Esimerkki kaikkialla jatkuvasta muttei missään derivoituvasta funktiosta

Seminaariaine

Miikka Rytty

Matemaattisten tieteiden laitos

Oulun yliopisto

2004

1 Matemaattista ja historiallista taustaa

Tämän kappaleen historiallinen tausta perustuu lähteisiin [1] ja [3].

Määritelmä 1. *Funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, mikäli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Määritelmä 2. *Funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, mikäli raja-arvo*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

on äärellisenä olemassa. Tällöin $f'(x_0)$ on funktion f derivaatta pisteessä x_0.

On helppoa huomata, että funktion derivoituvuudesta seuraa funktion jatkuvuus.

Lause 1. *Jos funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, niin se on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Täten

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

on äärellisenä olemassa. Nyt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

kun $h \to 0$. Valitsemalla $x = x_0 + h$ saadaan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

josta väite seuraa. □

Kuitenkaan päinvastainen ei pidä paikkaansa, kuten seuraava esimerkki näyttää.

Lause 2. *Funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = |x|$ on jatkuva, muttei derivoituva, pisteessä $x = 0$.*

Todistus. Funktion f jatkuvuus pisteessä $x = 0$ on selvä. Derivoitumisen tutkimiseksi tarkastellaan toispuoleisia raja-arvoja pisteessä $x = 0$. Kun $h \to 0^-$, niin

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

Toisaalta

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

kun $h \to 0^+$. Täten raja-arvoa ei ole olemassa, joten f ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$. $\square$

Tästä huolimatta on luontevaa ajatella, että jatkuvalla funktiolla täytyi olla yksi tai useampia pisteitä, joissa se on derivoituva. Tämä olikin yleinen uskomus matemaatikkopiireissä aina 1800-luvun loppupuolelle asti. Osasyynä tähän oli liiallinen luottamus fysikaaliseen intuitioon ja määritelmien epätäsmällisyys. Funktiot tulkittiin fysikaalisten suureiden kuvaajiksi. Täten niissä saattoi olla teräviä kärkiä tai epäjatkuvuuskohtia, mutta uskottiin, että näistä huolimatta aina pystyi löytämään jatkuvasta funktiosta sen verran säännöllisyyttä, että sen joillekin pisteille pystyi laskemaan tangentin. Ainakin ranskalainen matemaatikko ja fyysikko Andre-Marie Ampere yritti muotoilla teoreettisia perusteluita jatkuvan funktion derivaatan olemassaololle suurimassa osasta reaalipisteistä.

Ensimmäisen tunnetun esimerkin tälläisestä patologisesta funktiosta, joka käyttäytyi vastoin matemaatikojen yleistä luuloa, esitti vuoden 1830 tienoilla tsekki Bernard Bolzano. Tämä geometrisesti konstruoitu funktio oli jatkuva suljetulla välillä, mutta se ei ollut derivoituva yhdessäkään pisteessä. Valitettavasti Bolzanon esimerkki unohtui ja se julkaistiin vasta satakunta vuotta myöhemmin. Sama kohtalo oli Charles Cellerierin esimerkkifunktiolla. Vuoden 1860 tienoilla Cellerier todisti, että funktio

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sin(a^k x)$$

on jatkuva, mutta ei derivoituva, kun $a > 1000$ on parillinen kokonaisluku. Tämä tulos hautautui ja se julkistettiin vasta Cellerierin kuoleman jälkeen vuonna 1890. Tätä ennen, vuonna 1872, saksalainen Karl Weierstrassin oli ehtinyt esitellä ensimmäisenä julkaistun esimerkin kaikkialla jatkuvasta derivoitumattomasta funktiosta. Kyseinen funktio kantaa Weierstrassin nimeä ja on

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

missä $0 < a < 1$, b on pariton kokonaisluku ja $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Yhdessä samoihin aikoihin löydettyjen epäeuklidisten geometrioiden ja joukko-opillisia paradoksien kanssa nämä patologiset funktiot osoittivat, että liiallinen luottamus "maalaisjärkeen" ja intuitioon on pettävää matematiikkassa. Tämä johti siten matemaattisen logiikan syntymiseen ja eri matematiikan alojen aksiomatisointiin. Itseasiassa on osoitettu, että kaikkien jatkuvien funktioiden joukossa funktiot, jotka ovat derivoituvia kaikkialla, ovat eräässä mielessä harvemmassa verrattuna jatkuviin muttei missään derivoituviin funktioihin. Vaikka molemmissa joukoissa on äärettömän monta alkiota, niin derivoitumattomat funktiot muodostavat samalla tavalla tiheämmän joukon kuin irrationaalilukujen joukko verrattuna rationaalilukujen joukkoon.

