkio $b \in B$, että $f(a) \neq b$ kaikilla $a \in A$. Täten

$$\emptyset = f^{-1}(\{b\}).$$

Käänteiskuvauksella ei ole siis arvoa ollenkaan pisteessä $b \in B$. Mikäli funktio $f : A \mapsto B$ on injektio, mutta ei surjektio, niin maalijoukkoa voidaan voidaan rajata joukoksi $f(A)$. Tällöin funktio $f^* : A \mapsto f(A)$ ($f(x) = f^*(x)$ kaikilla $x \in A$) on bijektio ja käänteisfunktio $f^{-1} : f(A) \mapsto A$ on mielekästä määritellä. Näin menetellään esimerkiksi arcus-funktioita määritettäessä.

Tehtävä 4. Selvästi funktio f on surjektio, sillä jos luku $k \in \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$, niin on olemassa sellainen luku $n_k \in \mathbb{Z}_+$, että $n_k^2 = k$. Täten $f(n_k) = k$.

Funktio on myös injektio, sillä jos $n_1^2 = n_2^2$ ja $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$, niin $n_1 = n_2$. Täten $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$.

Tehtävä 5. 1. Osoitetaan ensiksi surjektiivisyys. Olkoon $y \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Merkitään $y - c = x$. Siis $x \in \mathbb{R}$ ja $y = x + c$ eli $y = f(x)$. Siis $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ eli funktio f on surjektio.

Injektiivisyyden todistamiseksi oletetaan, että $f(x_1) = f(x_2)$. Siis

$$x_1 + c = x_2 + c \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2.$$

Siis funktio f on injektio. Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = x - c$.

2. Olkoon $y \neq 2$. Ratkaistaan yhtälö

$$y = \frac{1}{x+1} + 2 \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x + 1 = \frac{1}{y-2},$$

josta saadaan, että $x = \frac{1}{y-2} - 1$. Täten on olemassa sellainen $x = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, että $y = f(x)$. Siis funktio f on surjektio. Koska saatu x on yksikäsitteinen, niin funktio f on myös injektio. Todetaan injektiivisyys myös suoraan määritelmän avulla. Jos $f(x_1) = f(x_2)$, niin

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1+1} + 2 = \frac{1}{x_2+1} + 2 \\ \Rightarrow\; &\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \\ \Rightarrow\; &x_1 + 1 = x_2 + 1, \end{aligned}$$

joten $x_1 = x_2$. Täten funktio on bijektio ja sillä on käänteisfunktio. Käyttämällä surjektiivisyydessä johdettua kaavaa saadaan, että $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-2} - 1$.

3. Olkoon $y \in]-1, 1[$ mielivaltainen. Jos $y > 0$, niin tutkitaan funktion arvoja muuttujilla $x \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x},$$

missä $\frac{1}{1+x} \in]0, 1[$. Funktio tulee siis saamaan kaikki arvot väliltä $]0, 1[$ (vertaa tehtävä 2). Täten on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}_+$, että $y = f(x)$. Vastaavasti jos $y < 0$, niin tutkitaan arvoja $x \in \mathbb{R}_-$ ja löydetään sellainen muuttujan x arvo, jolla $y = f(x)$. Mikäli $y = 0$, niin $0 = f(0)$. Täten $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$

eli funktio on surjektio. Funktion injektioksi osoittamisessa oletetaan, että $f(x_1) = f(x_2)$. Koska nimittäjä on aina positiivinen, niin funktion arvon etumerkki riippuu vain osoittajan etumerkistä. Jos $f(x_1) = f(x_2) = 0$, niin selvästi $x_1 = x_2 = 0$. Jos $f(x_1) = f(x_2) > 0$, niin $x_1, x_2 > 0$. Siis

$$\begin{aligned}
& \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \frac{1}{1+x_1} = 1 - \frac{1}{1+x_2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1+x_2} \\
\Leftrightarrow\ & x_1 = x_2.
\end{aligned}$$

Vastaavasti tapaus $f(x_1) = f(x_2) < 0$. Täten oletuksesta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $x_1 = x_2$, joten funktio on injektio.

Käänteisfunktion määräämiseksi oletetaan, että $1 > y > 0$. Tällöin aiemman perusteella

$$\begin{aligned}
y &= 1 - \frac{1}{1+x} \\
\Rightarrow \frac{1}{1+x} &= 1 - y \\
\Rightarrow 1 + x &= \frac{1}{1-y}
\end{aligned}$$

eli $x = \frac{1}{1-y} - 1$. Vastaavasti, kun $0 > y > -1$, niin saadaan, että $x = 1 - \frac{1}{1+y}$. Täten käänteisfunktio on $f^{-1} :]-1, 1[\mapsto \mathbb{R}$, missä

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - 1, & \text{kun } 1 > x > 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x}, & \text{kun } 0 > x > -1. \end{cases}$$

Tehtävä 6. Funktio $g \circ f : A \mapsto C$ on surjektio, sillä jos $c \in C$, niin on olemassa sellainen alkio $a \in A$, että $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Näin on, koska funktio g on surjektio, joten on olemassa sellainen $b \in B$, että $g(b) = c$. Koska myös funktio f on surjektio, niin on olemassa sellainen $a \in A$, että $f(a) = b$.

Funktion $g \circ f : A \mapsto C$ injektiivisyyden toteamiseksi oletetaan, että $g(f(a_1)) = gf((a_2))$ ja osoitetaan, että $a_1 = a_2$. Koska funktio g on injektio, niin $f(a_1) = f(a_2)$. Koska funktio f on injektio, niin $a_1 = a_2$.

Koska funktio $g \circ f : A \mapsto C$ on surjektio ja injektio, se on bijektio. Siten on myös olemassa käänteisfunktio $(g \circ f)^{-1} : C \mapsto A$. Koska funktiot f ja g olivat bijektioita, niilläkin on käänteisfunktiot f^{-1} ja g^{-1}. Nyt käyttämällä käänteisfunktioiden määritelmiä saadaan, että

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1}(c) = a \qquad &\Leftrightarrow \qquad c = (g \circ f)(a) = g(f(a)) \\
&\Leftrightarrow \qquad g^{-1}(c) = f(a) \\
&\Leftrightarrow \qquad f^{-1}(g^{-1}(c)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c) = a.
\end{aligned}$$

Siten funktion $g \circ f$ käänteisfunktio on $f^{-1} \circ g^{-1}$. Yksinkertaisemmin sääntö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Tehtävä 7. Oletetaan, että funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on sekä parillinen että pariton. Funktio f toteuttaa siis ominaisuudet

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{ja} \qquad -f(x) = f(-x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siten

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2f(x) = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli $f(x) \equiv 0$. Funktio f on siis nollafunktio.

