Sisältö

1 Määrätty integraali ja integraalifunktio

Rajoitettu funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, mikäli

$$\inf\{s_D\} = \sup\{S_D\},$$

missä $\{s_D\}$ on funktion f alasummien joukko välillä $[a, b]$ ja $\{S_D\}$ on funktion f yläsummien joukko samaisella välillä. Tässä D on mielivaltainen välin $[a, b]$ äärellinen jako.

Integroituvuus voidaan määritellä toisella tavalla Riemannin välisummien avulla.

Rajoitettu funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, mikäli on olemassa sellainen luku $I \in \mathbb{R}$, että

$$|\delta_D - I| \to 0, \qquad \text{kun } |D| \to 0$$

missä D on välin $[a, b]$ jako mielivaltaisilla välipisteiden valinnalla $\{t_i\}$, δ_D on jakoa D vastaava osasumma ja $|D|$ on jaon normi.

Määritelmät eivät tuota ongelmia, sillä voidaan osoittaa, että yllä olevat integroituvuusehdot ovat keskenään yhtäpitäviä ja $I = \inf\{s_D\} = \sup\{S_D\}$, kun funktio on integroituva. Tässä inf ja sup otetaan yli kaikkien välin $[a, b]$ äärellisistä jaoista D.

Mikäli funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin funktion f määrätty integraali välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \inf\{s_D\} = \sup\{S_D\}$$

Määrätty integraali voidaan siis ajatella määritellyksi vastaamaan kummassakin tapauksessa funktion alle jäävän pinta-alan raja-arvona, edellyttäen että funktio saa positiivisia arvoja. Alun perin Newton ja Leibniz määrittelivät määrätyt integraalit integraalilaskennan peruslausetta vastaavassa muodossa

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \qquad \text{missä } F'(x) = f(x)$$

Määrittelyssä oli ongelmansa, joten Cauchy ja Riemann kehittelivät nykyiset raja-arvoihin liittyvät määrätyn integraalin määritelmät, joilla suurimmasta osasta aikaisemmista ongelmista päästiin.

Huomautus. Selvästikään kaikki välillä $[a, b]$ määritellyt funktiot eivät ole Riemann-integroituvia. Ensinnäkin funktion f täytyy olla rajoitettu välillä $[a, b]$ eli on olemassa sellainen luku M, että $f(x) \leq M$ aina, kun $x \in [a, b]$ (vertaa tyypin kaksi epäoleelliset integraalit). Toisaalta vaikka funktio olisikin rajoitettu, niin se ei ole välttämättä Riemann-integroituva, esimerkkinä vaikkapa funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään välillä.

Määrätty integraali välillä $[a, b]$ voidaan ajatella funktioksi

$$H : \{f \text{ on integroituva funktio välillä } [a, b]\} \mapsto \mathbb{R},\ H(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

sillä se liittää jokaiseen välillä integroituvaan funktioon f yksikäsitteisen reaaliluvun.

Jatkossa puhuttaessa funktion integroituvuudesta tarkoitetaan juuri Riemann-integroituvuutta. Integraali voidaan määritellä myös muillakin tavoilla, joista tunnetuin on Lebesguen integraali. Ylläoleva esimerkki Riemann-integroimattomasta funktiosta on integroituva Lebesguen mielestä. Asiasta kerrotaan enemmän kurssilla Analyysi III.

1.1 Integroituvista funktioita

Koska Riemannin summien tai ala- ja yläsummien laskeminen on hyvin työlästä, niin integroituvuuden perustelemiseen on usein helpompi käyttää seuraavaa lausetta

Lause. *Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin se on integroituva välillä $[a, b]$.*

