Perustehtävät

Tehtävä 1. Muotoile matemaattiset vastineet seuraavien väitteiden negaatioille (ts. vastakohdat).

1. Jono (a_n) suppenee kohti lukua a.
2. Jono (a_n) on kasvava.
3. Jono (a_n) on rajoitettu.

Tehtävä 2. Osoita tarkasti, että seuraavat jonot (a_k) suppenevat

1. $a_k = \frac{\sin k}{k}$
2. $a_k = \frac{k}{2k-5}$

Tehtävä 3. Määrää seuraavien jonojen raja-arvot

1. $\frac{k+1}{k^2+1}$
2. $\frac{k-\sqrt{4k^2+1}}{3k+2}$
3. $\sqrt{k}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k-1}\right)$

Tehtävä 4. Osoita, että jos jono suppenee, niin sen raja-arvo on yksikäsitteinen.

Tehtävä 5. Ovatko väitteet tosia?

1. Jos jono (a_n) suppenee kohti lukua a, niin jono $(|a_n|)$ suppenee kohti lukua $|a|$.
2. Jos jono $(|a_n|)$ suppenee kohti lukua $|a|$, niin jono (a_n) suppenee kohti lukua a.
3. Jos jono (a_n) suppenee ja jono (b_n) hajaantuu, niin jono (a_n+b_n) hajaantuu.
4. Jos jonot (a_n) ja (b_n) hajaantuvat, niin jono $(a_n + b_n)$ hajaantuu.

Tehtävä 6. Osoita, että jokainen suppeneva jono on myös Cauchyn jono.

Tehtävä 7. Osoita, että seuraavat jonot (a_k) ovat Cauchyn jonoja.

1. $a_k = \frac{k+1}{k}$
2. $a_k = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^2} + \ldots + \frac{k}{k^2}$
3. $a_k = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}$

Tehtävä 8. Tiedetään, että jonon (a_n) alkiot toteuttavat ehdon

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}.$$

Suppeneeko jono?

Tehtävä 9. Mitä voidaan sanoa jonon a_n suppenemisesta, mikäli

1. jokainen reaaliluku esiintyy jonossa korkeintaan äärellisen monta kertaa (voi siis olla, että luku ei esiinny jonossa ollenkaan)
2. täsmälleen yksi luku esiintyy jonossa äärettömän monta kertaa ja muut luvut korkeintaan äärellisen monta kertaa
3. useampi kuin yksi luku esiintyy jonossa äärettömän monta kertaa

Tehtävä 10. (Neliöjuuren laskeminen rekursiivisesti) Olkoon $x > 0$ mielivaltainen ja määritellään rekursiivinen jono (a_n). Olkoon $a_1 > \sqrt{x}$ ja

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}}{2}$$

jokaiselle $n = 2, 3, 4, \ldots$ Osoita, että jono suppenee ja $\lim_{k\to\infty} a_k = \sqrt{x}$.

Vaativammat tehtävät

Tehtävä 11. Osoita, että jos lukujono ei ole ylhäältä rajoitettu, niin se hajaantuu.

Tehtävä 12. Osoita suoraan määritelmien perusteella.

1. Jos jono (a_n) on Cauchyn jono, niin se on rajoitettu.
2. Jos Cauchyn jonolla (a_n) on suppeneva osajono (a_{n_k}), niin jono (a_n) suppenee.

Mieti mitä vielä tarvitaan osoittamaan, että jokainen Cauchyn jono suppenee.

Tehtävä 13. Konstruoi jono, jolla on jokaista rationaalilukua $q \in \mathbb{Q}$ kohti olemassa osajono, jossa tämä rationaalilukua q esiintyy äärettömän monta kertaa. Suppeneeko tämän jonon jokainen osajono? Ota mielivaltainen suppeneva osajono. Suppeneeko se välttämättä kohti rationaalilukua?