Tehtävä 8. Jos funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on sekä kasvava että vähenevä, niin ehdosta $x_2 > x_1$ seuraa, että

$$f(x_2) \geq f(x_1) \qquad \text{ja} \qquad f(x_2) \leq f(x_1).$$

Täten $f(x_2) = f(x_1)$. Koska x_2 ja x_1 voidaan valita mielivaltaisesti, niin funktion f täytyy olla vakiofunktio $f(x) \equiv c$.

Tehtävä 9. Oletetaan, että $x_2 > x_1$. Tutkitaan funktion $f \circ g$ arvoja pisteissä x_2 ja x_1. Otetaan käyttöön apumerkinnät $y_2 = g(x_2)$ ja $y_1 = g(x_1)$.

1. Funktio g on vähenevä, joten $g(x_2) \leq g(x_1)$. Siis $y_2 \leq y_1$. Funktion f kasvavuudesta seuraa taas, että $f(y_2) \leq f(y_1)$. Eli täten oletuksesta $x_2 > x_1$ seuraa väite $f(g(x_2)) \leq f(g(x_1))$. Siis funktio $f \circ g$ on vähenevä.
2. Koska funktio g on kasvava, niin $y_2 = g(x_2) \geq g(x_1) = y_1$. Funktion f vähenevyydestä seuraa, että $f(y_2) \leq f(y_1)$. Siten funktio $f \circ g$ on vähenevä.
3. Koska funktio g on kasvava, niin $g(x_2) \geq g(x_1)$. Täten $y_2 \geq y_1$ ja funktion f kasvavuudesta seuraa, että $f(y_2) \geq f(y_1)$. Täten oletuksesta $x_2 > x_1$ seuraa väite $f(g(x_2)) \geq f(g(x_1))$, joten funktio $f \circ g$ on kasvava.
4. Funktio g on vähenevä, joten $y_2 = g(x_2) \leq g(x_1) = y_1$. Funktion f vähenevyydestä seuraa taasen, että $f(y_2) \geq f(y_1)$. Siten väitteestä $x_2 > x_1$ seuraa, että $f(g(x_2)) \geq f(g(x_1))$ eli funktio $f \circ g$ on kasvava.

Tämän tehtävän tulokset on helppo muistaa $\pm$-säännöllä. Jos "+" on kasvava ja "-" on vähenevä, niin

$$\begin{array}{ccccc} h & = & f & \circ & g \\ + & & + & & + \\ + & & - & & - \\ - & & + & & - \\ - & & - & & + \end{array}$$

Tehtävä 10. Olkoon $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ parillinen ja $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ pariton. Täten

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{ja} \qquad -g(x) = g(-x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

1. Nyt
$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$
eli funktio $f \circ g$ on parillinen.
2. Koska $f(f(x)) = f(f(-x))$, niin funktio $f \circ f$ on parillinen.
3. Funktio $g \circ g$ on pariton, koska $g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x))$.
4. Nyt $f(-x)f(-x) = f(x)f(x)$ eli funktio f^2 on parillinen.
5. Funktio g^2 on parillinen, koska $g(-x)g(-x) = (-1) \cdot (-1)g(x)g(x) = g^2(x)$.
6. Parillisuudesta tai parittomuudesta ei voida sanoa mitään tuntematta funktioita tarkemmin. Esimerkiksi $f(x) = x^2$ on parillinen ja $g(x) = x^3$ on pariton funktio. Nyt $(f+g)(1) = 1+1 = 2$ ja $(f+g)(-1) = 1-1 = 0$.
7. Suoraan laskemalla huomataan, että $f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x)$. Siis funktio fg on pariton.

Tehtävä 11. 1. Koska $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin
$$f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|.$$
Koska kosinin perusjakso on 2π, niin on luontevaa olettaa, että funktion f perusjakso olisi π. Nyt sinin parittomuuden ja kosinin parillisuuden perusteella
$$\begin{aligned}|\cos x| &= \left|\sin(\frac{\pi}{2} - x)\right| = \left|-\sin(x - \frac{\pi}{2})\right| \\ &= \left|\sin(x - \frac{\pi}{2})\right| = \left|\cos(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{2}))\right| \\ &= |\cos(\pi - x)| = |\cos(x - \pi)|\end{aligned}$$
Siis luku π on jakso. Oletetaan, että on olemassa $0 < T < \pi$, joka olisi jakso. Täten
$$1 = |\cos 0| = |\cos T|.$$
Siis $\cos T = \pm 1$ eli $T = n\pi$, mikä on ristiriita. Siis luku $T = \pi$ on pienin mahdollinen jakso, eli se on perusjakso.

2. Oletetaan, että $T > 0$ olisi jakso funktiolle $f(x) = \sin x^2$. Tällöin

$$0 = \sin 0 = \sin\left[(0+T)^2\right] = \sin\left[T^2\right].$$

Siis $T^2 = n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, eli $T = \sqrt{n}\sqrt{\pi}$. Lisäksi

$$0 = \sin\left[\sqrt{\pi}^2\right] = \sin\left[(\sqrt{\pi}+T)^2\right] = \sin\left[(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}\sqrt{n})^2\right] = \sin\left[\pi(\sqrt{n}+1)^2\right].$$

eli luvun $(\sqrt{n}+1)^2$ täytyy olla kokonaisluku. Tästä voidaan päätellä, että luku $n = k^2$ eräälle $k \in \mathbb{Z}_+$. Nyt

$$0 = \sin\left[(\sqrt{2}\sqrt{\pi})^2\right] = \sin\left[(\sqrt{2}\sqrt{\pi}+k\sqrt{\pi})^2\right] = \sin\left[\pi(k+\sqrt{2})^2\right]$$

eli luvun $(k+\sqrt{2})^2 = k^2 + 2k\sqrt{2} + 2$ täytyisi olla kokonaisluku, mikä on ristiriita. Täten funktio $f(x) = \sin x^2$ on jaksoton.