Lauseen todistus perustuu tulokseen, että rajoitetulla ja suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Täten esimerkiksi kaikki jatkuvat alkeisfunktiot tulevat olemaan integroituvia jokaisella määritysalueensa rajoitetulla osavälillä. Myös epäjatkuva funktio voi olla integroituva, kunhan epäjatkuvuuskohtia on esimerkiksi äärellinen määrä integroitavalla välillä. Täten yhdistelemällä aikaisempaa tietoa saadaan, että derivoituvuudesta seuraa jatkuvuus, josta seuraa integroituvuus. Siis

$$\begin{aligned} f \text{ on derivoituva reaalifunktio} &\Rightarrow f \text{ on jatkuva reaalifunktio} \\ &\Rightarrow f \text{ on integroituva reaalifunktio} \end{aligned}$$

Lisäksi voidaan osoittaa muitakin ehtoja, joista integroituvuus seuraa. Esimerkiksi kaikki välillä $[a, b]$ rajoitetut ja monotoniset funktiot ovat integroituvia kyseisellä välillä.

1.2 Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Määritellään integraalille seuraavat ominaisuudet

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Ominaisuudet ovat tutut ja intuitiivisesta selvät.

Lause. *Jos funktio f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in [a, b]$, niin se on integoituva välin $[a, b]$ jokaisella osavälillä ja*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Toisin sanoen integrointi voidaan suorittaa osaväleittäin. Mikäli f on integroituva kullakin osavälillä, on yllä oleva kaava voimassa myös kun $c \notin [a, b]$.

Lause. *Jos funktiot f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f(x) \geq g(x)$ aina, kun $x \in [a, b]$, niin*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tämän lauseen seurauksena saadaan karkea arvio määrätyn integraalin arvolle.

Lause. *Jos funktio f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $m \leq f(x) \leq M$ aina, kun $x \in [a, b]$, niin*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Lause. *Jos funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, niin funktio $|f|$ on integroituva välillä $[a, b]$ ja*

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Edellisen lauseen arvion voidaan ajatella olevan eräällä tavalla analoginen kolmioepäyhtälön yleistetyn muodon

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$$

kanssa. Integraalihan määriteltiin summien raja-arvoksi tiettyjen ehtojen vallitessa.

1.3 Integraalifunktio

Olkoon $f :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ funktio. Funktio $F :]a, b[\mapsto \mathbb{R}$ on funktion f integraalifunktio välillä $]a, b[$, jos

$$f(x) = F'(x) \qquad \text{aina, kun } x \in]a, b[.$$

Tällöin merkitään

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Tehtyä operaatiota eli integraalifunktion etsimistä kutsutaan integroimiseksi ja funktiota f sanotaan integrandiksi eli integroitavaksi funktioksi. Funktiota F kutsutaan myös funktion f primitiivifunktioksi tai antiderivaataksi.

Integraalifunkio ei ole yksikäsitteinen, sillä jos $F'(x) = f(x)$, niin

$$D(F(x) + C) = F'(x) = f(x)$$

kaikille $C \in \mathbb{R}$. Toisaalta integraalilaskennan peruslauseen nojalla funktion f kaikki primitiivifunktiot ovat muotoa $F(x) + C$, missä lukua C kutsutaan integroimisvakioksi.

Huomautus. Kaikkien funktioiden integraalifunktioita ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla. Tälläisiä funktioita on esimerkiksi e^{x^2} ja $\frac{\sin x}{x}$. Tällöin määrätyn integraalin arvoa laskettaessa täytyy turvautua muihin menetelmiin, esimerkiksi Taylorin sarjoihin.

Huomautus. Integraalifunktion olemassa olo ja integroituvuus eivät ole sama asia. Funktio voi olla integroituva eräällä välillä ilman, että sillä olisi integraalifunktiota tällä välillä. Vastaavasti funktiolla voi olla integraalifunktio ilman, että se olisi integroituva tällä välillä. Esimerkit näistä tilanteista löytyvät harjoitustehtävistä.

1.4 Integraalilaskennan tärkeimmät lauseet

Yleistetty integraalilaskennan väliarvolause. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja funktio g on integroituva välillä $[a, b]$. Jos lisäksi joko $g(x) \geq 0$ tai $g(x) \leq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin tällöin on olemassa sellainen $t \in [a, b]$, että*

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(t) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Valitsemalla $g(x) \equiv 1$ saadaan tutumpi muoto lauseelle.