2 McCarthyn esimerkki

Vuonna 1953 John McCarthy julkaisi tässä esitettävän esimerkin kaikkialla jatkuvasta, muttei missään derivoituvasta funktiosta [2]. Esimerkkinä se on hyvä, koska sen todistus on muihin patologisten funktioiden todistuksiin verrattuna varsin yksinkertainen eikä vaadi analyysin peruskursseilla esitettävää laajempaa tietämystä.

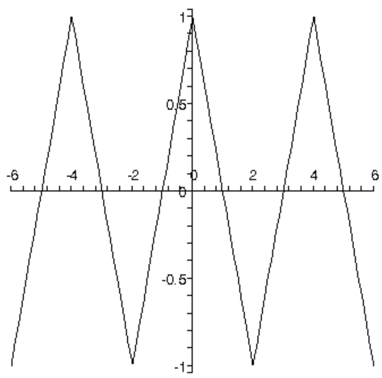
Määritellään funktio $\hat{g} : [-2, 2[\mapsto [-1, 1]$ seuraavasti

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{, kun } -2 \leq x < 0 \\ 1 - x, & \text{, kun } 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Olkoon apufunktio $g : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$ funktion $\hat{g}$ 4-periodinen laajennus eli

$$g(x_0 + 4p) = \hat{g}(x_0) \qquad \text{aina, kun } -2 \leq x_0 < 2 \text{ ja } p \in \mathbb{Z}.$$

Tällöin apufunktio g on jatkuva ja se on jaksollinen, sillä $g(x+4) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. "Sahanterä"-funktiona se ei tule olemaan derivoituva pisteissä $x = 2p$, missä $p \in \mathbb{Z}$.

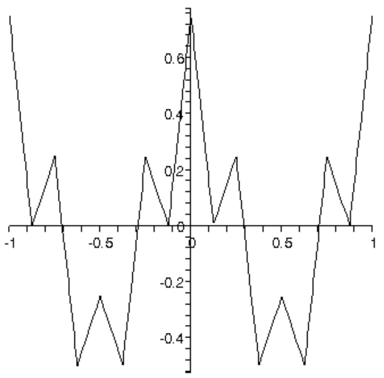


Kuva 1. Apufunktio g

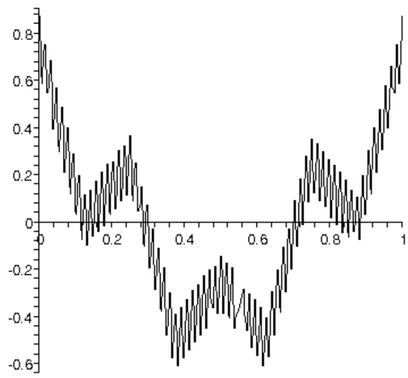
Käyttämällä edellisiä merkintöjä McCarthyn funktio M määritellään funktiosarjana

$$M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g\left(2^{2^k} x\right).$$

Koska 2^{2^k} kasvaa hyvin nopeasti, apufunktion $g\left(2^{2^k}x\right)$ derivoitumattomat kärkipisteet kertyvät yhä tiheämpään. Niinpä kaikkien pisteiden $x \in \mathbb{R}$ jokaisesta ympäristöstä löytyy piste, jossa McCarthyn funktio M ei ole derivoituva. Ohessa kaksi approksimaatiota funktiolle pienillä summien arvoilla.



Kuva 2. $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k}x)$



Kuva 3. $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k}x)$

Funktion M jatkuvuuden osoittamiseen voidaan käyttää seuraavia kahta kurssin Analyysi I lausetta, jotka esitetään ilman todistuksia.