3. Koska funktio $\cos(3x)$ on jaksollinen perusjaksolla $T = \frac{2\pi}{3}$, niin tutkitaan onko se funktion $f(x) = \frac{1}{2+\cos(3x)}$ jakso. Nyt jos $x \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen, niin

$$\frac{1}{2+\cos(3(x+\frac{2\pi}{3}))} = \frac{1}{2+\cos(3x+2\pi)} = \frac{1}{2+\cos(3x)}$$

eli $T = \frac{2\pi}{3}$ on funktion f jakso. Jos $0 < L < T$, niin on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että $\cos(3x_0) \neq \cos 3(x_0+L) = \cos(3x_0+3L)$, koska T oli funktion $\cos(3x)$ perusjakso. Täten

$$\frac{1}{2+\cos(3x_0)} \neq \frac{1}{2+\cos(3x_0+L)}$$

eli luku $T = \frac{2\pi}{3}$ on funktio f perusjakso, koska pienempää jaksoa ei ole olemassa.

Tehtävä 12. Määritelmän perusteella $\lim_{x\to a} f(x) = b$, mikäli jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x)-b| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } 0 < |x-a| < \delta.$$

Tässä ehdosta $0 < |x-a|$ seuraa, että $x \neq a$. Ehto mahdollistaa sen, että raja-arvosta voidaan puhua myös silloin, kun funktiota f ei ole määritelty pisteessä a. Esimerkkinä raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Toisaalta ilman vaatimusta $x \neq a$ funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \\ 0, & \text{kun } x \neq 0 \end{cases}$$

ei olisi raja-arvoa origossa. Ehdon takia on mahdollista, että raja-arvo voi olla määritelty myös sellaisissa pisteissä, joissa funktio ei ole jatkuva.

Tehtävä 13. 1. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt

$$|3x+1-7| = 3\,|x-2| < \epsilon$$

aina, kun

$$0 < |x-2| < \frac{\epsilon}{3} \stackrel{merk.}{=} \delta.$$

Siis jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|3x+1-7| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } 0 < |x-2| < \delta.$$

Raja-arvon määritelmän perusteella siis $\lim\limits_{x\to 2} 3x+1 = 7$.

2. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt

$$\left|x^2-2x-(-1)\right| = \left|x^2-2x+1\right| = |x-1|^2 < \epsilon,$$

aina, kun

$$|x-1| < \sqrt{\epsilon} \stackrel{merk.}{=} \delta.$$

Täten raja-arvon määritelmän nojalla $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x) = -1$.

Tehtävä 14. 1. Kun $x \to 4$, niin

$$\frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} = -2-\sqrt{x} \to -4$$

2. Käytetään raja-arvoa $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ apuna. Koska

$$\frac{\sin 7x}{5x} = \frac{7}{5}\frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{5}\frac{\sin y}{y},$$

kun $y = 7x$. Selvästi $y \to 0$, kun $x \to 0$ eli edellä mainittua raja-arvoa voidaan käyttää ja saadaan, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{5x} = \lim_{y\to 0}(\frac{7}{5}\frac{\sin y}{y}) = \frac{7}{5}.$$

3. Koska $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, niin suoraan laskemalla saadaan, että

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1-x}{1-x^2}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}.$$

Koska eksponenttifunktio on jatkuva, rajankäynti voidaan viedä funktion sisälle. Siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1-x}{1-x^2}} &= \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x}} \\ &= \mathrm{e}^0 = 1.\end{aligned}$$

4. Laventamalla termillä $\sqrt{x^2+1} + x$ päästään kätevämpään muotoon

$$x(\sqrt{x^2+1} - x) = x\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x}.$$

Koska muuttuja x kasvaa rajatta, niin voidaan olettaa, että $|x| = x$. Täten

$$x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1} \to \frac{1}{2},$$

kun $x \to \infty$.

5. Käytetään trigonometristä kaavaa $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ ja lavennetaan termillä $1 + \cos x$. Täten

$$\frac{1-\cos(2x)}{1-\cos x} = \frac{(2\sin^2 x)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{(2\sin^2 x)(1+\cos x)}{\sin^2 x} = 2 + 2\cos x \to 4,$$

kun $x \to 0$.

6. Logaritmi- ja itseisarvofunktiot ovat jatkuvia, joten raja-arvo voidaan viedä funktion sisälle. Koska $\cos(\frac{\pi}{2}x) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x)$, niin

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{x-1} = -\frac{\pi}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)} \to -\frac{\pi}{2}$$

missä $\frac{\pi}{2}(1-x) \to 0$, kun $x \to 1$. Niinpä

$$\lim_{x\to 1} \ln\left|\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}\right| = \ln\left|-\frac{\pi}{2}\right| = \ln\frac{\pi}{2}.$$

Tehtävä 15. 1. Koska $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, niin

$$0 \leq \left|x^2\sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \to 0,$$

kun $x \to 0$. Siis $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$.

2. Tehdään sijoitus $y = 4x^2$. Tällöin $9x^2 = \frac{9}{4}y$. Myöskin $y \to 0$, kun $x \to 0$. Niinpä

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x^2}{9x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{4}{9}\frac{\sin y}{y} = \frac{4}{9}.$$

3. Sinifunktion jaksollisuuden perusteella $\sin x = \sin(x-2\pi)$. Täten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin x}{(x-2\pi)\cos x} &= \lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin(x-2\pi)}{(x-2\pi)\cos x}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y\cos(y+2\pi)} = 1.\end{aligned}$$

Tehtävä 16. 1. Raja-arvon ominaisuuksien perusteella

- potenssifunktiot ovat jatkuvia,
- vakiolla kerrottu jatkuva funktio on jatkuva ja
- jatkuvien funktioiden summafunktio on jatkuva.

Täten kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia, koska ne saadaan summaamalla äärellinen määrä vakiolla kerrottuja muuttujan x eri potensseja.