Integraalilaskennan väliarvolause. *Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin on olemassa sellainen $t \in [a, b]$, että*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(t)(b - a).$$

Oletus funktion f jatkuvuudesta on välttämätön kahdessa edellisessä lauseessa. Vastaesimerkiksi käy funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0 \\ -1, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

välillä $[-1, 1]$, kun $g(x) \equiv 1$.

Normaalin väliarvolauseen avulla saadaan

Integraalilaskennan peruslause. *Jos f jatkuva välillä $[a, b]$, derivoituva väillä $]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin funktio f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.*

Integraalilaskennan käyttökelpoisuus on puhtaasti integraalilaskennan päälauseen ansiota. Se yhdistää derivoinnin ja integroinnin ja tarjoaa näppärän tavan laskea määrättyjen integraalien arvoja.

Integraalilaskennan päälause. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin*

1. *Funktio $G : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$*
$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
on derivoituva välillä $[a, b]$ ja $G'(x) = f(x)$.
2. *Jos F on funktion f eräs integraalifunktio, niin*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Huomautus. Päälausetta voidaan yleistää vielä edellä olleesta muodosta. Jos oletukseksi ottaa, että funktio f on integroituva välillä $[a, b]$, niin silloin **kertymäfunktio**

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

tulee olemaan jatkuva välillä $[a, b]$ ja differentioituva niissä välin $[a, b]$ pisteissä joissa funktio f on jatkuva.

Huomautus. Kohdassa 2. ei oleteta integraalifunktion F olemassa oloa. Siinä vain todetaan, että mikäli integraalifunktio on olemassa, niin se tulee toteuttamaan esitellyn ehdon. Myöskään integraalifunktion valinnalla ei ole väliä, sillä vakio C tulee supistumaan erotuksessa pois.

Integrointilaskennan päälauseen nojalla integrointia ja derivointia voidaan ajatella käänteiseksi operaatioiksi tietyillä rajoituksilla. Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = f(x)$$

kaikille $x \in [a, b]$. Jos funktio $F'(t)$ on integroituva välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^x F'(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

kaikille $x \in [a, b]$. Päälause siis kytkee yhteen integraalifunktiot $F(x) + C = \int f(x)\ \mathrm{d}x$ ja määrätyn integraalin $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, joilla ei määritelmien perusteella näyttäisi olevan mitään yhteyttä lukuunottamatta samanlaista merkintää.

2 Integroimiskaavoja

Lause. *Olkoon f ja g integroituvia funktioita ja $k \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin*

1. $\int k \text{ d}x = kx + C$
2. $\int kf(x) \text{ d}x = k \int f(x) \text{ d}x$
3. $\int (f+g)(x) \text{ d}x = \int f(x) \text{ d}x + \int g(x) \text{ d}x$
4. $\int f'(x)f^n(x) \text{ d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, *kun* $n \neq -1$
5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ d}x = \ln|f(x)| + C,$

mikäli integraalit ovat olemassa.

Funktioiden derivoimiskaavoista saadaan suoraan seuraavat integroimiskaavat:

Integroimiskaavoja. 1. $\int 0 \text{ d}x = C$

2. $\int x^n \text{ d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, *kun* $n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} \text{ d}x = \ln|x| + C$
4. $\int \mathrm{e}^x \text{ d}x = \mathrm{e}^x + C$
5. $\int \sin x \text{ d}x = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \text{ d}x = \sin x + C$
7. $\int \tan x \text{ d}x = -\ln|\cos x| + C$
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Funktioiden tulon derivaatan perusteella $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Integoimalla tämä puolittain saadaan