Lause 3. ***(Weierstrassin M-testi)*** *Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee ja*

$$|f_k(x)| \leq a_k$$

aina, kun $x \in D$ *ja* $k \in \mathbb{Z}_+$*, niin funktiosarja* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *suppenee tasaisesti joukossa* D*.*

Lause 4. *Olkoon* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *jono sellaisia funktioita, jotka ovat jatkuvia joukossa* $D \subset \mathbb{R}$*. Jos funktiosarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

suppenee tasaisesti joukossa D *kohti rajafunktiota* f*, niin funktio* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *on jatkuva.*

Lause 5. *McCarthyn funktio M on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Merkitään $f_k = \frac{1}{2^k} g\left(2^{2^k} x\right)$. Koska g on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$, niin siten myös jokainen f_k on jatkuva alueessa $\mathbb{R}$. Lisäksi

$$|f_k(x)| = \left|\frac{1}{2^k} g\left(2^{2^k} x\right)\right| = \frac{1}{2^k}\left|g\left(2^{2^k} x\right)\right| \leq \frac{1}{2^k}$$

koska $|g(x)| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla funktiosarja

$$M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g\left(2^{2^k} x\right)$$

suppenee tasaisesti. Lauseen 4 nojalla rajafunktio M on jatkuva. $\square$

Se, että funktio ei ole derivoituva missään pisteessä, on huomattavasti pidempi todistus, mutta silti suhteellisen yksinkertainen verrattuna muiden patologisten funktioiden todistuksiin. Osoitetaan, että McCarthyn funktion $M(x)$ derivaatta ei voi olla äärellisenä olemassa missään pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Tätä varten muodostetaan lukujono $(h_n)_{n=1}^{\infty}$, jonka n:s alkio on muotoa $h_n = \pm 2^{-2^n}$. Lukujonon alkioiden etumerkki tulee riippumaan pisteestä $x \in \mathbb{R}$. Valitaan merkki positiiviseksi, mikäli on olemassa sellainen $p_n \in \mathbb{Z}$, että

$$2p_n \leq 2^{2^n} x < 2^{2^n} x + 2^{2^n} h_n \leq 2p_n + 2$$

ja negatiiviseksi, jos on olemassa sellainen $p_n \in \mathbb{Z}$, että

$$2p_n \leq 2^{2^n} x + 2^{2^n} h_n < 2^{2^n} x \leq 2p_n + 2.$$

Valinta voidaan tehdä, koska $2^{2^n} h_n = \pm 2^{2^n - 2^n} = \pm 1$. Merkki valitaan siis niin, että lukujen $2^{2^n} x$ ja $2^{2^n}(x + h_n)$ välissä ei ole parillisia kokonaislukuja. Apufunktio g vaihtoi suuntaansa aina parillisissa kokonaislukupisteissä, joten luvut $2^{2^n} x$ ja $2^{2^n}(x + h_n)$ ovat aina samalla suoran pätkällä.

Lemma 1. *Olkoon* $k, n \in \mathbb{Z}_+$. *Nyt*

$$g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) = g(2^{2^k}x)$$

kaikilla $k > n$ *ja* $x \in \mathbb{R}$. *Täten*

$$M(x+h_n) - M(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Kun $k > n$, niin

$$\begin{aligned}\left|2^{2^k}h_n\right| &= 2^{2^k-2^n} \\ &= 2^{2^n\left(2^{k-n}-1\right)} \\ &= 4^{2^{n-1}\left(2^{k-n}-1\right)}\end{aligned}$$

joten $2^{2^k}h_n$ on neljällä jaollinen. Koska g oli 4-periodinen funktio, niin

$$g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) = g\left(2^{2^k}x + 2^{2^k}h_n\right) = g\left(2^{2^k}x\right).$$

Täten

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\underbrace{g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)}_{=0}\right) = 0$$

eli

$$\begin{aligned}M(x+h_n) - M(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right).\end{aligned}$$

□

Seuraava lemma osoittaa, että kun $1 \leq k \leq n$, niin luvut $2^{2^k}x$ ja $2^{2^k}(x+h_n)$ ovat funktion g samalla osalla.

Lemma 2. *Olkoon* $1 \leq k \leq n$ *ja* $x \in \mathbb{R}$.
Jos $2^{2^k}x \in [4p, 4p+2[$, *niin* $2^{2^k}(x+h_n) \in [4p, 4p+2[$ *tai*
jos $2^{2^k}x \in [4p-2, 4p[$, *niin* $2^{2^k}(x+h_n) \in [4p-2, 4p[$, *missä* $p \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Termin h_n määritelmän nojalla lause on tosi aina, kun $k = n$. Täten riittää tarkastella tapauksia, joissa $k < n$. Jos termin h_n merkki on positiivinen, niin on olemassa sellainen $p_n \in \mathbb{Z}$, että

$$2p_n \leq 2^{2^n}x < 2^{2^n}x + 2^{2^n}h_n \leq 2p_n + 2.$$

Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellaiset $1 \leq k < n$ ja $p_k \in \mathbb{Z}$, että

