1 Reaaliset lukujonot

Reaaliset lukujonot ovat funktioita $f : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Lukujonosta käytetään merkintää $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ tai lyhyemmin vain (a_k). missä $a_k = f(k)$. Täten lukujonot ovat nimensä mukaisesti vain äärettömän monta lukua lueteltuna tietyssä järjestyksessä.

Lukujonon määrittelevän funktion lähtöjoukoksi voidaan periaatteessa valita luonnollisten lukujen $\mathbb{Z}_+$ sijasta mikä tahansa numeroituvasti ääretön joukko. Numeroituvuuden perusteella on näiden joukkojen ja luonnollisten lukujen välillä on olemassa bijektio, joilloin joukkojen alkioilla yksi yhteen vastaavuus. Tällöin kuitenkin järjestyksen kanssa voi tulla ongelmia, koska esimerkiksi kokonaislukujen joukolla $\mathbb{Z}$ ei ole pienintä alkiota. Mutta esimerkiksi joukot $\mathbb{N}$, $\{-8, -7, -6, \ldots\}$ tai $\{101, 102, 103, \ldots\}$ käyvät ihan yhtä lukujonojen määritysjoukoksi. Topologian kurssilla laajennetaan jonojen käsitettä verkoilla (englanniksi nets), joiden indeksijoukkona voi olla myös ylinumeroituvia järjestettyjä joukkoja.

Määritelmä on helppo laajentaa käsittämään myös kompleksiset lukujonot. Valitaan maalijoukoksi vain kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$, eli jonon termit a_k ovat kompleksilukuja. Näitä käsitellään enemmän kompleksianalyysin kursseilla.

1.1 Suppeneminen ja Cauchyn jonot

Lukujono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa a, mikäli jokaista lukua $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen vakio $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } n > n_\epsilon$$

Tällöin merkitään $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ tai $a_n \to a$, kun $n \to \infty$. Mikäli lukujono ei suppene mitään lukua $a \in \mathbb{R}$ kohti sanotaan, että se hajaantuu.

Lukujonoa (a_n) sanotaan Cauchyn jonoksi, mikäli jokaista lukua $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen vakio $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|a_n - a_m| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } n, m > n_\epsilon$$

Cauchyn kriteeri. *Lukujono $(a_n) \subset \mathbb{R}$ suppenee jos ja vain jos se on Cauchyn jono.*

Tulos on tärkeä, koska nyt voidaan osoittaa jonon suppenevan ilman, että jonon raja-arvo tunnetaan. Suoraan määritelmän perustuvaan todistustahan varten jonon raja-arvo on tunnettava ennenkuin todistus voidaan suorittaa. Esimerkiksi joidenkin sarjojen osasummien jonon raja-arvon laskeminen on huomattavan vaikeaa, mutta sarjan osasummien jonon osoittaminen Cauchyn jonoksi huomattavasti helpompi tehtävä.

Cauchyn jonot eivät suppene kaikissa avaruuksissa, sillä voidaan konstruoida avaruuksia, joissa on olemassa ei-suppenevia Cauchyn jonoja. Esimerkkinä käy rationaalilukujen joukko. Esimerkiksi jono $(3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; ...)$ koostuu rationaaliluvuista, mutta se suppenee kohti irrationaalista lukua π. Se on siis ei-suppeneva Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{Q}$. Avaruuksia, joissa Cauchyn kriteerin on voimassa kutsutaan täydellisiksi. Näitä ja epätäydellisiä avaruuksia käsitellään enemmän Topologian ja Analyysi III:n kurssilla.

Huomautus. Eräs tapa määritellä reaaliluvut rationaalilukujen avulla on ”täydellistää” rationaaliluvut eli luoda rationaalilukujen pohjalta uusi avaruus, jossa Cauchyn jonot suppenevat.

1.2 Monotoniset ja rajoitetut jonot

Lukujono (a_n) on

- aidosti kasvava, mikäli $a_{n+1} > a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$
- aidosti vähenevä, mikäli $a_{n+1} < a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$
- kasvava, mikäli $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$
- vähenevä, mikäli $a_{n+1} \leq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$

Lukujono (a_n) on ylhäältä rajoitettu, mikäli on olemassa sellainen luku $M \in \mathbb{R}$, että $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Vastaavasti lukujono (a_n) on alhaalta rajoitettu, mikäli on olemassa sellainen luku $M \in \mathbb{R}$, että $a_n \geq M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lukujono (a_n) on rajoitettu, mikäli se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu eli on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $|a_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lause. *Jos lukujono (a_n) suppenee, niin se on rajoitettu.*

Seuraava lause erittäin hyödyllinen tarkasteltaessa monotonisten jonojen suppenemista.

Lause. *Jos lukujono (a_n) on monotoninen ja rajoitettu, niin se suppenee.*

Lausetta käytetään yleensä suppenemistarkasteluissa niin, että jonon kasvavuudesta ja ylhäältä rajoitteneisuudesta päätellään jonon suppeneminen (vastaavasti vähenevyydestä ja alhaalta rajoitteneisuudesta). Kääntäen lause sanoo, että jos lukujono hajaantuu, niin se ei ole monotoninen tai se ei ole rajoitettu.