Osittaisintegrointi. *Jos f ja g ovat derivoituvia funktioita, niin*

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

3 Integroimistekniikkoja

3.1 Rationaalifunktioiden integointi

Rationaalifunktio $R(x)$ on muotoa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomifunktioita. Jos $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ eli polynomin P aste on suurempi kuin polynomin Q, niin esimerkiksi jakokulmassa laskemalla saadaan esitys

$$R(x) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

missä $\deg P_1(x) < \deg Q(x)$ (todistus Algebra I:ssä). Polynomi $P_0(x)$ on helposti integoitavissa, joten rationaalifunktioiden integroinnin ongelmana on selvittää miten integrointi suoritetaan, kun $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Tapaus: $P(x) = kQ'(x)$

Jos osoittajassa oleva polynomifunktio on $P(x) = kQ'(x)$, missä $k \in \mathbb{R}$ vakio, niin integrointikaavojen perusteella

$$\int \frac{kQ'(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = k \int \frac{Q'(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = k \ln |Q(x)| + C.$$

Muissa tapauksissa täytyy tutkia tarkemmin polynomin $Q(x)$ nollakohtia, joiden avulla polynomi voidaan jakaa tekijöihin. Reaalikertoimisen polynomin $Q(x)$ algebrallisten ominaisuuksien perusteella sillä on $n = \deg Q(x)$ kappaletta kompleksisia nollakohtia. Lisäksi jos kompleksiluku $c = a + bi$ on polynomin Q nollakohta, niin myös sen konjugaatti $\bar{c} = a - bi$ on polynomin Q nollakohta. Täten reaalilukukunnassa polynomi voidaan aina esittää ensimmäisen ja toisen asteen tekijöiden tulona.

Tapaus: Polynomi $Q(x) = (x - x_1)^n$, missä $x_1 \in \mathbb{R}$

Tällöin osamurtokehitelmä kirjoitetaan muotoon

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^n} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n},$$

missä kertoimet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on vielä määrättävä.

Esimerkiksi polynomin $Q(x) = (x-2)^3$ osamurtokehitelmä on

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}.$$

Tapaus: Polynomilla $Q(x)$ on reaaliset juuret

Nyt polynomi voidaan esittää tulona

$$Q(x) = (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}.$$

Tällöin osamurtokehitelmässa jokaista termiä $(x-x_i)^{n_i}$ kohti otetaan, kuten edellisessä kohdassa osamurto

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{in_i}}{(x-x_i)^{n_i}}.$$

Osamurtokehitelmäksi tulee siten näiden summa

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{in_i}}{(x-x_i)^{n_i}}\right).$$

Esimerkiksi jos $Q(x) = x^2(x+1)(x-3)^3$, niin osamurtokehitelmäksi tulee

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3}.$$

Tapaus: Polynomilla $Q(x)$ on kompleksisia juuria

Jos polynomilla $Q(x)$ on myös imaginäärisiä juuria, niin ne esiintyvät aina pareittain $c = a + bi$ ja $\bar{c} = a - bi$. Tällöin polynomin erääksi tekijäksi tulee toisen asten polynomi

$$(x-c)(x-\bar{c}) = x^2 - cx - \bar{c}x + c\bar{c} = x^2 - \underbrace{2a}_{r}x + \underbrace{(a^2+b^2)}_{t}.$$

Tällöin osamurtokehitelmään otetaan termi

$$\frac{Ax+B}{x^2+rx+t}.$$

Mikäli kompleksinen juuri c ja esiintyy $k>1$ kertaa polynomissa, niin myös termi $(x+rx+t)$ jakaa polynomin k kertaa. Tällöin osamurtoon tulee summa

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+rx+t}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+rx+t)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+rx+t)^k}.$$

Reaaliset juuret käsitellään kuten edellisessä tapauksessa.

Esimerkiksi jos $Q(x)=(x+i)^2(x-i)^2(x-2)^3=(x^2+1)^2(x-2)^3$, niin osamurtokehitelmäksi tulee

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}.$$

Osamurtokehitelmissä esiintyvät kertoimet saadaan ratkaistuiksi, kun kerrotaan molemmat puolet polynomilla $Q(x)$. Asettamalla syntyneiden polynomien muuttujan x samojen potenssien kertoimet yhtäsuuriksi saadaan yhtälöryhmä, josta kertoimet ovat ratkaistavissa.

