Perustehtäviä

Tehtävä 1. Osoita, että vakiofunktio $f(x) \equiv c$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja laske suoraan määritelmän perusteella

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Tehtävä 2. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään välillä $[a, b]$

Tehtävä 3. Käytä osittaisintegrointia ja laske integraalit.

1. $\int \ln x \ \mathrm{d}x$
2. $\int x^2 \sin x \ \mathrm{d}x$
3. $\int x \arctan x \ \mathrm{d}x$
4. $\int \mathrm{e}^{-2x} \cos x \ \mathrm{d}x$

Tehtävä 4. Laske sopivaa sijoitusta käyttäen.

1. $\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$
2. $\int_{\ln 2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}$

Tehtävä 5. Integroi.

1. $\int (x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x - 3) \ \mathrm{d}x$
2. $\int 2\mathrm{e}^{-3x} \ \mathrm{d}x$
3. $\int \sin x \cos x \ \mathrm{d}x$
4. $\int \sin^2 x \ \mathrm{d}x$
5. $\int \sin(\ln x) \ \mathrm{d}x$

Tehtävä 6. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[-a, a]$ Osoita, että

i jos funktio f on parillinen, niin

$$\int_{-a}^a f(x) \ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x) \ \mathrm{d}x.$$

ii jos funktio f on pariton, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Tehtävä 7. Missä seuraavassa päättelyssä on vikana?

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big/_{\!-1}^{\,1} \ln|x| = 0 - 0 = 0$$

Mikä on oikea tapa laskea tämä epäoleellinen integraali?

Tehtävä 8. Esitä ja todista integraalilaskennan peruslause.

Tehtävä 9. Laske integraalit.

1. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{(4x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Tehtävä 10. Tutki epäoleellisten integraalien suppenemista.

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+\sin x}$
2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tehtävä 11. Laske raja-arvo

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Mitä voit sanoa tämän laskun perusteella epäoleellisen integraalin

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$$

suppenemisesta?

Tehtävä 12. Integroi.

1. $\int \frac{x+1}{x^2-x} \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{2x^2(x-3)}{x(x+2)(2x^2+1)} \mathrm{d}x$

Vaativampia tehtäviä

Tehtävä 13. Osoita, että jos f on jatkuva ei-negatiivinen funktio välillä $[a,b]$ ja $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$. Päteekö tulos ilman funktion f jatkuvuutta?

Tehtävä 14. Osoita, että jos funktiot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, niin on olemassa sellainen piste $t \in [a,b]$, että $f(t) = g(t)$. Päteekö tämä tulos ilman oletusta funktioiden jatkuvuudesta?

Tehtävä 15. Integroi

1. $\int x\sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$
2. $\int \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{x^2+9}\ \mathrm{d}x$
4. $\int x\sqrt{9+x^2}\ \mathrm{d}x$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9+x^2}}$

Tehtävä 16. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \neq 0 \\ 1 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on integroituva välillä $[-1,1]$. Miksi kertymäfunktio

$$G(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

ei ole funktion f integraalifunktio tällä välillä? Osoita, että funktiolla f ei ole integraalifunktiota välillä $[-1,1]$.

Tehtävä 17. Tutki funktion

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & \text{kun } x \neq 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

derivaattafunktiota $F'(x) = f(x)$ kiinnittäen erityishuomiota pisteeseen $x = 0$. Onko tällöin F on funktion f integraalifunktio? Onko f integroituva välillä, joka sisältää pisteen $x = 0$?

Tehtävä 18. 1. Oleta, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$.

2. Oleta, että funktio f on integroituva välillä $[a, b]$.

Osoita molemmissa tapauksissa, että jos $m \leq f(x) \leq M$ aina, kun $x \in [a, b]$, niin

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Tehtävä 19. Esitä ja todista yleistetty integraalilaskennan väliarvolause.

Tehtävä 20. Todista seuraava suhdetestin laajennus. Olkoon $f(x)$ ja $g(x)$ positiivisia ja integroituvia funktioita kaikilla väleillä $[a, 1]$, missä $0 < a < 1$, ja

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Jos epäoleellinen integraali $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee, niin myös epäoleellinen integraali $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ suppenee.

Vinkkejä perustehtäviin

Tehtävä 1. Osoita, että ylä- ja alasummien arvot ovat samat riippumatta välin $[a, b]$ jaosta.

Tehtävä 2. Käytä apuna tietoa siitä, että jokaisella reaalivälillä on rationaali- ja irrationaalilukuja.

Tehtävä 3.
1. Sovella osittaisintegrointia kerran ja yritä päästä eroon logaritmifunktiosta.
2. Sovella osittaisintegrointia kahdesti.
3. Huomaa, että $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.
4. Sovella osittaisintegrointia kahdesti.

Tehtävä 4.
1. Tee sijoitus $t = \sqrt{x}$.
2. Tee sijoitus $t = e^{2x}$.