Vinkkejä perustehtäviin

Tehtävä 1. Lähde tarkoista määritelmistä ja mieti mitä tarvitaan, että ehto rikkoutuisi. Ole tarkka termien ”jokaisella” ja ”on olemassa” kanssa.

Tehtävä 2.

1. Käytä arviota $|\sin k| \leq 1$ todistaaksesi, että jono suppenee kohti lukua 0.
2. Osoita, että jono suppenee kohti lukua $\frac{1}{2}$. Lavenna nimittäjät itseisarvojen sisällä samannimisiksi ja sievennä.

Tehtävä 3.

1. Supista korkeimman potenssin sisältävällä termillä
2. Käytä apuna kaavaa $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ neliöjuurten supistamiseksi.
3. Yritä hankkiutua neliöjuurista eroon sopivalla sievennyksellä.

Tehtävä 4. Tee vastaoletus, että jonolla olisi kaksi erisuurta raja-arvoa ja käytä suppenemisen määritelmää näihin.

Tehtävä 5.

1. Mieti asiaa kolmioepäyhtälöä käyttäen
2. Koeta keksiä vastaesimerkki väitteelle.
3. Mieti mitä tapahtuu, jos väite ei olisi tosi.
4. Mieti sopivaa vastaesimerkkiä, jossa termit kumoaisivat toisensa sopivasti.

Tehtävä 6. Lisää ja vähennä lausekkeessa $|a_n - a_m|$ sopiva luku ja käytä kolmioepäyhtälöä.

Tehtävä 7.

1. Osoita suoraan määritelmän nojalla tai osoita, että jono suppenee ja käytä Cauchyn kriteeriä.
2. Käytä tulosta $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ ja edellistä kohtaa.
3. Yritä muodostaa sopiva geometrinen sarja.

Tehtävä 8. Osoita ehdon täyttävän jonon olevan Cauchyn jono. Kehitä sopiva geometrinen sarja.

Tehtävä 9. Mieti yksinkertaisia esimerkkejä.

Tehtävä 10. Osoita induktiivisesti, että $a_n \geq \sqrt{x}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja jono (a_n) on vähenevä.

Vinkkejä vaativampiin tehtäviin

Tehtävä 11. Tee vastaoletus

Tehtävä 12.

1. Valitse esimerkiksi $\epsilon = 1$ ja sitten määrää jonolle sopiva ylä-raja.
2. Valitse $\epsilon > 0$ mielivaltaiseksi. Nyt poimi sellainen suppenevan osajonon termi, että se on sopivalla indeksillä korkeintaan etäisyydellä $\frac{\epsilon}{2}$ osajonon raja-arvosta ja jonon hännän termeistä. Sen jälkeen sovella vain kolmio-epäyhtälöä.

Tehtävä 13. Käytä hyväksi esimerkiksi sitä, että rationaalilukujen esitys $\frac{p}{q}$ ei ole yksikäsitteinen. Apuna voi käyttää myös tietoa, että positiivisen kokonaisluvun esitys alkulukujen tulona on yksikäsitteinen.

Perustehtävien ratkaisut

Tehtävä 1. 1. Pitäisi siis sanoa, että jono (a_n) ei suppene kohti lukua a. Silloin on olemassa sellainen $\epsilon > 0$, että jokaista lukua $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$ kohti on olemassa sellainen luku $n \geq n_\epsilon$, että

$$|a_n - a| \geq \epsilon$$

2. Jono (a_n) ei ole kasvava, kun on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $a_{n+1} < a_n$.
3. Jono (a_n) ei ole rajoitettu eli jokaista $M > 0$ kohti on olemassa jokin sellainen $n \in \mathbb{Z}_+$, että $|a_n| > M$.

Tehtävä 2. 1. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $|\sin k| \leq 1$, niin jono näyttäisi suppenevan kohti lukua 0. Lisäksi

$$\left|\frac{\sin k}{k} - 0\right| \leq \left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} < \epsilon$$

aina, kun

$$k > \frac{1}{\epsilon}.$$

Valitsemalla sellainen $k_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$, että $k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$ saadaan

$$\left|\frac{\sin k}{k} - 0\right| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } k > k_\epsilon.$$

Siis $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\sin k}{k} = 0$.