3.2 Integrointi sijoituksen avulla

Lause. *Jos funktio $g:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva ja funktio f on jatkuva kuvajoukossa $g([a,b])$, niin*

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

Käytännössä lausetta sovelletaan usein, niin että laskettaessa integraalia

$$I=\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)\mathrm{d}x$$

valitaan $t=g(x)$. Tästä lasketaan differentiaaliksi $\mathrm{d}t=g'(x)\mathrm{d}x$ ja integroimisrajoiksi alkuperäisiä arvoja a ja b vastaaavat t:n arvot $t_1=g(a)$ ja $t_2=g(b)$. Sijoittamalla nämä saadaan integraali

$$I=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Toinen tapa, mikäli integraali

$$I = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

on hankala laskea, on valita $x = g(t)$ ja laskea $\mathrm{d}x = g'(t)\mathrm{d}t$. Sijoittamalla nämä saadaan

$$I = \int_a^b f\left(g(t)\right) g'(t)\mathrm{d}t,$$

missä $c = g(a)$ ja $d = g(b)$ ovat uudet integroimisrajat.

Määrättyihin integraaleihin sijoitettaessa funktion g ei tarvitse olla bijektio, riittää vain, että on olemassa sellaiset arvot a ja b, että ehdot $a = g(c)$ ja $b = g(d)$ toteutuvat. Tietenkin, jos g on bijektio, niin on olemassa käänteisfunktio g^{-1}, joilloin $a = g^{-1}(c)$ ja $b = g^{-1}(d)$.

Sijoitettaessa määräämättömään integraaliin funktion g täytyy olla bijektio. Tämä siksi, että integroinnin onnistuttua voidaan alkuperäinen muuttuja palauttaa käänteisfunktion avulla saatuun integraalifunktioon. Mikäli sijoitus johtaa helpompaan integrointiin ja siten saadaan laskettua integraalifunktio, niin sen oikeellisuus voidaan aina tarkistaa derivoimalla se ja katsomalla saadaanko tulokseksi integroitava funktio. Täten integoimistekniikan muodollinen pätevyys ei ole niin tärkeä, koska määräämättömän integroinnin tuloksen voi aina tarkistaa derivaatan avulla.

Sijoitus $x = a\sin t$, $a > 0$.

Jos integroitavassa funktiot ovat $\sqrt{a^2 - x^2}$ tai $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, niin voidaan käyttää sijoitusta $x = a\sin t$. Nyt $-a \leq x \leq a$, joten sijoitus on järkevä, kun $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tällöin

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t}.$$

Koska $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, niin $\cos t \geq 0$ ja

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t.$$

Lisäksi

$$t = \arcsin \frac{x}{a} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{d}x = a \cos t \mathrm{d}t,$$

missä $t = \arcsin \frac{x}{a}$ on päähaaran arvo.

Sijoitus $t = x + \sqrt{x^2 + a}$, $a > 0$.

Jos integroitavassa on termi $\sqrt{x^2 + a}$, niin sijoitus $t = x + \sqrt{x^2 + a}$ voi johtaa rationaalifunktion integoitiin. Tällöin laskemalla saadaan, että

$$\begin{aligned} & t - x = \sqrt{x^2 + a} \\ \Rightarrow \quad & t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + a \\ \Rightarrow \quad & x = \frac{t^2 - a}{2t}. \end{aligned}$$

Derivoimalla tämä saadaan differentiaaliksi

$$\mathrm{d}x = \frac{t^2 - a}{2t^2} \mathrm{d}t.$$

Sijoitus $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}$.

Jos integraalissa on $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}$, niin sijoitus $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}$ saattaa johtaa rationaalifunktion integrointiin.

Sijoitus $x = \tan \frac{t}{2}$.