2. Funktiot $\cos x$ ja $-x$ ovat jatkuvia. Täten myös niiden yhdistetty funktio on jatkuva.

Tehtävä 17. 1. Kun $x \neq 2$, on jatkuvuus selvää. Koska

$$\lim_{x \to 2^+} x^2 + a = 2^2 + a = 4 + a,$$

niin funktio f on jatkuva pisteessä $x = 2$ jos ja vain jos $4+a = f(2) = -2+1$ eli $a = -5$. Tämä riittää koska $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$.

2. Kun $1 + ax^2 \geq 0$ (neliöjuuren määritysjoukko) ja $x \neq 0$, on jatkuvuus selvää. Laventamalla termillä $1 + \sqrt{1 + ax^2}$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{1 + ax^2}}{x^2} &= \frac{1^2 - 1 - ax^2}{x^2(1 + \sqrt{1 + ax^2})} \\ &= \frac{-a}{1 + \sqrt{1 + ax^2}} \\ &\to \frac{-a}{1 + 1} = \frac{-a}{2}, \end{aligned}$$

kun $x \to 0$. Täten funktio on jatkuva pisteessä $x = 0$ jos ja vain jos $\frac{-a}{2} = f(0) = a$ eli $a = 0$. Tällöin $f(x) \equiv 0$.

Tehtävä 18. Osoitetaan, että funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 = 0$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin

$$|f(x) - f(0)| = |x - 0| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } |x - 0| < \epsilon = \delta,$$

joten suoraan määritelmän nojalla funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 = 0$.

Käytetään tehtävää 36. Oletetaan, että $x_0 \neq 0$ ja valitaan kaksi sellaista jonoa $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ ja $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, että ne suppenevat kohti lukua x_0. Valinta voidaan tehdä, koska luvun x_0 jokaisessa aidossa ympäristössä on sekä rationaali- että irrationaalipisteitä. Nyt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \neq -x_0 = \lim_{n \to \infty} -y_n = \lim_{n \to \infty} f(y_n).$$

eli funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $x_0 \neq 0$. Siten se ei myöskään voi olla jatkuva tässä pisteessä.

Epäjatkuvuus voidaan osoittaa myös hieman hankalemmin ilman tehtävää 36. Tehdään vastaoletus, että f olisi jatkuva eräässä pisteessä $x_0 \neq 0$. Tällöin myös lukua $\epsilon = \frac{|x_0|}{2} > 0$ kohti on olemassa luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{|x_0|}{2} \qquad \text{aina, kun } |x - x_0| < \delta.$$

Koska jokaiselta väliltä löytyy sekä rationaalilukuja että irrationaalilukuja voidaan valita sellainen luku x, jolle $|x - x_0| < \delta$, että luvuilla $f(x_0)$ ja $f(x)$ on eri merkki. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| \geq |f(x_0)| = |x_0|\,,$$

mikä on ristiriita vastaoletuksen kanssa.

Tehtävä 19. 1. Funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, mikäli se on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$ ja

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

2. Koska funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Koska funktio f on jatkuva välillä $[b, c]$, niin $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$. Täten raja-arvo $\lim_{x \to b} f(x)$ on olemassa ja on yhtäsuuri kuin $f(b)$. Siis funktio f on jatkuva pisteessä $x = b$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Nyt funktio f on jatkuva välillä $[0, 1]$, sillä $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$. Kuitenkaan funktio f ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, sillä $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$. Täten kannattaa huomioida, jatkuvuus suljetulla välillä ei välttämättä tarkoita, että funktio olisi jatkuva välin päätepisteissä.

Tehtävä 20. Koska

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1},$$

kun $x \neq \pm 1$. Antamalla $x \to 1$ saadaan $1 - \frac{1}{x+1} \to \frac{1}{2}$. Täten määrittelemällä $f(1) = \frac{1}{2}$ funktio tulee jatkuvaksi pisteessä $x = 1$. Lisäksi $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ ja $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$. Näin raja-arvoa $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ei ole olemassa, joten funktiota ei voida saada jatkuvaksi pisteessä $x = -1$.

Tehtävä 21. 1. Funktio f on tasaisesti jatkuva välillä I, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } |x_1 - x_2| < \delta \text{ ja } x_1, x_2 \in I.$$

2. Olkoon funktio $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{kun } x \in]1, 2]. \end{cases}$$

Tällöin funktio f ei jatkuva pisteessä $x = 1$, koska $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Se on tasaisesti jatkuva väleillä $[0, 1[$ ja $[1, 2]$. Koska f ei ole jatkuva välin $[0, 2]$ jokaisessa pisteessa, niin se ei myöskään ole tasaisesti jatkuva tällä välillä.

Tehtävä 22. Tarkastellaan erotusosamäärää mielivaltaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cos x \end{aligned}$$

Koska $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ ja

$$\begin{aligned} \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \to -1 \cdot 0, \end{aligned}$$

niin

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x.$$

Koska piste $x\in\mathbb{R}$ on mielivaltainen, niin $D\sin x=\cos x$.

Lasketaan $D\cos x$. Käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimissääntöä ja trigonometrisiä kaavoja saadaan, että

$$D\cos x = D\sin(\frac{\pi}{2}-x) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin x$$

Koska funktion $\cos x$ nollakohdat ovat samat kuin pisteet, joissa funktiota $\tan x$ ei ole määritelty, niin osamäärän derivoimissääntöjen nojalla

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x D\sin x - \sin x D\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Toisaalta

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x,$$

joten $D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$.

Tehtävä 23. Kaikki funktiot ovat derivoituvia määritysjoukoissaan, koska ne on saatu derivoituvia funktioita yhdistelemällä.

1. Funktiota ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa. Koska $x^2-1=(x-1)(x+1)$, niin kyseiset nollakohdat ovat $x=\pm 1$. Tehtävä helpottuu huomattavasti huomattaessa, että termi$(x+1)(x-1)$ voisaan supistaa pois. Siis saadaan, että

$$\begin{aligned} D\frac{(x-1)(x+2)(x+1)^2}{x^2-1} &= D(x+2)(x+1) \\ &= (x+2)D(x+1)+(x+1)D(x+2) \\ &= x+2+x+1 = 2x+3, \end{aligned}$$

kun $x\neq\pm 1$, jotka olivat funktion nimittäjän nollakohdat.