2. Koska

$$\frac{k}{2k-5} = \frac{2k-5-k+5}{2k-5} = 1 - \frac{k-5}{2k-5},$$

niin valistunut arvaus raja-arvoksi on $\frac{1}{2}$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt

$$\begin{aligned}\left|\frac{k}{2k-5} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{k}{2k-5} - \frac{k-\frac{5}{2}}{2k-5}\right| \\ &= \left|\frac{\frac{5}{2}}{2k-5}\right| \\ &= \frac{1}{\frac{4}{5}k+2} < \epsilon.\end{aligned}$$

Siis voidaan valita sellainen $k_\epsilon > \frac{5}{4\epsilon} - \frac{5}{2}$, missä $k_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$, jolloin yllä oleva ehto pätee aina, kun $k > k_\epsilon$.

Tehtävä 3. 1. Kun $k \to \infty$, niin

$$\frac{k+1}{k^2+1} = \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^2}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

2. Nyt

$$\begin{aligned}\frac{k - \sqrt{4k^2+1}}{3k+2} &= \frac{k^2 - 4k^2 - 1}{(3k+2)(k + \sqrt{4k^2+1})} \\ &= \frac{-3k^2 - 1}{3k^2 + 3k\sqrt{4k^2+1} + 2k + 2\sqrt{4k^2+1}} \\ &= \frac{-3 - \frac{1}{k^2}}{3 + 3\sqrt{4 + \frac{1}{k^2}} + \frac{2}{k} + \sqrt{\frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^4}}} \\ &\to \frac{-3}{3 + 3\sqrt{4}} = \frac{-1}{1+2} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

kun $k \to \infty$.

3. Sieventämällä huomataan, että

$$\begin{aligned}\sqrt{k}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k-1}\right) &= \sqrt{k}\frac{k+2-k+1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k-1}} \\ &= \frac{3}{\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{\frac{k+2}{k}} + \sqrt{\frac{k-1}{k}}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{k}} + \sqrt{1 - \frac{1}{k}}} \\ &\to \frac{3}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

kun $k \to \infty$.

Tehtävä 4. Oletetaan, että jono (a_n) suppenee. Merkitään $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ ja $\lim_{k\to\infty} a_k = b$. Tehdään vastaoletus, että $a \neq b$. Suppenemisen määritelmän nojalla jokaista lukua $\epsilon > 0$, erityisesti lukua $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$, kohti on olemassa sellaiset luvut $k_a, k_b \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_k - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } k > k_a$$

ja

$$|a_k - b| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } k > k_b.$$

Valitaan $k_0 = \max\{k_a, k_b\}$. Kolmioepäyhtälöä soveltamalla saadaan, että kun $k > k_0$, niin

$$|a - b| = |a - a_k + a_k - b| \leq |a_k - a| + |a_k - b| < \epsilon + \epsilon = |a - b|,$$

mikä on ristiriita. Vastaoletus $a \neq b$ on siis väärä, joten $a = b$. Siis raja-arvon täytyy olla yksikäsitteinen.

Tehtävä 5.

1. Koska $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{aina, kun } n > n_\epsilon.$$

Kolmioepäyhtälön perusteella

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$$

joten väite pätee selvästi.

2. Jono $(|a_n|)$, missä $a_n = (-1)^n$ suppenee selvästi kohti lukua 1, mutta jono (a_n) hajaantuu.

3. Väite on tosi. Tehdään vastaoletus, että jono $(a_n + b_n)$ suppenee ja olkoon $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = x$. Olkoon lisäksi $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Tällöin

$$\begin{aligned} x - a &= \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n - a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} b_n, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita jonon (b_n) hajaantumisen kanssa.