$$2^{2^k}x < 2p_k \leq 2^{2^k}x + 2^{2^k}h_n.$$

Kerrotaan tämä epäyhtälö puolittain luvulla $q = 2^{2^n - 2^k} \in \mathbb{Z}_+$ ja saadaan

$$2^{2^n}x < 2qp_k \leq 2^{2^n}x + 2^{2^n}h_n.$$

Täten

$$2p_n \leq 2^{2^n}x < 2qp_k \leq 2^{2^n}x + 2^{2^n}h_n \leq 2p_n + 2$$

eli

$$2p_n < 2qp_k < 2p_n + 2.$$

Näin ollen $2qp_k = 2p_n + 1$ eli luku $2qp_k$ on pariton. Tällöin joko $q \notin \mathbb{Z}$ tai $p_k \notin \mathbb{Z}$, mikä on ristiriita lukujen valinnan perusteella. Vastaoletuksen täytyy siis olla epätosi. Vastaavalla tavalla voidaan todistetaa tapaus, jossa termin h_n merkki on negatiivinen. Täten reaalilukujen $2^{2^k}x$ ja $2^{2^k}(x+h_n)$ välissä ei ole parillisia kokonaislukuja millään kokonaisluvun k arvolla, kun $1 \leq k \leq n$. $\square$

Lemma 3. *Olkoon* $1 \leq k \leq n$. *Nyt*

$$\left|g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right| = 2^{2^k-2^n}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $1 \leq k \leq n$ mielivaltaisia. Jos $2^{2^k}x \in [4p, 4p+2[$, niin edellisen lemman nojalla myös $2^{2^k}(x+h_n) \in [4p, 4p+2[$. Täten

$$\begin{aligned}
\left|g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right| &= \left|(1 - 2^{2^k}x - 2^{2^k}h_n) - (1 - 2^{2^k}x)\right| \\
&= \left|-2^{2^k}h_n\right| \\
&= 2^{2^k-2^n}
\end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan todistaa tapaus $2^{2^k}x \in [4p-2, 4p[$. $\square$

Lemma 4. *Olkoon* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Nyt*

$$|M(x+h_n) - M(x)| > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Lemma 3 antaa, että

$$\left|\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right| = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{kun } k = n \\ 2^{2^k-2^n-k} & \text{kun } k < n. \end{cases}$$

Koska $k < 2^k$, kun $k \geq 1$, voidaan arvioida, että

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{2^k-2^n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2^n-2^k+k}} \\
&\leq \frac{n-1}{2^{2^n-2^{n-1}+n-1}} = \frac{n-1}{2^{2^{n-1}+n-1}} = \frac{n-1}{2^{n-1}\cdot 2^{2^{n-1}}} \\
&< \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Lemman 1 nojalla

$$M(x+h_n) - M(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right).$$

Väite saadaan nyt arviosta $\frac{1}{2^{2^{n-1}}} \leq \frac{1}{2^n}$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$ ja kolmioepäyhtälöstä.

$$\begin{aligned}
|M(x+h_n) - M(x)| &\geq \left| \frac{1}{2^n} - \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right) \right|}_{<\frac{1}{2^n}} \right| \\
&= \frac{1}{2^n} - \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right) \right) \right| \\
&> \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.
\end{aligned}$$

□

Lause 6. *McCarthyn funktio M ei ole derivoituva missään pisteessä $x \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ mielivaltaisia. Kokoamalla aikaisemmat tulokset yhteen saadaan, että

$$\begin{aligned}
\left| \frac{M(x+h_n) - M(x)}{h_n} \right| &= 2^{2^n} |M(x+h_n) - M(x)| \\
&> 2^{2^n} (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}}) && \text{Lemma 4} \\
&= 2^{2^n - n} - 2^{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Koska $\lim_{n\to\infty} 2^{2^n-n} - 2^{2^{n-1}} = \infty$, niin

$$\left| \frac{M(x+h_n) - M(x)}{h_n} \right| \to \infty$$

kun $n \to \infty$. Koska $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, niin derivaattaa $M'(x)$ ei ole olemassa äärellisenä.

□

Viitteet

[1] C. B. Boyer: *Tieteiden kuningatar,* Art House, Juva 2000.

[2] J. McCarthy: An Everywhere Continuous Nowhere Differentiable Function, Amer. Math. Monthly **60** (1953), 709.

[3] J. Thim: Continuous Nowhere Differentiable Functions, Master Thesis, *http://epubl.luth.se/1402-1617/2003/320/LTU-EX-03320-SE.pdf,* Luleå University of Technology 2003.