Tehtävä 5.
1. Integroi suoraan.
2. Käytä esimerkiksi sijoitusta $t = -3x$ tai laske suoraan.
3. Huomaa, että $D \sin x = \cos x$.
4. Käytä trigonometrista kaavaa $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.
5. Käytä sijoitusta $t = \ln x$ ja osittaisintegrointia.

Tehtävä 6. Jaa integrointi kahteen osaan ja käytä sijoitusta $t = -x$ sopivasti.

Tehtävä 7. Mieti toteutuuko määrätyn integraalin määritelmän oletukset.

Tehtävä 8. Sovella väliarvolausetta.

Tehtävä 9.
1. Suora lasku.
2. Suora lasku.
3. Huomioi, että integrandi on parillinen funktio. Jaa integrandi kahteen osaan.

Tehtävä 10.
1. Todista arvio $x > \sin x$ sopivalla välillä ja käytä sitä.
2. Jaa integraali kahteen osaan ja käytä majoranttiperiaatetta.
3. Suora lasku.
4. Jaa integrointi kolmeen osaan sopivasti, jolloin arviointi käy helpommaksi ja käytä majoranttiperiaatetta.

Tehtävä 11. Raja-arvo on suora lasku. Mieti miten epäoleellinen integraali on määritelty.

Tehtävä 12. Osamurtokehitelmän tekemisen jälkeen jäljellä on vain suora lasku. Luentomonisteessa on ohjeet erityyppisten osamurtojen integroimiseen.

Vinkkejä vaativampiin tehtäviin

Tehtävä 13. Tee vastaoletus ja osoita, että tällöin yläsummien täytyy olla jotakin positiivista vakiota suurempia.

Tehtävä 14. Sovella edellistä tehtävää funktioon $f - g$.

Tehtävä 15.

1. Huomioi sisäfunktion derivaatta.
2. Käytä sijoitusta $x = 3\sin t$.
3. Tee sijoitus $t = x + \sqrt{x^2 + 9}$.
4. Käytä sopivaa sijoitusta tai laske ensimmäisen kohdan tapaan.
5. Käytä sopivaa sijoitusta.
6. Käytä sopivaa sijoitusta.

Tehtävä 16. Osoita integroituvuus näyttämällä, että jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa välin jako, jonka yläsumman arvo on pienempi kuin tämä luku. Oleta, että funktiolle olisi olemassa integraalifunktio ja tutki mitä siitä seuraa.

Tehtävä 17. Laske derivaattafunktio ja sovella pisteeseen $x = 0$ määritelmää sellaisenaan.

Tehtävä 18.

1. Käytä integraalilaskennan väliarvolausetta.
2. Käytä tehtävää 1 apuna.

Tehtävä 19. Käytä apuna sitä, että jatkuva funktio saavuttaa suljetulla välillä kaikki arvot maksiminsa ja miniminsä välistä. Arvioi tällä tavoin funktiota $f(x)g(x)$ ja niiden integraalia.

Tehtävä 20. Käytä raja-arvon määritelmää ja majoranttiperiaatetta.

Perustehtävien ratkaisut

Tehtävä 1. Olkoon $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mielivaltainen välin $[a, b]$ jako, missä $a = x_0$, $b = x_n$ ja $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Koska funktio f oli vakiofunktio, niin $f(x) = c$ kaikilla $a \leq x \leq b$. Täten ala- ja yläsumman arvot ovat samat, sillä $c = \sup f(x) = \inf f(x)$ kaikilla $a \leq x \leq b$. Lisäksi $(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$. Täten

$$s_D = \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i) = c(b - a) = S_D.$$

Täten funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = c(b - a).$$

Tehtävä 2. Olkoon luvut $a < b$ mielivaltaisia. Olkoon lisäksi $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mielivaltainen välin $[a, b]$ jako, missä $a = x_0$, $b = x_n$ ja $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Koska kaikilla väleillä $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$ on sekä rationaali- että irrationaalipisteitä, niin

$$\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1.$$

Koska jako D oli mielivaltainen, niin jokainen alasumma $s_D = 0$. Lisäksi jokainen yläsumma on $S_D = b - a$. Täten

$$\sup s_D = 0 \neq 1 = \inf S_D,$$

joten funktio f ei ole Riemann-integroituva välillä $[a, b]$.

Tehtävä 3. Sovelletaan osittaisintegroinnin kaavaa

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

1. Valitaan $f(x) = x$ ja $g(x) = \ln x$. Tällöin $f'(x) = 1$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$. Siis

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

Derivoimalla tulos saadaan vahvistuttua oikeaksi.

2. Sovelletaan osittaisintegrointia kahdesti. Ensiksi

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x,$$

missä valittiin $f(x) = -\cos x$ ja $g(x) = x^2$. Lisäksi

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C_1,$$

valinnoilla $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = x$. Täten

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = 2x \sin x + 2 \cos x - x^2 \cos x + C.$$

Kaavaan sijoitettiin uusi vakio $C = 2C_1$ puhtaasti esteettisistä syistä.

