

1 Kompleksiluvut

Lukualueiden laajennuksia voi lähestyä polynomi yhtälöiden ratkaisemisen kautta. Yhtälön $x+1=0$ ratkaisemiseksi tarvitaan negatiivisia lukuja. Täten luonnolliset luvut $\mathbb{N}$ on luontevaa laajentaa kokonaisluvuiksi $\mathbb{Z}$. Kertolaskun yhteydessä rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ osoittautuvat hyödylliseksi, kuten yhtälöstä $2x=1$ huomataan. Siirrettäessä toisen asteen yhtälöihin rationaaliluvut eivät enää riitä, vaan lukualetta täytyy laajentaa, jotta esimerkiksi yhtälö $x^2=2$ voitaisiin ratkaista. Näin päästään reaalitylukuihin $\mathbb{R}$. Kuitenkaan kaikki reaalikertoimiset polynomi yhtälöt eivät ole vielä kukaan ratkeavia reaalilukujen joukossa, kuten yhtälö

$$x^2 + 1 = 0$$

osoittaa. Avuksi tarvitaan vielä kompleksiluvut.

Kompleksiluvut osoittautuvat tietyllä tavalla täydellisimmiksi kuin reaaliluvut, sillä 1800-luvulla todistettiin, että jokaisella kompleksikertoimisella vähintään ensimmäisen asteen polynomilla on ainakin yksi kompleksinen nollakohta. Tämä on yhdenpitävä algebran peruslauseen kanssa.

Algebran peruslause. *Jokaisella kompleksikertoimisella polynomi yhtälöllä, jonka aste on $n \geq 1$, on n kappaletta kompleksisia nollakohtia.*

Vaikka kompleksiluvut voivat tuntua keinotekoisilta verrattuna vaikkapa reaalilukuihin, niin ne ovat silti hyvin tarpeellisia. Monien luonnonilmiöiden, esimerkiksi vaimenevan värähtelyliikkeen, matemaattinen käsitteleminen vaatii kompleksilukuja.

Kompleksilukujen kunta määritellään täsmällisemmin lukuteoriassa, mutta nyt määritelmäksi riittää, että kompleksiluvut z ovat muotoa

$$z = x + iy$$

olevia lukuja, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja $i^2 = -1$. Kompleksilukujen joukko on siis

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ ja } i^2 = -1\}.$$

Kompeksiluku $z = x + iy$ koostuu siis reaaliosta $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$ ja imaginaariosasta $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$. Kompleksiluvut z_1 ja z_2 ovat yhtäsuuret, mikäli niiden reaali- ja imaginaariosat ovat yhtäsuuret eli

$$z_1 = z_2 \quad \text{jos ja vain jos} \quad \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ ja } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Täten $z = 0$ jos ja vain jos $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$.

Siispä $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sillä mielivaltainen kompleksiluku $z = x + iy$ kuuluu reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ jos ja vain jos imaginaariosa $y = 0$.

1.1 Kompleksilukujen laskutoimitukset

Olkoon $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ mielivaltaisia kompleksilukuja. Kompleksilukujen yhteenlasku suoritetaan laskemalla reaali- ja imaginaariosat yhteen. Siis

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Kertolasku suoritetaan kuin minkä tahansa binomin kertolasku huomioiden, että $i^2 = -1$. Täten

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Kompeksiluvun $z = x + iy$ konjugaatti on taas $\bar{z} = x - iy$. Konjugaatti saadaan siis, kun vaihdetaan imaginaariosan etumerkki. Täten kompleksiluku $z \in \mathbb{R}$ jos ja vain jos $z = \bar{z}$. Kertomalla luku konjugaatillaan saadaan, että

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Kompleksiluvun $z = x + iy$ moduli eli pituus on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Jakolasku kompleksiluvulla $z = x + iy \neq 0$ määritellään tavalliseen tapaan luvun käänteisluvulla z^{-1} kertomisella. Käänteisluku $\frac{1}{z}$ voidaan laskea laventamalla konjugaatilla $\bar{z}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Yleensä kompleksisien murtolausekkeiden sieventäminen kannattaa aloittaa laventamalla nimittäjää konjugaatilla, sillä näin saadaan eliminointia imaginääriosat pois nimittäjästä.