4. Väite ei ole tosi aina, sillä jos esimerkiksi $a_n = n$, niin jonot (a_n) ja $(-a_n)$ hajaantuvat, mutta jono $(a_n - a_n)$ suppenee.

Tehtävä 6. Olkoon (a_n) mielivaltainen suppeneva jono. Olkoon sen raja-arvo luku a. Valitaan luku $\epsilon > 0$ mielivaltaiseksi. Nyt on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad\qquad \text{aina, kun } n > n_0.$$

Olkoon luvut $n, m > n_0$ mielivaltaisia. Nyt kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan, että

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Täten jokainen suppeneva jono on myös Cauchyn jono.

Tehtävä 7. 1. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $n, p \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Nyt

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{n+p+1}{n+p} - \frac{n+1}{n} \right| \\
&= \left| 1 + \frac{1}{n+p} - 1 - \frac{1}{n} \right| \\
&= \left| \frac{n-n-p}{n(n+p)} \right| \\
&= \frac{p}{n(n+p)} < \frac{n+p}{n(n+p)} = \frac{1}{n} < \epsilon
\end{aligned}$$

aina, kun $n > n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, missä $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$ ja $p \in \mathbb{Z}_+$. Täten jono on Cauchyn jono. Tietenkin toisena tapana olisi osoittaa jono suppenevaksi ja käyttää tulosta, että jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono.

2. Koska $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (todistus esimerkiksi induktiolla), niin

$$a_k = \frac{1 + 2 + \ldots + k}{k^2} = \frac{k(k+1)}{2k^2} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2}\frac{k+1}{k}.$$

Koska $\frac{1}{2}\frac{k+1}{k}$ on edellisen kohdan jono kerrottuna vakiolla, niin se myös on Cauchyn jono.

3. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $n, p \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Nyt

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \right| \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+p)} \right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^p} \right),
\end{aligned}$$

koska $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \ldots > \frac{1}{n+p}$. Sulkeisiin saatiin siis muodostettua geometrinen sarja. Geometrisen sarjan summan perusteella

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^p}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{(n+1)! - n!} = \frac{1}{n!(n+1-1)} = \frac{1}{n!n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon
\end{aligned}$$

aina, kun $n > n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, missä $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$ ja $p \in \mathbb{Z}_+$. Täten jono on Cauchyn jono ja se suppenee. Eräs tapa määritellä luku e on antaa se raja-arvona

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Jono suppenee, joten määrittely on mielekäs.

Tehtävä 8. Osoitetaan, että jono (a_n) on Cauchyn jono. Olkoon $n, p \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Nyt kolmioepäyhtälöllä saadaan, että

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + a_{n+p-1} - a_{n+p-2} + a_{n+p-1} - \ldots + a_{n+1} - a_n| \\
&\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&< \frac{1}{2^{n+p-1}} + \frac{1}{2^{n+p-2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + \ldots + 1 \right).
\end{aligned}$$

Geometrisen summan kaavan perusteella siis

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Täten jono (a_n) on Cauchyn jono ja se suppenee Cauchyn kriteerin nojalla.

Tehtävä 9.

1. Jono voi supeta tai hajaantua. Jono (a_k), missä $a_k = \frac{1}{k}$, suppenee ja luku voi esiintyä jonossa korkeintaan kerran. Toisaalta, jos $a_k = k$, niin jono hajaantuu ja luku voi esiintyä jonossa korkeintaan yhdesti.
2. Jono voi supeta tai hajaantua. Lukujono (a_k) suppenee kohti lukua 0 jos esimerkiksi

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{kun } k \text{ parillinen} \\ 0 & \text{kun } k \text{ pariton,} \end{cases}$$

mutta hajaantuu, mikäli

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{kun } k \text{ parillinen} \\ 1 & \text{kun } k \text{ pariton.} \end{cases}$$

3. Jonon täytyy hajaantua. Jos erisuuret luvut a ja b esiintyvät jonossa (a_n) äärettömän monta kertaa, niin voidaan valita kaksi osajonoa, joista toisessa esiintyy vain luku a ja toisessa luku b. Koska $a \neq b$, niin jono ei voi supeta, sillä jos se suppenisi kohti lukua x, niin $x = a = b$, mikä olisi ristiriita.