3. Valitaan $g(x) = \arctan x$ ja $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tällöin

$$\int x \arctan x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

Nyt $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, joten

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \arctan x + C_1.$$

Siis

$$\int x \arctan x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + C,$$

missä $C = -\frac{C_1}{2}$.

4. Valitsemalla $f(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ ja $g(x) = \cos x$ saadaan, että

$$\int \mathrm{e}^{-2x} \cos x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \cos x - \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{-2x} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Nyt vastaavasti

$$\int \mathrm{e}^{-2x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \sin x + \frac{1}{2} \int \mathrm{e}^{-2x} \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Siis

$$\int \mathrm{e}^{-2x} \cos x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \cos x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} \sin x - \frac{1}{4} \int \mathrm{e}^{-2x} \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Siirtämällä termi $\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x \,\mathrm{d}x$ vasemmalle puolelle ja kertomalla luvulla $\frac{4}{5}$ saadaan, että

$$\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}\sin x - \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x}\cos x + C.$$

Vaikka tulos näyttää aika monimutkaiselta, niin sen oikeellisuuden voi todeta derivoimalla.

Tehtävä 4. 1. Tehdään sijoitus $t = \sqrt{x}$. Tällöin integoimisvälillä $[1, 9]$ on $x = t^2$ ja siten $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Alaraja on edelleen 1 ja yläraja muuttuu luvuksi 3. Täten

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}} &= \int_1^3 \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2+t} \\ &= 2\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\ &= 2\Big/_{1}^{3} \ln(t+1) \\ &= 2\,(\ln 4 - \ln 2) = 2\ln 2.\end{aligned}$$

2. Tehdään sijoitus $t = \mathrm{e}^{2x}$. Tällöin $\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ eli $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2t}$. Integroimisrajat muuttuvat, niin että yläraja on $\mathrm{e}^{2\cdot 1} = \mathrm{e}^2$ ja alaraja on $\mathrm{e}^{2\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2^2} = 4$. Täten

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}} &= \int_4^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{2t(t-\frac{1}{t})} \\ &= \frac{1}{2}\int_4^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\int_4^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)}.\end{aligned}$$

Laskemalla osamurtokehitelmä integoitavalle saadaan, että

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{t(A+B)+A-B}{(t-1)(t+1)},$$

missä $A = \frac{1}{2}$ ja $B = -\frac{1}{2}$. Siis

$$\begin{aligned}
\int_4^{e^2} \frac{dt}{(t-1)(t+1)} &= \frac{1}{2}\Big(\int_4^{e^2} \frac{dt}{t-1} - \int_4^{e^2} \frac{dt}{t+1}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big/_{4}^{e^2} \ln(t-1) - \Big/_{4}^{e^2} \ln(t+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(e^2-1) - \ln 3 - \ln(e^2+1) + \ln 5\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5(e^2-1)}{3(e^2+1)}\right).
\end{aligned}$$

Täten

$$\int_{\ln 2}^{1} \frac{dx}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5(e^2-1)}{3(e^2+1)}\right).$$

Tehtävä 5. 1. Suoraan integroimissääntöjä soveltamalla saadaan, että

$$\begin{aligned}
\int (x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x - 3)\ dx &= \int x^4\ dx + 5\int x^3\ dx - \int x^2\ dx + 2\int x\ dx - 3\int dx \\
&= \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C.
\end{aligned}$$

2. Sijoitus $t = -3x$ on differentioituva bijektio, joten se ei tuota mitään ongelmia. Nyt $x = -\frac{1}{3}t$ ja $dx = -\frac{1}{3}dt$. Siis

$$\begin{aligned}
\int 2e^{-3x}\ dx &= \int -\frac{2}{3}e^t\ dt \\
&= -\frac{2}{3}e^t + C = -\frac{2}{3}e^{-3x} + C.
\end{aligned}$$

3. Koska $D\sin x = \cos x$, niin integrointi on muotoa $\int f(x)f'(x)\ dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C$. Siis

$$\int \sin x \cos x\ dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

4. Koska $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, niin

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

5. Tehdään sijoitus $t = \ln x$, joka on derivoituva bijektio, joten sijoitus on luvallinen. Tällöin $x = \mathrm{e}^t$ ja $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$. Näin integointi saadaan muotoon

$$\int \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \sin t\ \mathrm{d}t.$$

Käytetään osittaisintegrointia ja saadaan, että

$$\int \mathrm{e}^t \sin t\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \sin t - \int \mathrm{e}^t \cos t\ \mathrm{d}t$$

ja vastaavasti

$$\int \mathrm{e}^t \cos t\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \cos t + \int \mathrm{e}^t \sin t\ \mathrm{d}t.$$