Jos $x = \tan \frac{t}{2}$, niin piirtämällä suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat x ja 1 sekä toinen terävä kulma $\frac{t}{2}$. Tällöin kolmion hypotenuusa on $\sqrt{1 + x^2}$, $\sin \frac{t}{2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ja $\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Trigonometristen funktioiden kaksinkertaisten kulmien kaavoista saadaan, että

$$\sin t = \frac{2x}{1 + x^2}, \qquad \cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{d}t = \frac{2}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

Tämä sijoitus saattaa sieventää sopivasti integroitavia funktioita, joiden osoittajassa ja nimittäjässä on sini- ja kosinifunktioita.

Tässä esitellyt sijoitukset eivät ole ainoita mahdollisia sijoituksia, vaan esimerkkejä sijoitustekniikoista. Virallisesti ”oikeata” sijoitusta ei ole olemassa, vaan mikä tahansa sijoitus käy kunhan integraali vain ratkeaa. Jotkut tekniikoista voivat tosin johtaa huomattavasti helpompiin integraaleihin kuin toiset. Usein kannattaa kokeilla eri tyyppisiä sijoituksia, kunnes sopiva löytyy.

4 Epäoleelliset integraalit

Nimestään huolimatta epäoleelliset integraalit (englanniksi improper integrals) ovat tärkeitä. Ne määritellään tavallisen määrätyn integraalin raja-arvoiksi.

Integroituvaa funktiota määriteltäessä oletettiin, että funktio $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ on rajoitettu eli on olemassa sellainen vakio $K > 0$, että $|f(x)| \leq K$. Epäoleellisten integraalien avulla voidaan laajentaa tarkasteltavissa olevien määrättyjen integraalien tapauksia tilanteisiin, joissa funktio f ei välttämättä olekaan rajoitettu integrointivälillä tai integrointiväli ei olekaan rajoitettu.

Ensimmäisen tyypin epäoleellisissa integraaleissa integroimisväliä ei ole rajoitettu toisesta päistä. Olkoon funktio f integroituva jokaisella välillä $[a, c]$, missä a on kiinteä ja $c > a$ (vastaavasti väleillä $[c, a]$, missä $c < a$). Määritetään, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{vastaavasti } \int_\infty^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

tarkoittaa raja-arvoa

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{vastaavasti } \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right),$$

mikäli se on olemassa.

Toisen tyypin epäoleellisissa integraaleissa integroitava funktio ei ole rajoitettu integroitumisvälillä. Olkoon funktio f integroituva jokaisella välillä $[a, t]$, missä $a < t < c$ (vastaavasti väleillä $[t, a]$, missä $c < t < a$). Määritetään, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{vastaavasti } \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

tulee tarkoittamaan raja-arvoa

$$\lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{vastaavasti } \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

Epäoleellisen integraalin sanotaan suppenevan, mikäli raja-arvo on olemassa äärellisenä. Muutoin epäoleellinen integraali hajaantuu.

Huomautus. Jos funktion f integraalifunktio on F, niin esimerkisi ensimmäisen tyypin epäoleellinen integraali on raja-arvo

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} F(c) - F(a).$$

Vastaavasti kaikki muutkin tapaukset voidaan palauttaa integraalifunktion raja-arvoon.

Yleisessä tapauksessa epäoleellisessa integraalissa voi olla useampia pisteitä, joissa funktion arvoa ei ole rajoitettu taikka integroimisväliä ei ole rajoitettu kummassakaan päässä. Tällöin integoimisväli jaetaan pienempiin osaväleihin, niin että jokaiselle osavälille tulee vain yksi epäoleellinen integraali. Tällöin epäoleellinen integraali suppenee vain jos kaikki raja-arvot ovat olemassa.

Huomautus. Mikäli funktio F on funktion f integraalifunktio ja pisteet $x = a$ ja $x = b$ ovat funktion f integroinnin ongelmakohdat, niin määrätyn integraalin ominaisuuksien perusteella

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{t_1\to a^+}\int_{t_1}^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t_2\to b^-}\int_c^{t_2} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t_1\to a^+} F(t_1) - F(c) + F(c) - \lim_{t_2\to b^-} F(t_2)\\ &= \lim_{t_1\to a^+} F(t_1) - \lim_{t_2\to b^-} F(t_2)\end{aligned}$$

Tutkittaessa yleistä tapausta epäoleellisesta integraalista välin jakopiste $c \in]a, b[$ voidaan valita vapaasti, koska se ei tule vaikuttamaan tulokseen.