2. Suoraan tulon derivaatan kaavaa soveltamalla saadaan, että

$$\begin{aligned} Dx^3\cos(3x) &= \cos(3x)Dx^3 + x^3D\cos(3x) \\ &= 3x^2\cos(3x) - 3x^3\sin(3x). \end{aligned}$$

3. Yhdistetyn funktion derivoinnin perusteella

$$De^{2\ln(3x)} = e^{2\ln(3x)}\cdot D2\ln(3x) = \frac{6e^{2\ln(3x)}}{3x}.$$

4. Osamäärän derivoinnin kaava antaa, että

$$\begin{aligned} D\frac{\sin(3x)}{x^2+2} &= \frac{(x^2+2)D\sin(3x) - \sin(3x)D(x^2+2)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{3(x^2+2)\cos(3x) - (2x)\sin(3x)}{(x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

5. Oletetaan, että $x > 0$. Tällöin $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$. Siis

$$\begin{aligned} Dx^x &= De^{x\ln x} \\ &= e^{x\ln x}\cdot D(x\ln x) \\ &= e^{x\ln x}\cdot(\ln x + \frac{x}{x}) \\ &= x^x(\ln x + 1). \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} D\ln(\ln(x^2+1)) &= \frac{D\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{\ln(x^2+1)}\cdot\frac{D(x^2+1)}{(x^2+1)} \\ &= \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Tehtävä 24. Selvästi funktio f on derivoituva ja jatkuva kaikissa pisteissä $x \in \mathbb{R}$. Sen derivaattafunktio on

$$f'(x) = D(3x) + D\sin(2x) = 3 + \cos(2x)\cdot D(2x) = 3 + 2\cos(2x).$$

Koska funktio $\cos x$ saa vain arvoja väliltä $[-1,1]$, niin $f'(x) > 0$, joten funktio f on aidosti kasvava. Aidosti kasvava funktio on myös bijektio, kun maalijoukoksi valitaan kuvajoukko, joten käänteisfunktio f^{-1} on olemassa. Yhtälöllä $f(x) = \frac{3\pi}{2}$ on olemassa vain yksi ratkaisu, koska funktio f oli aidosti kasvava. Sen voi löytää huomaamalla, että

$$f(\frac{\pi}{2}) = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \sin\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Käänteisfunktion derivaatan lauseen ehdot pätevät missä tahansa pisteen $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ympäristössä, joten kaavaa

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

voidaan soveltaa. Tällöin pisteessä $y_0 = \frac{3\pi}{2}$ saadaan

$$(f^{-1})'(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{3 + 2\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{3-2} = 1.$$

Tehtävä 25. Olkoon $f(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja $y = \sin x$. Funktio $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1,1]$ on jatkuva bijektio. Se on myös derivoituva ja derivaattifunktio $f'(x) = \cos x \neq 0$ välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, joten käänteisfunktion derivaataan lauseketta voidaan soveltaa. Täten sinin käänteisfunktio $\arcsin y$ on derivoituva kaikissa pisteissä $y \in]-1,1[$ ja

$$D \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Kaavan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ perusteella $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Koska $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, niin itseisarvo voidaan poistaa, sillä funktio $\cos x$ saa tällä välillä vain positiivisia arvoja. Sijoittamalla tämä saadaan

$$D \arcsin y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Siis $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ kaikilla $x \in]-1,1[$

Vastaavasti johdetaan, että $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Tosin tarkasteltavaksi väliksi valitaan nyt $[0,\pi]$. Miinusmerkki seuraa siitä, että $D \cos x = -\sin x$.

Olkoon $f(x) = \tan x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ja $y = \tan x$. Funktio f on jatkuva ja derivoituva bijektio kaikilla väleillä $[a,b] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Lisäksi derivaattafunktio $D \tan x = 1 + \tan^2 x \neq 0$. Täten käänteisfunktion derivaatan lausetta voidaan soveltaa ja saadaan, että

$$D \arctan y = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Siis on johdettu, että $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

Tehtävä 26. Koska $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, niin

$$D \sinh x = D\frac{e^x - e^{-x}}{2} = D\frac{e^x}{2} - D\frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Väite $D \cosh x = \sinh x$ todistetaan vastaavasti.

Tehtävä 27.

1. Oletetaan, että pisteessä x_0 epäjatkuva funktio olisi derivoituva pisteessä x_0. Koska derivoituvuudesta seuraa funktion jatkuvuus, niin funktio on myös jatkuva pisteessä x_0, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Täten väite on tosi.
2. Esimerkiksi funktio $f(x) = \arctan x$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva ja $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Täten
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio $f(x) = \arctan x$ on kuitenkin rajoitettu, sillä $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$. Väite on siis epätosi.
3. Funktio $f(x) = \ln x$ ei ole rajoittu, vaikka $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \frac{1}{x} = 0$. Väite on siis epätosi.

Tehtävä 28. Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$. Se on jatkuva kaikilla väleillä $[a,b]$ ja derivoituva väleillä $]a,b[$, missä $0 \leq a < b$. Koska $9^2 = 81$, niin $\sqrt{83} - 9 \geq 0$. Koska $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, niin väliarvolauseen perusteella on olemassa sellainen $x_0 \in]81, 83[$, että

$$f(83) - f(81) = \sqrt{83} - 9 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(83-81) = \frac{1}{\sqrt{x_0}}.$$

Koska $x_0 \in]81, 83[$, niin

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{\sqrt{100}} < \frac{1}{\sqrt{x_0}} < \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}.$$

Yhdistämällä tulos $\sqrt{83} = 9 + \frac{1}{\sqrt{x_0}}$ muihin päättelyihin saadaan

$$9 + \frac{1}{10} < \sqrt{83} < 9 + \frac{1}{9}.$$

Vastaavasti on olemassa sellainen luku $x_0 \in]81, 88[$, että

$$\sqrt{88} - 9 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(88 - 81) = \frac{7}{2\sqrt{x_0}}.$$

Lisäksi

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{10} < \frac{7}{2\sqrt{x_0}} < \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{9}.$$

Täten

$$9 + \frac{7}{20} < \sqrt{88} < 9 + \frac{7}{18}.$$

Tehtävä 29. Määritelmän perusteella pitää osoittaa, että $f(x_2) > f(x_1)$ kaikilla $x_1, x_2 \in [a, b]$ ja $x_2 > x_1$. Oletetaan siis, että $a \leq x_1 < x_1 \leq b$ ovat mielivaltaisia. Väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen piste $x \in]x_1, x_2[$, että

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$$

Oletuksien perusteella $f'(x) > 0$ ja $x_2 - x_1 > 0$, joten $f(x_2) > f(x_1)$.