Siten

$$\int \mathrm{e}^t \sin t\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \sin t - \mathrm{e}^t \cos t - \int \mathrm{e}^t \sin t \mathrm{d}t$$

eli

$$\int \mathrm{e}^t \sin t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t \sin t - \mathrm{e}^t \cos t\right).$$

Palataan sijoituksella alkuperäiseen muuttujaan ja tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^t \sin t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t \sin t - \mathrm{e}^t \cos t\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\ln x} \sin(\ln x) - \mathrm{e}^{\ln x} \cos(\ln x)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C,\end{aligned}$$

missä tarvittava integroimisvakio C on lisätty yhtälöön vasta tässä viimeisessä vaiheessa

Tehtävä 6. 1. Jos funktio f on parillinen, niin $f(x) = f(-x)$. Koska integrointi voidaan suorittaa osissa, niin

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_{0}^{-a} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Tehdään vasemmanpuoliseen integraaliin sijoitus $t = -x$.

$$\int_0^{-a} f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^{a} f(-t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{a} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Koska integoinnissa integroitavalla muuttujalla ei ole käytännön merkitystä, niin korvataan edellisessä tuloksesta muuttuja t muuttujalla x ja tehdään sijoitus ja saadaan väite

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^{a} f(x)\ \mathrm{d}x$$

2. Jos funktio f on pariton, niin $f(x) = -f(-x)$. Jakamalla integrointi taas osiin saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{a} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{-a} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{a} f(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Sijoittamalla $t = -x$ vasemmanpuoleinen integraali muuttuu muotoon

$$\int_0^{-a} f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^{a} f(-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{a} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Täten $\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Nämä tulokset ovat voimassa myös silloin, kun f on vain integroituva. Tällöin todistus voidaan suorittaa tarkastelemalla Riemannin summia. Tässä todistuksessa jatkuvuutta tarvitaan varmistassa sijoitusten oikeellisuus.

Tehtävä 7. Funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ ei ole integroituva välillä $[-1, 1]$, sillä $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Siten funktio f ei ole rajoitettu välillä $[-1, 1]$. Täten

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$$

on epäoleellinen integraali. Oikea tapa on kirjoittaa

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x + \int_0^{1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x,$$

missä molemmat osat ovat hajaantuvia epäoleellisia integraaleja.

Tehtävä 8. Integraalilaskennan peruslause sanoo, että välillä $[a,b]$ jatkuva, välillä $]a,b[$ derivoituva funktio f, jolle $f'(x)=0$ kaikilla $x\in]a,b[$, on vakiofunktio välillä $[a,b]$.

Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$, derivoituva välillä $]a,b[$ ja $f'(x)=0$ kaikilla $x\in]a,b[$. Olkoon $x\in]a,b[$ mielivaltainen. Väliarvolausetta voidaan soveltaa tälle välille ja täten on olemassa sellainen piste $x_0\in]a,x[$, että

$$f(x)-f(a)=f'(x_0)(x-a)=0(x-a)=0$$

Täten $f(x)=f(a)$ kaikilla $x\in]a,b[$. Jatkuvuuden perusteella myös $f(a)=\lim_{x\to b}=f(b)$. Siis f on vakiofunktio välillä $[a,b]$.

Tehtävä 9. 1. Integroitava funktio $\frac{x}{(4x^2+1)^2}$ on rajoitettu välillä $[0,\infty[$, joten integraalin kannalta ainoa ongelma on käyttäytyminen äärettömyydessä. Nyt

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x}{(4x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_0^a \frac{8x}{(4x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\Big/_0^a -\big(4x^2+1\big)^{-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4a^2+1}\right)\\ &\to \frac{1}{8}(1-0)=\frac{1}{8},\end{aligned}$$

kun $a\to\infty$.

2. Vastaavasti kuten edellä

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int_0^a \frac{8x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\Big/_0^a \ln\left|4x^2+1\right|\\ &= \frac{1}{8}\big(\ln(4a^2+1)-0\big)\\ &\to \infty,\end{aligned}$$

kun $a \to \infty$. Siis integraali hajaantuu.

3. Integrandi on parillinen funktio, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

mikäli se suppenee. Lasketaan tämä epäoleellinen integraali tekemällä sijoitus $t = 2x$. Tällöin $t^2 = 4x^2$ ja $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$, mutta integroimisrajat vain puolittuvat. Siis

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big/_{0}^{\frac{a}{2}} \arctan t \\ &\to \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

kun $a \to \infty$. Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Tehtävä 10. 1. Tutkitaan funktiota $f(x) = x - \sin x$. Se on jatkuva ja derivoituva sekä $f'(x) = 1 - \cos x$. Kun $0 < x \leq 1$, niin funktio f on aidosti kasvava ja positiivinen. Täten $x > \sin x \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$ eli

$$\frac{1}{x+\sin x} > \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2x}$$

kun $x \in]0,1[$. Koska epäoleellinen integraali

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

hajaantuu, niin minoranttiperiaatteen nojalla myös epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sin x}$$

hajaantuu.