Tehtävä 10. Koska $x > 0$, niin myös $a_1 > \sqrt{x} > 0$. Induktion avulla saadaan, että kaikki luvut

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}}{2} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

ovat positiivisia, koska kaavassa summataan vain positiivisia termejä.

Osoitetaan, että luku $\sqrt{x}$ rajoittaa jonoa alhaaltapäin. Jos $a_{n-1} \geq \sqrt{x}$, niin laventamalla ja muodostamalla neliö saadaan

$$\begin{aligned} a_n - \sqrt{x} &= \frac{a_{n-1} + \frac{\sqrt{x}^2}{a_{n-1}} - 2\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}\sqrt{x} + \sqrt{x}^2}{2a_{n-1}} \\ &= \frac{(a_{n-1} - \sqrt{x})^2}{2a_{n-1}} \geq 0. \end{aligned}$$

Eli $a_n \geq \sqrt{x}$. Osoitetaan jono väheneväksi tarkastelemalla erotusta

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2 + x}{2a_{n-1}} - \frac{2a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} = \frac{x - a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \leq 0,$$

koska $a_n^2 \geq x$. Siis $a_n \leq a_{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten jono on vähenevä. Jono siis suppenee, joten on olemassa sellainen luku $a \geq \sqrt{x}$, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a.$$

Täten

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right).$$

Koska $a \geq \sqrt{x} > 0$, niin

$$\begin{aligned} & 2a = a + \frac{x}{a} \\ \Leftrightarrow\ & a^2 = x \end{aligned}$$

ja siten $a = \sqrt{x}$.

Tehtävän rekursiivinen jono antaa siis algoritmin, jolla voi arvioida neliöjuuren arvoa.

Vaativampien tehtävien ratkaisut

Tehtävä 11. Osoitetaan ensiksi, että jokainen suppeneva jono on ylhäältä rajoitettu. Olkoon $\epsilon = 1$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Siis on olemassa sellainen luku n_ϵ, että

$$|a_n - a| < 1 \qquad \text{aina, kun } n \geq n_\epsilon.$$

Valitaan $M_1 = \max\{|a_n| \,|n \leq n_\epsilon\}$. Valinta voidaan tehdä, koska luku n_ϵ on äärellinen. Asetetaan vielä, että $M = \max\{M_1, |a| + 1\}$. Nyt $|a_n| < M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Siis lukujono (a_n) on rajoitettu.

Olkoon nyt lukujono (a_n) nyt ylhäältä rajoittamaton. Jos se suppenisi, niin edellisen perusteella se olisi myös ylhäältä rajoitettu, mikä on ristiriita. Siis ylhäältä rajoittamaton lukujono hajaantuu välttämättä.

Tehtävä 12.

1. Olkoon $\epsilon = 1$. Oletuksen perusteella on olemassa sellainen $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

   $$|a_n - a_m| < 1 \qquad \text{aina, kun } n, m \geq n_\epsilon$$

   Valitsemalla $M = \max\{1+|a_{n_\epsilon}|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_\epsilon - 1}|\}$ saadaan, että $|a_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Siis jono (a_n) on rajoitettu.

2. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Oletuksien perusteella on olemassa sellaiset luvut n_ϵ ja k_ϵ, että

   $$|a_n - a_p| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{aina, kun } n, p > n_\epsilon$$

   ja

   $$|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{aina, kun } n_k > k_\epsilon,$$

   missä a on osajonon (a_{n_k}) raja-arvo. Valitaan luku n_l siten, että $l > \max\{n_\epsilon, k_\epsilon\}$. Koska (a_{n_k}) oli osajono, niin nyt $n_l > k_\epsilon$ ja $n_l > n_\epsilon$. Kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan, että jos $n > n_\epsilon$, niin

   $$|a_n - a| = |a_n - a_{n_l} + a_{n_l} - a| \leq |a_n - a_{n-l}| + |a_{n_l} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Siten jono (a_n) suppenee kohti lukua a.