Tehtävä 30. Osoitetaan, että jos $x \in]a, x_0[$ on mielivaltainen, niin $f(x) \geq f(x_0)$. Tehtävän 29 oletukset pätevät välillä $[a, x_0]$, joten funktio f on aidosti kasvava tällä välillä. Siten $f(x) < f(x_0)$. Koska x oli mielivaltainen, niin väite pätee kaikilla $x \in]a, x_0[$. Vastaavasti näytetään, jos $x \in]x_0, b[$, niin $f(x) < f(x_0)$. Siis funktiolla f on paikallinen maksimi on pisteessä x_0.

Tehtävä 31. Oletuksen perusteella ei ole olemassa sellaista pistettä $x_0 \in [a, b]$, että $f(x_0) = 0$. Mikäli luvut $f(a)$ ja $f(b)$ olisivat erimerkkisiä, niin Bolzanon lausetta voitaisiin soveltaa ja olisi olemassa oletuksen kieltämä piste. Täten luvut $f(a)$ ja $f(b)$ ovat samanmerkkiset. Koska vastaava päättely voidaan tehdä kaikille luvuille a_1 ja b_1, joille $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, niin funktio f ei voi vaihtaa merkkiään. Täten saadaan selvältä kuulostava tulos, että jatkuva funktio vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan (tosin sen ei ole pakko vaihtaa merkkiään tällöin, kuten esimerkki $f(x) = x^2$ osoittaa).

Tehtävä 32. 1. Lasketaan funktion f derivaattafunktio $f'(x) = 3x^2 - 3$. Näin ollen $f'(x) = 0$ täsmälleen silloin, kun $x = 1$ tai $x = -1$. Funktion arvoja laskemalla huomataan, että $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$. Koska funktio f on jatkuva välillä $[-1, 1]$ ja funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkisiä, niin Bolzanon lausetta voidaan soveltaa ja välillä $[-1, 1]$ on ainakin yksi funktion f nollakohta. Rollen lauseen nojalla tällä välillä ei voi olla useampia nollakohtia, sillä jos näin olisi, niin välillä $]-1, 1[$ olivien funktion f nollakohtien välissä olisi eräs derivaatan nollakohta, mikä on ristiriita. Koska $f(-3) = -17$ ja $f(3) = 19$, niin vastaavasti voidaan osoittaa, että väleillä $[-3, -1]$ ja $[1, 3]$ on täsmälleen yksi nollakohta kummassakin. Täten funktiolla f on ainakin 3 nollakohtaa.

Osoitetaan lisäksi että jos $a < -3$, niin funktiolla f ei ole nollakohtia välillä $[a, -3]$. Oletetaan, että tällä välillä olisi eräs nollakohta x_0. Tällöin $f(x_0) = f(x_1) = 0$, missä x_1 on välillä $[-3, -1]$ sijaitseva nollakohta. Koska funktio f on derivoituva välillä $]a, -1[$, niin Rollen lauseen perusteella derivaattafunktiolla olisi eräs nollakohta tällä avoimella välillä. Tämä on ristiriita, joten funktiolla f ei ole nollakohtia $x_0 < -3$. Vastaavasti tapaus $x_0 > 3$. Täten funktiolla f on täsmälleen 3 nollakohtaa.

Tehtävä 33. 1. Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Polynomifunktiona se on derivoituva ja jatkuva jokaisessa pisteessä. Sen derivaattafunktio on $f'(x) = 2x - 4$. Täten $f'(x) = 0$ jos ja vain jos $x = 2$. Koska derivaattafunktion merkki vaihtuu kriittisessä pisteessä $x = 2$, niin se on paikallinen ääriarvopiste.

2. Funktio f on jatkuvien funktioiden yhdistelmänä derivoituva ja jatkuva koko määritysalueessaan $\mathbb{R}$. Nyt $f'(x) = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x$. Koska $\mathrm{e}^x > 0$, niin derivaattafunktion nollakohdat määräytyvät yhtälön $\sin x + \cos x = 0$ perusteella. Täten

$$\sin x = -\cos x = -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$$

eli $x = x - \frac{\pi}{2} + n2\pi$ tai $x = \pi - x + \frac{\pi}{2} + n2\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Siis $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$. Osoitetaan lisäksi, että derivaattafunktio vaihtaa merkkiään näissä pisteissä. Derivaattafunktio on jatkuva kaikkialla ja sen merkki riippuu vain funktion $g(x) = \sin x + \cos x$ merkistä. Koska $g(n2\pi) = 0 + 1 = 1$ ja $g(\pi + n2\pi) = 0 - 1 = -1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ eli $g(n\pi) = (-1)^n$. Huomaamalla, että $\frac{3\pi}{4} + n\pi \in [n\pi, (n+1)\pi]$ voidaan päätellä jatkuvuuden perusteella, että derivaattafunktio vaihtaa merkkinsä nollakohdissaan.
Täten funktion f paikalliset ääriarvot ovat pisteet $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Vaativampien tehtävien ratkaisut

Tehtävä 34. 1. Koska joukko $P(A)$ on kokoelma joukon A osajoukkoja, niin jokaisella $b \in B$

$$f^{-1}(\{b\}) \subset A$$

funktion $f : A \mapsto B$ määritelmän perusteella. Tämä pätee silloinkin, kun alkiolla $b \in B$ ei ole alkukuvaa. Tällöin

$$f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \in P(A).$$

Jokaista pistettä $b \in B$ vastaa siis yksikäsitteinen "kuvapiste" eli potenssijoukon alkio, joka on pisteen b alkukuva.