2. Jaetaan epäoleellisen integraalin tarkasteleminen kahteen osaan merkitsemällä

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}.$$

Osoitetaan, että molemmat osaintegraalit suppenevat jolloin myös koko integraali suppenee. Oletetaan, että $0 < x \leq 1$. Nyt $\sqrt{x+x^3} = \sqrt{x}\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x}\sqrt{1+0} = \sqrt{x}$ eli

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

kun $0 < x \leq 1$. Koska integraali $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ suppenee, niin myös integraali

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^3}}$$

suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Oletetaan, että $1 \leq x$. Tällöin

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ja majoranttiperiaatteen nojalla integraalin $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$ suppenemisesta seuraa integraalin

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^3}}$$

suppeneminen.

3. Nyt ongelmia aiheuttaa vain äärettömät integroimisrajat. Jaetaan integraali kahteen osaan. Tällöin

$$\int_a^0 \cos x \ \mathrm{d}x + \int_0^b \cos x \ \mathrm{d}x = \Big/_a^0 \sin x + \Big/_0^b \sin x = \sin(b) - \sin(a).$$

Koska funktiolla $f(x) = \sin x$ ei ole raja-arvoja kummassakaan äärettömyydessä, niin integraali hajaantuu.

4. Jaetaan integroimisväli $]-\infty,\infty[$ osaväleihin $]-\infty,-1]$, $[-1,1]$ ja $[1,\infty[$, joissa tarkastelu suoritetaan. Kun $|x| \geq 1$, niin $x \leq x^2$ ja $\frac{1}{\mathrm{e}^x} \geq \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$. Koska

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x} = \Big/_{1}^{a} -\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-a} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

kun $a \to \infty$, niin epäoleelliset integraalit

$$\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

suppenevat majoranttiperiaatteen nojalla. Koska

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ja jokaisella osaintegraalilla on äärellinen arvo, niin integraali suppenee. Tässähän keskimmäinen integraali ei ole epäoleellinen, joten se automaattisesti "suppenee".

Tehtävä 11. Nyt kyseessä ei ole epäoleellinen integraali, vaan integraalin avulla määritelty raja-arvo. Suoraan laskemalla huomataan, että

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \sin x\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty} \Big/_{-a}^{a} -\cos x \\
&= \lim_{a\to\infty} (-\cos a + \cos(-a)) \\
&= \lim_{a\to\infty} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Epäoleellisesti integraalista $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ edellinen lasku ei sano mitään, koska nyt rajankäynnit äärettömyydessä pitää ottaa erikseen. Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$$

Kumpikin osaintegraali hajaantuu, koska funktiolla $-\cos x$ ei ole raja-arvoa äärettömyydessä.

Tehtävä 12. 1. Koska $x^2 - x = x(x-1)$, niin lasketaan osamurtokehitelmä

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx}{x(x-1)}.$$

Kertomalla puolittain termillä $x(x-1)$ ja asettamalla x:n yhtäsuurien potenssien kertoimet samoiksi, saadaan ratkaistavaksi yhtälöt $A + B = 1$ ja $A = -1$. Ratkaisut ovat $A = -1$ ja $B = 2$. Siis

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2 - x}\mathrm{d}x &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\ &= -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C \\ &= \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| + C.\end{aligned}$$

2. Ensinnäkin supistetaan yhteinen tekijä pois eli

$$\int \frac{2x^2(x-3)}{x(x+2)(2x^2+1)}\mathrm{d}x = 2\int \frac{x(x-3)}{(x+2)(2x^2+1)}\mathrm{d}x.$$

Koska $2x^2 + 1$ ei hajoa enää reaalisiin tekijöihin, niin osamurtokehitelmä on muotoa

$$\frac{x^2 - 3x}{(x+2)(2x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{2x^2+1} = \frac{2Ax^2 + A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C}{(x+2)(2x^2+1)}.$$

Ratkaistava epäyhtälö on siis

$$\begin{cases} 1 = 2A + B \\ -3 = 2B + C \\ 0 = A + 2C \end{cases}$$

jonka ratkaisut ovat $A = \frac{10}{9}$, $B = -\frac{11}{9}$ ja $C = -\frac{5}{9}$. Siten

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2(x-3)}{x(x+2)(2x^2+1)}\mathrm{d}x &= 2\left(\int \frac{\frac{10}{9}}{x+2}\mathrm{d}x + -\int \frac{\frac{11}{9}x + \frac{5}{9}}{2x^2+1}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{20}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} - \frac{22}{9}\int \frac{x}{2x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{10}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1}.\end{aligned}$$

Selvästi

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2| + C_1.$$

Koska $x = \frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} D(2x^2+1)$, niin

$$\int \frac{x}{2x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln\left|2x^2+1\right| + C_2.$$