1.3 Osajonot

Lukujono (b_n) on lukujonon (a_n) osajono, mikäli on olemassa sellainen aidosti kasvava funktio $\theta : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{Z}_+$, että $b_n = a_{\theta(n)}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Täten mielivaltaisen lukujonon (a_n) kaikki osajonot saadaan poistamalla jonosta (a_n) alkioita, kuitenkin niin että jäljelle jää äärettömän monta alkiota muodostamaan jonon. Osajono on siis aito jono, jonka alkiot ovat alkuperäisen jonon alkioita alkioiden keskenäisen järjestyksen säilyttäen. On siis luonnollista, että

Lause. *Jos jono (a_{n_k}) on jonon (a_n) osajono ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$*

Toisinpäin tulos ei päde. Osajonon suppenemisen avulla ei voidan välttämättä sanoa mitään jonon suppenemisesta. Toisaalta, jos jonolla on useampia osajonoja, jotka suppenevat kohti erisuuria raja-arvoja, niin jonon täytyy hajaantua.

Lause. *Jos jono (a_n) on rajoitettu, niin sillä on suppeneva osajono.*

Tätä rajoitettujen jonojen ominaisuutta voidaan tarkentaa seuraavalla lauseella.

Lause. *Jokaisella lukujonolla $(a_n) \subset \mathbb{R}$ on monotoninen osajono. Jos lukujono (a_n) on rajoitettu, niin kyseinen monotoninen osajono suppenee.*

1.4 Jonojen algebraa

Lause. *Jos* $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ *ja* $\lim_{k\to\infty} b_k = b$, *niin*

1. $\lim_{k\to\infty}(a_k + b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} b_k = a + b$
2. $\lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k = a - b$
3. $\lim_{k\to\infty}(a_k b_k) = (\lim_{k\to\infty} a_k)(\lim_{k\to\infty} b_k) = ab$
4. $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\lim_{k\to\infty} a_k}{\lim_{k\to\infty} b_k} = \frac{a}{b}$, *mikäli* $b \neq 0$.

Jonoja voidaan käyttää myös toistensa arvioinnissa ja tästä hyvänä esimerkkinä toimii puristus- tai voileipälauseen nimellä tunnettu tulos.

Lause. *Jos* $a_k \leq c_k \leq b_k$ *kaikilla* $k \in Z_+$ *ja* $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$, *niin jono* (c_k) *suppenee ja* $\lim_{k\to\infty} c_k = c$.

1.5 Rekursiiviset lukujonot

Lukujono (a_n) voidaan määritellä myös rekursiivisesti, jolloin annetaan jonon ensimmäinen alkio a_1 ja rekursiofunktio $h : \{a_n\} \mapsto \mathbb{R}$, jonka avulla jonon muut termit säädään määrättyä eli

$$a_{k+1} = h(a_k) \qquad \text{kaikilla } k \in Z_+$$

Tutkittaessa rekursiivisesti määriteltyä lukujonoa (a_n) kannattaa yleensä ensimmäiseksi olettaa, että lukujono (a_n) suppenee kohti lukua a ja johtaa tämän avulla vaihtoehdot mitä lukuja kohti jono voi supeta. Helpointa tämä on ratkaisemalla yhtälö

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Tämän jälkeen kannattaa ruveta tutkimaan suppeneeko jono, sillä saatu tietoa mahdollisista raja-arvoista voi käyttää hyväkseen suppenemistodistuksessa. Esimerkiksi, mikäli rekursiivinen lukujono on kasvava, niin mikäli voidaan osoittaa, että eräs saaduista raja-arvoehdokkaista rajoittaa jonoa ylhäältä, niin lukujonon täytyy supeta (mutta ei välttämättä tätä lukua kohti).

2 Limes superior ja limes inferior

Olkoon $(a_n) \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen rajoitettu reaalinen lukujono. Muodostetaan uudet lukujonot

$$s_k = \sup_{n \geq k} a_n \qquad \text{ja} \qquad i_k = \inf_{n \geq k} a_n.$$

Tällöin jonon (a_n) limes superior on

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k$$

ja limes inferior on

$$i = \lim_{k \to \infty} i_k.$$

Huomautus. Rajoitusehto on tärkeä, sillä esimerkiksi mikäli jonoa (a_n) ei ole ylhäältä rajoitettu, niin jonoa (s_k) ei voida muodostaa, koska sen jokainen alkio olisi ääretön.

Limes superior ja limes inferior tarjoavat toisenlaisen tavan tarkastella jonojen ominaisuuksia ja näiden avulla voidaan esimerkiksi todistaa Cauchyn kriteeti ja muita jonoihin liittyivä tärkeitä tuloksia. Lisäksi ne antavat näppärän suppenemiskriteerin.

Lause. *Lukujono (a_n) suppenee jos ja vain jos $s = i$*

Huomautus. Koska kaikki suppenevat jonot ovat rajoitettuja, niin jokainen rajoittaton jono hajaantuu. Täten edellinen lause on mielekäs myös rajoittamattomille jonoille, koska silloin joko lukua s tai i ei ole olemassa.