2. Oletetaan ensiksi, että funktio f on bijektio. Silloin funktio f on sekä surjektio että injektio. Surjektiivisyys tarkoittaa, että

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = B$$

eli jokaista alkiota $b \in B$ kohti on olemassa ainakin yksi sellainen $a \in A$, että $f(a) = b$. Siis

$$f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset.$$

Oletetaan sitten, että $x_1 \in f^{-1}(\{b\})$ ja $x_2 \in f^{-1}(\{b\})$. Tämä oletus on luvallista tehdä, koska äsken joukko $f^{-1}(\{b\})$ todistettiin epätyhjäksi. Tällöin $f(x_1) = f(x_2) = b$ alkukuvien määritelmien perusteella. Koska f oli injektio, niin $x_1 = x_2$. Täten joukossa $f^{-1}(\{b\})$ on täsmälleen yksi alkio. Toiseen suuntaan todistettaessa oletetaan, että joukossa $f^{-1}(\{b\})$ on täsmälleen yksi alkio kaikilla $b \in B$. Siis jokaista $b \in B$ kohti on olemassa sellainen alkio $a \in A$, että

$$\{a\} = f^{-1}(\{b\}) = \{x \in A \mid f(x) = b\}.$$

Siis $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = B$ eli funktio f on surjektio. Oletetaan, että $f(a_1) = f(a_2) = b$. Tällöin $a_1, a_2 \in f^{-1}(\{b\})$. Koska alkukuvien joukossa oli vain yksi alkio, niin $a_1 = a_2$, joten funktio f on injektio.

Tehtävä 35. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Suoraan raja-arvojen $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ määritelmistä saadaan, että on olemassa sellaiset luvut $\delta_a > 0$ ja $\delta_b > 0$, että

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta_a$$

ja

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta_b.$$

Valitaan $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$. Nyt jos $0 < |x - x_0| < \delta$, niin

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{ja} \qquad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan, että

$$|f(x) + g(x) - a - b| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = a + b$.

Tehtävä 36. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Osoitetaan ensiksi väite suuntaan " $\Rightarrow$ ". Oletetaan, että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Otetaan mielivaltainen jono $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, joka suppenee kohti lukua x_0. Täten myös lukua $\delta > 0$ varten on olemassa sellainen luku $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \qquad \text{aina, kun } n \geq n_0.$$

Nyt $(f(x_n))$ on lukujono, jolle pätee, että

$$|f(x_n) - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } n \geq n_0.$$

Perusteluna on, että jos $n \geq n_0$, niin $0 < |x_n - x_0| < \delta$, josta seuraa $|f(x_n) - a| < \epsilon$.

Siis $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Osoitetaan väite suuntaan " $\Leftarrow$ ". Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

kaikilla lukujonoilla $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, jotka suppenevat kohti lukua x_0. Tehdään vastaoletus, että funktion raja-arvo f raja-arvo pisteessä x_0 ei ole a. Siis on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että jokaisella $\delta > 0$ on olemassa sellainen $x \in \mathbb{R}$, että

$$|f(x) - a| \geq \epsilon \qquad \text{ja} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Erityisesti, kun $\delta = \frac{1}{n}$ voidaan siis muodostaa lukujono $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, niin että jokaista $n \in \mathbb{Z}_+$ kohti valitaan x_n siten, että

$$|f(x_n) - a| \geq \epsilon \qquad \text{ja} \qquad 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Täten $x_n \to x_0$, kun $n \to \infty$. Oletuksen perusteella $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Siis on olemassa sellainen luku $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|f(x_n) - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } n \geq n_0.$$

Nyt $\epsilon \leq |f(x_{n_0}) - a| < \epsilon$, mikä on ristiriita. Vastaoletus on siis väärä ja saadaan väite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Tehtävä 37. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Pitää siis osoittaa, että on olemassa luku sellainen luku $M \in \mathbb{R}$, että

$$|f(g(x)) - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } x > M.$$

Oletuksen perusteella on olemassa sellainen luku $M_0 \in \mathbb{R}$, että

$$|f(y) - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } y > M_0$$

ja myös lukua $M_0 > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta \in \mathbb{R}$, että

$$g(x) > M_0 \qquad \text{aina, kun } x > M.$$

Jos $x > M$, niin edellinen $y = g(x) > M_0$. Täten

$$|f(y) - a| < \epsilon$$

Siis on olemassa sellainen luku $M \in \mathbb{R}$, että

$$|f(g(x)) - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } x > M.$$

Siis

$$\lim_{x \to \infty} f(g(x)) = a$$

Tehtävä 38. Määritellään funktio f seuraavasti:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nyt funktion määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.

Osoitetaan, että $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt

$$|f(x) - 1| = \begin{cases} |x - 1| & , \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Valitsemalla $\epsilon = \delta$ saadaan, että

$$|f(x) - 1| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - 1| < \delta.$$

Täten $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Olkoon $x_0 \neq 1$ mielivaltainen . Koska jokaisella avoimella reaalivälillä on sekä rationaalilukuja että irrationaalilukuja, niin on olemassa jonot $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ ja $(y_n) \subset$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jotka suppenevat kohti lukua x_0. Nyt $f(x_n) = x_n \to x_0$ ja $f(y_n) = 1 \to 1$, kun $n \to \infty$. Koska

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

niin tehtävän 36 nojalla funktiolla f ei voi olla raja-arvoa pisteessä $x_0 \neq 1$.

Toinen ja huomattavasti hankalampi tapa on tehdä vastaoletus ja käyttää määritelmiä. Oletetaan, että funktiolla f olisi raja-arvo a pisteessä $x_0 \neq 1$. Jos $a \neq 1$, niin myös lukua $\epsilon = \frac{|1-a|}{2}$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon = \frac{|1-a|}{2} \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Kuitenkin jokaisesta pisteen x_0 aidosta δ-ympäristöstä löytyy piste $x_1 \notin \mathbb{Q}$, joten

$$|f(x_1) - a| = |1 - a| > \frac{|1-a|}{2} = \epsilon$$

Tämä on ristiriita, joten raja-arvo ei voi olla $a \neq 1$. Siten raja-arvo on $a = 1$, mikäli se on olemassa. Siis lukua $\epsilon = \frac{|x_0-1|}{2}$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|f(x) - 1| < \epsilon = \frac{|x_0-1|}{2} \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Koska lukua δ voi vapaasti rajoittaa ylhäältäpäin, niin voidaan olettaa, että $\delta < |x_0 - 1|$. Jokaisesta pisteen x_0 aidosta δ-ympäristöstä löytyy piste rationaalipiste $x_1 \in \mathbb{Q}$. Kirjoitetaan se muodossa $x_1 = x_0 + \Delta$, missä $0 < |\Delta| < \delta$. Nyt

$$|f(x_1) - 1| = |x_1 - 1| < \epsilon = \frac{|x_0-1|}{2},$$

koska $0 < |x_1 - x_0| < \delta$. Lisäksi kolmioepäyhtälöstä saadaan, että

$$|x_1 - 1| = |x_0 + \Delta - 1| \geq ||x_0 - 1| - |\Delta|| > |x_0 - 1|.$$

Täten

$$|x_0 - 1| < \frac{|x_0-1|}{2},$$

mikä on ristiriita. Siis raja-arvoa ei ole olemassa, mikäli $x_0 \neq 1$.

