Perustehtävät

Tehtävä 1. Sievennä

1. $\frac{2-5i}{-1+2i}$
2. $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{150}$

Tehtävä 2. Olkoon P mielivaltainen reaalikertoiminen polynomi. Osoita, että jos luku $z \in \mathbb{C}$ toteuttaa ehdon $P(z) = 0$, niin $P(\overline{z}) = 0$.

Tehtävä 3. Ratkaise yhtälöt

1. $z^2 = -2$
2. $z^3 = 1 - i$
3. $z^2 - 1 = -2iz$

Miksi viimeisellä yhtälöllä on vain yksi ratkaisu $z \in \mathbb{C}$. Miksi $\bar{z}$ ei ole ratkaisu (vertaa tehtävä 2).

Tehtävä 4. Johda DeMoivren kaavan perusteella kosinin ja sinin neljinkertaisten kulmien kaavat.

Vaativammat tehtävät

Tehtävä 5. Osoita oikeaksi DeMoivren kaava

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Entä pääteekö väite jos $n = 0$ tai $n \in \mathbb{Z}_-$?

Tehtävä 6. Osoita sarjakehitelmien avulla, että

$$\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta},$$

kun $\theta \in \mathbb{R}$.

Vinkit perustehtäviin

Tehtävä 1.

1. Lavenna nimittäjän liittoluvulla.
2. Käytä DeMoivren kaavaa.

Tehtävä 2. Tutki polynomia $\overline{P(z)}$ ja pyri muokkaamaan se polynomiksi $P(\overline{z})$.

Tehtävä 3. Muunna luvut polaariseen muotoon ja käytä deMoivren kaavaa. Ole tarkkana trionometristen funktioiden jaksollisuuden kanssa.

Tehtävä 4. Kirjoita $(\cos\theta + i\sin\theta)^4$ kahteen eri muotoon DeMoivren kaavan ja suoran potenssiin korottamisen avulla.

Vinkit vaativampiin tehtäviin

Tehtävä 5. Käytä induktiota ja trigonometrisiä summakaavoja.

Tehtävä 6. Tarkastele funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ sarjakehitelmiä ja yhdistä $\cos\theta + i\sin\theta$ yhdeksi sarjaksi.

Perustehtävien ratkaisut

Tehtävä 1. 1. Lavennetaan nimittäjän konjugaatilla ja sievennetään täten imaginaariset osat pois nimittäjästä.

$$\begin{aligned}\frac{2-5i}{-1+2i} &= \frac{(2-5i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} \\ &= \frac{-2-4i+5i-10}{(-1)^2-(2i)^2} \\ &= \frac{-12+i}{1+4} = -\frac{12}{5}+\frac{i}{5}.\end{aligned}$$

2. Muunnetaan luku $\sqrt{2}-i\sqrt{2} = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$ polaariseen muotoon ja käytetään DeMoivren kaavaa. Yksikköympyrää tai muistikolmioita käyttämällä saadaan, että jos

$$\begin{cases}\cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

ja $\theta \in [0, 2\pi[$, niin $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Siis $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$. Nyt DeMoivren kaavaa soveltamalla saadaan, että

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{160} &= (2(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}))^{150} \\ &= 2^{150}(\cos\frac{150\cdot 7\pi}{4} i\sin\frac{150\cdot 7\pi}{4}) \\ &= 2^{150}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}),\end{aligned}$$

koska $\frac{150\cdot 7\pi}{4} = (262+\frac{1}{2})\pi = \frac{\pi}{2} + 131\cdot 2\pi$. Siis

$$(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{150} = 2^{150}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}) = 2^{150}i$$

Tehtävä 2. Oletuksen perusteella $P(z) = 0$. Täten $\overline{P(z)} = \overline{0} = 0$. Siis riittää todistaa, että $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. Olkoon polynomi P muotoa $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} +$

$\dots a_1 z + a_0$, missä $a_n \neq 0$ ja $a_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = 0, 1, \dots n$ Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= P(\overline{z}),\end{aligned}$$

josta väite seuraa.