Hankalin integrointi on viimeinen. Tehdään sijoitus $t = \sqrt{2}x$, jolloin $t^2 = 2x^2$ ja $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\mathrm{d}x$. Siis

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1} = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t + C_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}x + C_3.$$

Lopulta saadaan siis (yhdistetään vakiot suoraan yhdeksi vakioksi C)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2(x-3)}{x(x+2)(2x^2+1)} \mathrm{d}x &= \frac{20}{9} \ln|x+2| - \frac{22}{9} \cdot \frac{1}{4} \ln\left|2x^2+1\right| - \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}x + C \\ &= \frac{20}{9} \ln|x+2| - \frac{11}{18} \ln\left|2x^2+1\right| - \frac{5\sqrt{2}}{9} \arctan \sqrt{2}x + C.\end{aligned}$$

Vaativampien tehtävien ratkaisut

Tehtävä 13. Oletuksen perusteella $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tehdään vastaoletus, että olisi sellainen $x_0 \in [a, b]$, että $f(x_0) > 0$. Valitaan $\epsilon = f(x_0) > 0$. Funktion f jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{aina, kun } |x - x_0| \leq \delta \text{ ja } x \in [a, b].$$

Merkitään $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$. Lisäksi luku $\delta > 0$ voidaan valita niin pieneksi, että välin I_δ pituus on vähintään δ, koska $x_0 \in [a, b]$. Jos $x \in I_\delta$, niin $\frac{\epsilon}{2} < f(x) < \frac{3\epsilon}{2}$. Nyt voidaan tehdä arvio

$$0 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{I_\delta} f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{I_\delta} \frac{\epsilon}{2}\mathrm{d}x \geq \frac{\epsilon}{2}\delta > 0,$$

mikä on ristiriita. Epäyhtälön ensimmäisessä arviossa integroimisväliä pienennetään, jolloin integraalin arvo tietenkin pienenee. Toisessa arviossa käytetetään funktion f alarajaa välillä I_δ. Kolmannessa käytetään hyväksi tietoa, että välin I_δ pituus on vähintään δ laskettaessa vakiofunktion integraali. Näiden arvioiden täsmällinen perustelu voidaan suorittaa Riemannin summien avulla, mutta yksinkertaisuuden vuoksi sivutetaan nämä päättelyt selvinä. Merkintä

$$\int_{I_\delta} f(x)\mathrm{d}x$$

tarkoittaa funktion f integroimista yli välin I_δ.

Tulos ei päde ilman jatkuvuuden oletusta. Vastaesimerkiksi käy funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \\ 0, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Tällöin $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$, mutta $f(x) \not\equiv 0$ integroimisvälillä.

Tehtävä 14. Oletuksen perusteella

$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Koska funktiot f ja g ovat jatkuvia ja integroituvia, niin myös funktio $f-g$ jatkuva ja integroituva välillä $[a,b]$. Mikäli funktio $f-g$ vaihtaa merkkiään pisteessä $x \in [a,b]$, niin $(f-g)(x) = 0$ eli $f(x) = g(x)$, joten väite on todistettu. Voidaan siis olettaa, että $f-g$ ei vahda merkkiään välillä $[a,b]$. Tällöin jompi kumpi funktioista $f-g$ tai $g-f$ on positiivinen ja edellistä tehtävää voidaan soveltaa tähän funktioon. Siis $f(x) - g(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$, mistä väite seuraa.

Taaskaan väite ei päde ilman jatkuvuutta. Vastaesimerkiksi voidaan ottaa funktiot $f(x) \equiv 0$ ja

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Nyt $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = 0$, mutta $f(x) \neq g(x)$ kaikilla $x \in [-1,1]$.

Tehtävä 15.

1. Koska $D(9-x^2) = -2x$, niin integrandiin saadaan muotoiltua sisäfunktion derivaatta. Siis

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}^3 + C \end{aligned}$$

2. Tehdään sijoitus $x = 3\sin t$, missä $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Nyt $t = \arcsin\frac{x}{3}$ ja $\mathrm{d}x = 3\cos t\mathrm{d}t$. Lisäksi $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$, koska välillä

$[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kosini on ei-negatiivinen. Siis

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9 - x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t\ \mathrm{d}t \\ &= \int 9\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t \\ &= 9\int \cos^2 t\ \mathrm{d}t \\ &= 9\int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

missä viimeisin rivi saadaan kaavasta $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. Täten

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9 - x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{9}{2}\int \mathrm{d}t + \frac{9}{4}\int 2\cos 2t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C \\ &= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{9}{2}\sin t\cos t + C \\ &= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}x\cos t + C \\ &= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}x\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} + C,\end{aligned}$$

koska $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$. Tuloksen oikeellisuuden voi tarkistaa suorittamalla derivoinnin. Sijoituksessa ei kuitenkaan tehty mitään luvatonta, koska $3\sin t$ on derivoituva bijektio, kun $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Tehdään sijoitus $t = x + \sqrt{x^2 + 9}$. Nyt korottamalla yhtälö $t - x = \sqrt{x^2 + 9}$ toiseen saadan sievennyksen jälkeen

$$x = \frac{t^2 - 9}{2t}.$$

Tästä derivoimalla puolittain taas saadaan $\mathrm{d}x = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 - 9)}{(2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{t^2 + 9}{2t^2}\mathrm{d}t$.