2 Kompleksitaso ja napakoordinaatit

Kompleksitasoksi ymmärretään taso $\mathbb{R}^2$, jonka pisteille (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) määritellään yhteenlasku

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

reaaliluvulla $a \in \mathbb{R}$ kertominen

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1)$$

ja pisteiden välinen kertolasku

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Nimitys kompleksitaso tulee mielekkääksi, kun mielivaltaista kompleksilukua $z = x + iy$ määritetään vastaamaan kompleksitason pistettä (x, y) . Tällöin saadaan seuraavat vastaavuudet:

- piste $(0, 1)$ vastaa imaginaariyksikköä i
- pisteen (x, y) etäisyys origosta on sama kuin kompleksiluvun $x + iy$ moduli $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- kompleksiluvun z konjugaatti $\bar{z}$ on peilaus y -akselin suhteen.

Kompleksiluvuille voidaan määritellä nyt myös kolmaskin esitysmuoto napakoordinaattien avulla. Olkoon $z \neq 0$ mielivaltainen kompleksiluku. Tällöin sen etäisyys origosta on $|z| > 0$ ja olkoon $0 \leq \theta < 2\pi$ kompleksiluvun suuntavektorin ja positiivisen x -akselin välinen kulma radiaaneissa. Tällöin jos $z = x + iy$, niin

$$\begin{cases} x &= |z| \cos \theta \\ y &= |z| \sin \theta \end{cases}$$

ja kompleksiluvulle saadaan polaarinen esitys

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Yleensä käytetään kompleksiluvun moduulille lyhennysmerkintää $r = |z|$. Polaariesitys on yksikäsitteinen, mutta jos yksikäsitteisyydestä luovutaan, niin vaihekulma voi saada arvoja myös välin $[0, 2\pi[$ ulkopuolelta. Tällöin myös luku $z = 0$ voidaan esittää helposti napakoordinaattien avulla. Tällöin kaksi nollasta eroavaa kompleksilukua $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ ovat yhtäsuuret jos ja vain jos

$$r_1 = r_2 \quad \text{ja} \quad \theta_1 = \theta_2 + n2\pi,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Eteenkin laskettaessa kompleksilukujen kertolaskua polaarinen muoto on varsin näppärä, sillä trigonometrisiä kaavoja soveltamalla saadaan, että jos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, niin

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

ja jos $r_2 \neq 0$, niin

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Induktiolla saadaan todistettua seuraava hyödyllinen tulos.

De Moivren kaava. *Kaikille kompleksiluvuille $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ pätee, että*

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

3 Kompleksisista funktioista

Polynomifunktioiden määrittämiseksi kompleksiluvuille riittää vain laajentaa määrittelyjoukko kompleksilukujen joukoksi $\mathbb{C}$. Mutta esimerkiksi trigonometristen funktioiden määrittäminen kompleksiluvuille on ongelma, koska mikä on kulma, jonka asteluku on imaginäärinen? Tähän apuun otetaan funktioiden sarjakehitelmät.

Koska esimerkiksi

1. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

niin esimerkiksi funktio e^z määritellään

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

kaikille $z \in \mathbb{C}$. Tämä määritelmä on mielekäs, sillä sarja tulee suppenemaan. Tämän todistaminen jätetään kompleksianalyysin kurssille. Vastaavalla tavalla voidaan määritellä mielekäs kompleksinen laajennus muillekin funktioille, joilla voidaan johtaa reaalin sarjakehitelmä. Tarkastellaan kuitenkin tarkemmin vain eksponenttifunktiota.

Sarjakehitelmien ominaisuuksia tutkimalla voidaan osoittaa, että kompleksinen eksponenttifunktio tulee säilyttämään tuttuja laskusääntöjä, kuten esimerkiksi

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Sarjakehitelmien avulla saadaan johdettu myös yhteys, että jos $\theta \in \mathbb{R}$, niin

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Täten kompleksiluvun z , jonka vaihekulma on θ , polaarinen esitys voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}.$$

Käyttämällä edellistä kaavaa saadaan johdettua tunnettu yhtälö

$$e^{i\pi} - 1 = 0,$$

joka yhdistää monta tärkeää matemaattista vakiota.