Tehtävä 3. 1. Koska $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$, niin ratkaistavana on yhtälö

$$(r(\cos \theta + i \sin \theta))^2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$$

eli

$$r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Siis $r^2 = 2$, eli $r = \sqrt{2}$, kun huomioidaan rajoitus $r > 0$. Lisäksi $2\theta = \pi + n2\pi$ eli $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$ trinometristen funktioiden jaksollisuuden takia. Ratkaisut ovat täten muotoa $z_n = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) + i \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi))$. Jaksollisuuden perustella erisuuria ratkaisuja on vain kaksi

$$z_0 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}(0 + i) = i\sqrt{2}$$

ja

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{2} + \pi) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \pi)) = \sqrt{2}(0 - i) = -i\sqrt{2}.$$

2. Esimerkiksi yksikköympyrästä katsomalla huomataan, että $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$. Täten ratkaisu saadaan yhtälöstä

$$r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}).$$

Siis $r = \sqrt[6]{2}$ ja $\theta = \frac{7\pi}{12} + n\frac{2}{3}\pi$. Kolmannen asteen yhtälöllä on kolme erisuurta ratkaisua ja nyt ne ovat

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \\ z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{22} + i\sin\frac{23\pi}{22}\right). \end{aligned}$$

3. Yhtälö $z^2+2iz-1 = 0$ on binomin neliönä muotoa $(z+i)^2 = z^2+2iz+i^2 = 0$. Siis $z = -i$ on ainoa ratkaisu, joka on tosin kaksinkertainen nollakohta. Luku i ei ole eräs ratkaisu automaattisesti luvun $-i$ konjugaattina, koska polynomi $z^2 + 2iz - 1$ ei ole reaalikertoiminen.

Tehtävä 4. De Moivren kaavan perusteella $\cos 4\theta + i\sin 4\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$. Lisäksi suoraan laskemalla saadaan, että

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^4 &= \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2 -4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta \\ &= (\cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\sin^2\theta) + i4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta). \end{aligned}$$

Koska $\cos\theta, \sin\theta \in \mathbb{R}$ ja kompleksiluvut ovat yhtäsuuria jos ja vain jos niiden reaali- ja imaginaariosat ovat yhtäsuuria, niin

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta + \sin^4\theta - 6\cos^2\sin^2\theta$$

ja

$$\sin 4\theta = 4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta).$$

Vaativampien tehtävien ratkaisut

Tehtävä 5. Olkoon $\theta \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Tehdään todistus induktiolla. Perusaskel $n = 1$ on selvästi tosi. Tehdään induktio-oletus, että väite on tosi kun $n = k$.

Todistetaan nyt induktioväite

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = \cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta).$$

Nyt induktio-oletuksen perusteella

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{k} (\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \cos(k\theta)\cos\theta + i\sin(k\theta)\cos\theta + i\cos(k\theta)\sin\theta - \sin(k\theta)\sin\theta \\
&= (\cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta) + i\,(\sin(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\sin\theta)
\end{aligned}$$

Trigonometristen summakaavoista saadaan, että

$$\cos((k+1)\theta) = \cos(k\theta + \theta) = \cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta$$

ja

$$\sin((k+1)\theta) = \sin(k\theta + \theta) = \sin(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\sin\theta,$$

mistä induktioväite seuraa. Täten induktioperiaatteen nojalla DeMoivren kaava pätee kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$.

Kun $n = 0$, niin

$$1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = \cos 0 + i\sin 0,$$

joten väite on myös voimassa.

Oletetaan, että $n = -m$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \\ &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}\end{aligned}$$

Lavennetaan osoittajaa ja nimittäjää termillä $\cos m\theta - i\sin m\theta$, jolloin

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta - (-i\sin m\theta)^2} \\ &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta} \\ &= \cos m\theta - i\sin m\theta.\end{aligned}$$

Koska kosinifunktio on parillinen ja sinifunktio pariton, niin $\cos m\theta = \cos(-m\theta)$ ja $-i\sin m\theta = i\sin(-m\theta)$. Täten

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(-m\theta) + \sin(-m\theta) = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

aina, kun $n \in \mathbb{Z}_-$.

Tehtävä 6. Olkoon $\theta \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Koska

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$

ja

$$\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \ldots,$$

niin

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Sijoitetaan tähän

$$i^{2k} = (-1)^k \qquad \text{ja} \qquad i^{2k+1} = (-1)^k i$$

ja saadaan

$$\begin{aligned}\cos\theta + i\sin\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Vasemman puolisessa summauksessa eksponentti ja jakajan kertoma saavat parillisia arvoja ja oikean puolisessa vastaavasti parittomia. Yhdistetään summaukset yhden summauksen alle, joka onkin haluttu sarjakehitelmä

$$\begin{aligned}\cos\theta + i\sin\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{i\theta}.\end{aligned}$$

Tarkkaan todistukseen pitäisi tarkastella lisäksi sarjojen suppenemista ja onko sallittua yhdistää sarjat yhdeksi sarjaksi.