Siis

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+9}\ \mathrm{d}x &= \int (t-x)\frac{t^2+9}{2t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int \left(t - \frac{t^2-9}{2t}\right)\frac{t^2+9}{2t^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{t^2+9}{2t} - \frac{t^4-9^2}{4t^3}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t}{2}\mathrm{d}t + \int \frac{9}{2t}\mathrm{d}t - \int \frac{t}{4}\mathrm{d}t + \int \frac{81}{4t^3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}t^2 + \frac{9}{2}\ln|t| - \frac{1}{8}t^2 - \frac{81}{8t^2} + C \\
&= \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+9})^2 + \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| - \frac{81}{8(x+\sqrt{x^2+9})^2} + C.
\end{aligned}$$

Laventamalla samannimisiksi ja neliöt laskemalla saadaan, että $\frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+9})^2 - \frac{81}{8(x+\sqrt{x^2+9})^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9}$, joten

$$\int \sqrt{x^2+9}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C.$$

Sijoitus $t = x + \sqrt{x^2+9}$ on derivoituva bijektio ja myös derivoimalla voidaan tarkistaa, että tulos on todellakin oikea.

4. Vastaavasti kuin ensimmäinenkin tehtävä tai vaihtoehtoisesti sijoituksella $t = 9 + x^2$ ja $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{9+x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{t})^3 + C \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{9+x^2})^3 + C.
\end{aligned}$$

Vaikka sijoitus $t = 9 + x^2$ ei ollutkaan bijektio, niin lopputulos on oikea. Vastauksena saatu funktio on todellakin haluttu integraalifunktio, koska sen derivaatta on integrandi.

5. Käytetään samaa sijoitusta $x = \sin t$ kuin tämän tehtävän toisessa kohdassa. Täten

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos t}{3\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \mathrm{d}t \\ &= t + C \\ &= \arcsin\frac{x}{3} + C.\end{aligned}$$

6. Käytetään sijoitusta $t = x + \sqrt{x^2+9}$ kuten kolmannessa kohdessa. Nyt

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{t^2+9}{2t^2(t-x)}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t^2+9}{2t^2(t-\frac{t^2-9}{2t})}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t^2+9}{2t^3-t^3-9t}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t^2+9}{t^3-9t}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t^2+9}{t(t^2-9)}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \ln|t| + C \\ &= \ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C.\end{aligned}$$

Tehtävä 16. Olkoon $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mielivaltainen välin $[-1, 1]$ jako, missä $x_0 = -1$, $x_n = 1$ ja $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Jos väli $[x_i, x_{i+1}]$, missä $i = 0, 1, \ldots, n-1$, sisältää origon $x = 0$, niin

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = 1,$$

muutoin pienin yläraja funktion arvolle on selvästi 0. Lisäksi $\inf f(x) = 0$ kaikilla välin $[-1, 1]$ osaväleillä. Siis funktio f on Riemann-integroituva välillä $[-1, 1]$, jos

$\inf S_D = 0$. Luku 0 on selvästi eräs alaraja yläsummien joukolle. Osoitetaan, että se on suurin alaraja. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt on olemassa sellainen jako D, että $\epsilon > x_{i+1} - x_i$ ja $0 \in]x_i, x_{i+1}[$ eräällä $i \in \mathbb{Z}_+$. Siis $0 < S_D = 1 \cdot (x_{i+1} - x_i) = x_{i+1} - x_i < \epsilon$. Täten $\inf S_D = 0$ ja funktio f on Riemann-integroituva välillä $[-1, 1]$ ja

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Nyt funktio

$$G(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x \equiv 0,$$

kun $x \in [-1, 1]$. Lisäksi se on derivoituva välillä $]-1, 1[$, mutta se ei ole funktion f integraalifunktio, sillä $G'(0) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Oletetaan, että funktio F on funktio f integraalifunktio. Täten $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]-1, 1[$. Erityisesti $F'(0) = f(0) = 1$ ja $F'(x) = f(x) = 0$, kun $\neq 0$. Derivoituvana funktiona F on jatkuva. Integraalilaskennan peruslauseen nojalla

$$F(x) = \begin{cases} c, & \text{kun } -1 < x < 0 \\ d, & \text{kun } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Jatkuvuuden perusteella $F(0) = \lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$ eli $F(0) = c = d$. Tällöin

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = 0 \neq 1 = f(0),$$

mikä on ristiriita. Täten funktiolla f ei ole integraalifunktiota välillä $[-1, 1]$.