Tehtävä 39. Oletetaan, että jatkuva funktio $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $]a,b[$. Tarkastellaan funktiota

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right).$$

Se on jatkuva välillä $[a,b]$ koska funktiot $-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$ ja f ovat jatkuvia samaisella välillä. Vastaavasti se on myös derivoituva. Nyt $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ ja $g(b) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$. Koska Rollen lauseen oletukset pätevät, niin on olemassa sellainen piste $x_0 \in]a,b[$, että $g'(x_0) = 0$. Siis on olemassa piste sellainen piste $x_0 \in]a,b[$, että

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = 0$$

eli

$$f'(x_0)(b-a) = f(b) - f(a),$$

mikä on onkin väliarvolauseen väite.

Toinen tapa on määritellä funktio

$$g(x) = f(x) + Ax + B.$$

Oletuksien perusteella g on jatkuva funktio välillä $[a,b]$ ja derivoituva välillä $]a,b[$. Lisäksi

$$g(a) = f(a) + Aa + B \qquad \text{ja} \qquad g(b) = f(b) + Ab + B.$$

Nyt $g(a) = g(b)$, kun valitaan että $A = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ ja luku $B \in \mathbb{R}$ voi olla mielivaltainen. Rollen lausetta voidaan siis soveltaa eli on olemassa sellainen $x_0 \in]a,b[$, että

$$g'(x_0) = f'(x_0) + A = 0.$$

Siis

$$f'(x_0)(b-a) = -A(b-a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(a).$$

Tehtävä 40. Suoraan määritelmän perusteella funktio f on surjektio. Riittää siis osoittaa, että funktio f on injektio. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset pisteet $x_1, x_2 \in]a, b[$, että $x_1 < x_2$ ja $f(x_2) = f(x_1)$. Oletuksen perusteella funktio f on derivoituva välillä $]x_1, x_2[$ ja jatkuva välillä $[x_1, x_2]$. Nyt Rollen lausetta voidaan soveltaa ja saadaan, että on olemassa piste $t \in]x_1, x_2[$, jolle $f'(t) = 0$. Tämä on ristiriitä oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä ja väite todistettu.

Tehtävä 41. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Funktion jatkuvuuden määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että

$$|f(y) - f(a)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } |y - a| < \delta_1.$$

Valitaan $y = g(x)$, jolloin

$$|f(g(x)) - f(a)| = |f(y) - f(a)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } |y - a| < \delta_1.$$

On siis saatava voimaan, että $|g(x) - a| < \delta_1$. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että

$$|g(x) - a| < \delta_1 \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Täten jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta_2 > 0$, että

$$|f(g(x)) - f(a)| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta_2,$$

josta väite seuraa.

Otetaan esimerkiksi funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}$, jolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \text{ ja} \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tällöin funktio f ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$, koska $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Olkoon ensiksi $g(x) \equiv 0$. Tällöin $f(g(x)) \equiv f(0) = 1$ eli

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1 = f(\lim_{x \to 0} g(x)).$$

Otetaan toiseksi esimerkiksi, että $g(x) = x$. Tällöin

$$f(\lim_{x\to 0} g(x)) = f(0) = 1 \neq \lim_{x\to 0} f(g(x)) \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Täten pitää varmistaa, että funktio on jatkuva, ennenkuin rajankäynnin voi siirtää sen sisälle.

Tehtävä 42. Tutkitaan ensiksi raja-arvoa $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin x$ luvun α eri arvoilla.

Jos $\alpha \geq 0$, niin

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \sin x = 0 \cdot 0 = 0.$$

Jos $-1 < \alpha < 0$, niin

$$x^\alpha \sin x = x^{\alpha+1} \frac{\sin x}{x} \to 0 \cdot 1 = 0,$$

kun $x \to 0$, koska tällöin $\alpha + 1 > 0$

Jos $\alpha = -1$, niin

$$x^\alpha \sin x = \frac{\sin x}{x} \to 1,$$

kun $x \to 0$.

Oletetaan, että $\alpha < -1$. Tällöin $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha+1} = \pm\infty$. Koska $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, niin on olemassa eräs sellainen luvun 0 aito ϵ-ympäristö $B'(0,\epsilon)$, jossa funktio $\frac{\sin x}{x}$ saa aidosti positiivisia arvoja. Siis on olemassa sellainen $m > 0$, että $\frac{\sin x}{x} > m$ aina, kun $x \in B'(0,\epsilon)$. Esimerkkinä käy $m = \frac{1}{2}$. Koska tarkastemme raja-arvoa pisteessä 0, niin tarkastelu voidaan vapaasti rajoittaa ympäristöön $B'(0,\epsilon)$. Nyt

$$|x^\alpha \sin x| = \left|x^{\alpha+1}\right| \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq m \left|x^{\alpha+1}\right| \to \infty,$$

kun $x \to 0$. Siis $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin x = \pm\infty$. eli raja-arvoa ei ole olemassa.

1. Koska $f(0) = 0$, niin funktio f on jatkuva pisteessä $x = 0$ jos ja vain jos $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \sin x = 0$. Siis funktio on jatkuva pisteessä $x = 0$ täsmälleen, kun $\alpha > -1$.

2. Koska erotusosamäärä sievenee muotoon

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{\alpha} \sin x}{x} = x^{\alpha - 1} \sin x,$$

niin funktio f on derivoituva pisteessä $x = 0$ jos ja vain jos $\alpha - 1 \geq -1$ eli $\alpha \geq 0$. Tällöin erotusosamäärän arvo on äärellisenä olemassa.