Cauchyn kriteerin todistamiseen tarvitaan vielä niin sanottua Bolzano-Weierstrassin lausetta. Sen seuraksena saadaan, että jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono. Koska Cauchyn jono on rajoitettu, niin sillä on suppeneva osajono ja siten jono itsekin suppenee.

Tehtävä 13. Käytetään apuna sitä, että alkulukuja on ääretön määrä ja että jokainen luku voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukujen tulona. Esimerkkinä vaadittavasta jonosta käy

$$a_k = \begin{cases} \frac{i}{j}, & \text{kun } k = 2^i 3^j \text{ ja } i,j \in \mathbb{Z}_+ \\ -\frac{i}{j}, & \text{kun } k = 5^i 7^j \text{ ja } i,j \in \mathbb{Z}_+ \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tällöin ensimmäinen nollasta eroava termi tulee olemaan $a_6 = 1$, koska $6 = 2^1 \cdot 3^1$. Ensimmäinen negatiivinen termi on $a_{35} = -1$, koska $35 = 5^1 \cdot 7^1$. Koska luvut $2, 3, 5$ ja 7 ovat alkulukuja, niin jono on hyvin määritelty, sillä $2^i 3^j \neq 5^s 7^t$ kaikilla $i, j, s, t \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi jos $i, j \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$a_{k_1} = \frac{i}{j} = a_{k_2}$$

$$\text{jos ja vain jos } k_1 = 2^{p_1 i} 3^{p_1 j} \text{ ja } k_2 = 2^{p_2 i} 3^{p_2 j}$$

joillekin luvuille $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_+$. Vastaava pätee myös jonon negatiivisille termeille.

Olkoon $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mielivaltainen nollasta eroava rationaaliluku. Tällöin $q = \frac{i}{j}$ tai $q = -\frac{i}{j}$, missä $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Esitys ei ole yksikäsitteinen, sillä esimerkiksi $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Itseasiassa muotoja on äärettömän monta, sillä $\frac{i}{j} = \frac{pi}{pj}$ kaikilla $p \in \mathbb{Z}_+$. Lukua q kohti suppeneva osajono saadaan valitsemalla jonosta ne luvut a_k, missä $k = 2^i 3^j$ kun $q > 0$ tai $k = 5^i 7^j$ kun $q < 0$. Tämä osajono on todellakin mahdollista valita, koska muotoja $q = \pm \frac{pi}{pj}$ on äärettömän monta. Esimerkiksi rationaalilukua $\frac{1}{2}$ kohti suppeneva osajono saadaan valitsemalla termit a_k, missä $k = 2^p 3^{2p}$ ja $p \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $k = 18, 324, 5832, \ldots$.

Lukua 0 kohti suppeneva osajono saadaan helposti vaikkapa valitsemalla termit a_k, missä $k = 2^p$ ja $p \in \mathbb{Z}_+$.

Koska näissä esimerkeiksi poimituissa osajonoissa esiintyy vain yksi luku, niin niiden täytyy myös supeta kohti tätä lukua.

Kaikki osajonot eivät suppene, koska jonoa ei ole rajoitettu. Esimerkiksi jono $1, 2, 3, \ldots$ on eräs osajono, mutta se ei suppene.

Osajonoissa on myös sellaisia, jotka suppenevat kohti irrationaalilukuja. Koska jokainen rationaaliluku esiintyy alkuperäisessä jonossa ja jokaiselta reaalilukuväliltä löytyy myös rationaaliluku, niin sopivalla termien valinnalla saadaan mielivaltaista irrationaalilukua kohti suppeneva osajono.