Tehtävä 17. Kun $x \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} D\ x^2 \sin\frac{1}{x^2} &= 2x \sin\frac{1}{x^2} + x^2 \cos\frac{1}{x^2} \cdot D\frac{1}{x^2} \\ &= 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} x^2 \cos\frac{1}{x^2} \\ &= 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Kun $x = 0$, niin

$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

sillä $0 \le \left| h \sin \frac{1}{h^2} \right| \le |h| \to 0$, kun $h \to 0$. Siis

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{kun } x \ne 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

Siis funktion f integraalifunktio on F. Kuitenkaan funktio f ei ole integroituva millään välillä, joka sisältää pisteen $x = 0$, sillä funktio f ei ole tällöin rajoitettu. Esimerkiksi jos $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, niin

$$\frac{2}{x_n} \cos(\frac{1}{x_n^2}) = 2\sqrt{2\pi n}$$

eli

$$f(x_n) = 0 - 2\sqrt{2\pi n} \to -\infty,$$

kun $n \to \infty$. Siis funktio f tulee saavuttamaan mielivaltaisen pieniä arvoja lähestyttäessä pistettä $x = 0$

Siis funktiolla voi olla integraalifunktio, vaikka se ei olisikaan integroituva.

Tehtävä 18.

1. Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $t \in [a, b]$, että

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(t)(b - a).$$

   Koska $m \le f(t) \le M$ oletuksen nojalla, niin väite saadaan tätä soveltamalla yllä olevaan yhtälöön.

2. Nyt todistus on hieman hankalampi, koska joudutaan turvautumaan Riemannin summiin. Jos funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sup s_D = \inf S_D.$$

Tehtävän 1 perusteella vakiofunktiot $m(x) \equiv m$ ja $M(x) \equiv M$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ sekä

$$\int_a^b m(x)\ \mathrm{d}x = m(b-a) \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b M(x)\ \mathrm{d}x = M(b-a).$$

Olkoon D mielivaltainen välin $[a, b]$ jako. Oletuksen perusteella

$$m \leq f(x_i) \leq M \qquad \text{ja} \qquad m \leq f(x_{i+1}) \leq M,$$

kaikilla jaon D jakopisteissä x_i ja x_{i+1}, joten funktion m välin $[a, b]$ jokainen yläsumma ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin funktion f vastaava alasumma ja funktion M jokainen alasumma ovat suurempi tai yhtäsuuria kuin funktion f vastaava yläsumma. Täten

$$m(b-a) = \int_a^b m(x)\ \mathrm{d}x \leq \sup s_D = \int_a^b f(x) = \inf S_D\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b M(x)\ \mathrm{d}x = M(b-a).$$

Tehtävä 19. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja funktio g on integroituva välillä $[a, b]$. Oletetaan lisäksi joko $g(x) \geq 0$ tai $g(x) \leq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin on olemassa sellainen $t \in [a, b]$, että

$$\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(t) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tehdään lauseen vaatimat oletukset ja tarkastellaan tapausta $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$. Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, niin sillä on maksimiarvo M ja mininiarvo m tällä välillä. Täten

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

kaikilla $x \in [a, b]$ eli

$$m \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Jos $\int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = 0$, niin edellisen arvion nojalla myös $\int\limits_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Näin väite olisi tosi mielivaltaisella $t \in [a, b]$. Koska $g(x) \geq 0$, niin voidaan olettaa jatkossa, että $\int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x > 0$. Siis

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x} \leq M.$$

Koska f oli jatkuva välillä $[a, b]$, niin se saa kaikki arvot suurimman arvonsa M ja pienimmän arvonsa m väliltä. Siis on olemassa sellainen $t \in [a, b]$, että

$$f(t) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x},$$

josta väite seuraa. Vastaavasti todistetaan tapaus $g(x) \leq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$.

Tehtävä 20. Raja-arvon $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ määritelmän perusteella kiinnitettyä lukua $1 > \epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että jos $|x| < \delta$, niin

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 0 \right| < \epsilon.$$

Tällöin

$$-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$$

ja koska $f(x), g(x) > 0$ kaikilla $1 > x > 0$, niin

$$0 < f(x) < \epsilon g(x).$$

Siis jos epäoleellinen integraali

$$\int_0^\delta g(x)\ \mathrm{d}x$$

suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla myös epäoleellinen integraaali

$$\int_0^\delta f(x)\ \mathrm{d}x$$

suppenee, koska luku $1 > \epsilon > 0$ oli kiinnitetty ja sillä kertominen ei vaikuta suppenemiseen. Siis epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^\delta f(x)\ \mathrm{d}x + \int_\delta^1 f(x)\ \mathrm{d}x,$$

suppenee, koska oletuksen perusteella funktio f on integroituva välillä $[\delta, 1]$.