Koska joidenkin funktioiden integraalifunktion keksiminen on erittäin hankalaa, suppenemistestejä tarvitaan, että epäoleellisten integraalien tarkastelut voidaan palauttaa tuttuihin funktioihin. Kun tiedetään, että epäoleellinen integraali suppenee, voidaan sen arvo määritellä numeerisillä menetelmillä.

Majorantti- ja minoranttiperiaate. *Olkoon f ja g integroitovia funktioita, joille $0 \leq f(x) \leq g(x)$ aina, kun $x \geq a$.*
Jos epäoleellinen integraali $\int\limits_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ suppenee, niin myös epäoleellinen integraali

$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *suppenee ja*

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x.$$

Jos epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *hajaantuu, niin myös epäoleellinen integraali* $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ *hajaantuu.*

Vastaava lause toisen tyypin epäoleellisille integraaleille on:

Majorantti- ja minoranttiperiaate. *Olkoon* f *ja* g *jokaisella välillä* $[a,c]$, $a < c < b$, *integroituvia funktioita, joille* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *aina, kun* $a \leq x < b$ *(vastaavasti* $a < x \leq b$*).*

Jos epäoleellinen integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *suppenee, niin myös epäoleellinen integraali* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *suppenee ja*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Jos epäoleellinen integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *hajaantuu, niin myös epäoleellinen integraali* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *hajaantuu.*

Suoraan laskemalla saadaan seuraava tulos, josta saadaan suppenemistarkasteluja varten minorantti- ja majoranttifunktioita.

Lause. *Epäoleellinen integraali*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\mathrm{d}x$$

suppenee jos ja vain jos $s > 1$. *Epäoleellinen integraali*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\mathrm{d}x$$

suppenee jos ja vain jos $s < 1$.

Ensimmäisen tyypin integraaleille vertailuperiaate on:

Vertailuperiaate. *Olkoon f ja g ovat positiivisia jatkuvia funktioita jokaisella välillä $[a, x]$, missä $a < x$. Jos*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0,$$

niin integraalit $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ja $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ joko suppenevat tai hajaantuvat kumpikin.

Vastaavalla tavalla lause voidaan muotoilla kun integroimisväliä ei ole alhaalta rajoitettu.

Toisen tyypin integraaleille vertailuperiaate on:

Vertailuperiaate. *Olkoon f ja g ovat positiivisia jatkuvia funktioita jokaisella välillä $[a, x]$, missä $a \leq x < b$. Jos*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0,$$

niin integraalit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ja $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ joko suppenevat tai hajaantuvat kumpikin.

4.1 Itseinen suppeneminen

Edellä mainitut suppenemistestit tarkastelivat vain positiivisia funktioita. Negatiivisten funktioiden epäoleellisia integraaleja voidaan tarkastella, kun sovelletaan suppenemistestejä funktioon $-f(x)$. Yleisessä tapauksessa epäoleellisen integraalin suppeneminen voidaan todeta joissain tapauksissa tarkastelemmalla itseistä suppenemista.

Olkoon

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

mielivaltainen epäoleellinen integraali (täten voi olla myös $a = -\infty$ ja/tai $b = \infty$). Sen sanotaan suppenevan itseisesti, mikäli epäoleellinen integraali

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

suppenee.

Lause. *Jos epäoleellinen integraali suppenee itseisesti, niin se myös suppenee.*

Lause ei päde toiseen suuntaan. Esimerkiksi epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

suppenee, mutta ei itseisesti. Täten epäoleellisen integraalin itseinen hajaantuminen ei anna suoraa tietoa normaalista suppenemisesta.