Perustehtäviä

1. Muunna sarja teleskooppimuotoon ja osoita, että se suppenee. Laske myös sarjan summa.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

2. Osoita suoraan määritelmään perustuen, että seuraava sarja hajaantuu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + \dots$$

3. Osoita, että geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots$$

suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$. Määritä myös sarjan summa.

4. Laske sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4^k}$$

summa.

5. Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2k})^k$$

6. Osoita Cauchyn kriteerin avulla, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee.

7. Osoita, että jos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ on suppeneva positiiviterminen sarja ja

$$m = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M \text{ kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+\}$$

niin m on sarjan summa. Kävisikö minimi suurimman ylärajan paikalle?

8. Osoita, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ suppenee jos ja vain jos $s > 1$.

9. Todista vertailuperiaate.

10. Tutki suppenekovatko sarjat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, missä

1. $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$
2. $a_k = \frac{(-1)^k}{e^{\sqrt{k}}}$
3. $a_k = \frac{(k+1)^k}{k^{2k}}$
4. $a_k = \frac{k^2}{2^k}$
5. $a_k = \frac{\ln k}{k}$
6. $a_k = (-1)^{k+1}(1 - \sqrt[k]{a})$, $a > 1$
7. $a_k = \frac{1}{k^2+k}$
8. $a_k = \frac{\sqrt{k+1}}{k}$
9. $a_k = \frac{k^3}{k!}$
10. $a_k = (-1)^{k+1}\frac{\ln k}{k}$
11. $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$
12. $a_k = \sin(\frac{1}{k^2})$

11. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sarja, jossa

$$a_{2k-1} = \frac{1}{3^k} \text{ ja } a_{2k} = \frac{1}{2 \cdot 3^k}$$

Tarkastelee sarjaa molemmilla suhdetesteillä.

12. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sarja, jossa

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}} \text{ ja } a_{2k} = \frac{1}{3^{2k}}$$

Tarkastelee sarjaa molemmilla juuritesteillä.

13. Missä seuraavassa päättelyssä on virhe?

Koska $a_k = \frac{1}{k} > 0$ ja

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} < 1$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, niin suhdetestin nojalla harmoninen sarja suppenee.

14. Tutki suppenevatko sarjat itseisesti

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{3^k}{4^k+7}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{k}{2k-1}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 3^k}{2^k+1}$

15. Ehdollisesti suppeneva sarja voidaan järjestellä suppenemaan mitä tahansa reaalilukua kohti. Voidaanko ehdollisesti suppenevan sarjan termit järjestellä uudelleen siten, että uudelleenjärjestetty sarja suppenee itseisesti?

16. Tiedetään, että $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. Miten voidaan laskea luvulle $\ln 2$ likiarvo, jonka virhe on pienempi kuin 0,01.

17. Osoita, että alternoiva sarja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \ldots$$

hajaantuu. Miksi Leibnitzin lausetta ei voi käyttää tämän sarjan suppenemistarkasteluun, vaikka $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$?

18. Laske sarjojen $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3})$ Cauchyn tulosarjan viides termi. Suppeneeko Cauchyn tulosarja ja jos suppenee, niin mikä sen summa on?

19. Laske summa $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, kun $|x| < 1$. Laske sitten sarjakehitelmä funktiolle $\frac{1}{(1-x)^2}$.

20. Määritellään kahden itseisesti suppenevan sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ tulosarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ k:s termi $c_k = a_k \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Antaako tämä määrittely saman tulosarjan kuin Cauchyn tulosarja? Missä mielessä tämä tulosarjan määrittely on huonompi kuin Cauchyn tulosarjan määrittely?

21. Ovatko seuraavat väittämät totta?

1. Jos sarjat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuvat, niin niiden summasarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ hajaantuu.
2. Jos $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| = L < \infty$, niin sarja suppenee.

3. Jos $a_k \geq c > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu.
4. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja $a_k > 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ suppenee.
5. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja $a_k > 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ suppenee.
6. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, $a_k > 0$ ja jono (b_k) on rajoitettu, niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k b_k)$$

suppenee itseisesti.
7. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu ja $a_k > 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ suppenee.
8. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja $a_k > 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ hajaantuu.

Vaativampia tehtäviä

22. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ suppenee jos ja vain jos jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee. Mikä on teleskooppisarjan summa?

23. Osoita induktiolla, että

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

Miten tämän avulla voidaan päätellä, että harmoninen sarja hajaantuu?

24. Osoita, että jos $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on suppenevan positiivitermisen sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uudelleenjärjestely, niin se suppenee.

25. Osoita edellisen tehtävän avulla, että suppenevan positiivitermisen sarjan termien uudelleenjärjesteleminen ei vaikuta sarjan summaan.

26. Todista integraalitesti.

27. Todista edellisen tehtävän avulla, että Riemannin zeta-funktion $\zeta :]1, \infty[\mapsto \mathbb{R}$ $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ arvoille saadaan arvio

$$\frac{1}{p-1} \leq \zeta(p) \leq 1 + \frac{1}{p-1}$$

28. Voidaanko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, missä

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \text{ ja } a_{2k} = -\frac{1}{k^2}$$

saada termien järjestelemisellä suppenemaan kohti mielivaltaista reaalilukua?

29. Laske arvio sille, että kuinka monta termiä täytyy harmonisesta sarjasta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ottaa, että osasumman arvo on suurempi kuin 10.

30. Todista, että kahden itseisesti suppenevan sarjan tulosarja suppenee itseisesti.

31. Osoita, että koska $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, niin $e^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$. (Muista, että $0! = 1$)

32. Eulerin todistus alkulukujen äärettömälle lukumäärälle. Tee vastaoletus, että joukko $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ sisältäisi kaikki alkuluvut. Laske summat

$$s_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k}$$

missä $i = 1, 2, \ldots, n$. Laske sen jälkeen tulo

$$\prod_{i=1}^{n} s_i = s_1 s_2 \cdots s_n$$

33. Tiedetään, että alternoivan harmonisen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

summa on $\ln 2$. Laske sen termien uudelleenjärjestelyn

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots$$

summa.

Vihjeitä perustehtäviin

Tehtävä 1. Osoita ensin, että $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Laske sitten n:s osasumma saadulle teleskooppisarjalle.

Tehtävä 2. Tarkastele n:ttä osasumma parillisilla ja parittomilla n:n arvoilla.

Tehtävä 3. Kerro n:s osasumma $s_n = a + aq + \ldots + aq^n$ q:lla ja vähennä ne puolittain.

Tehtävä 4. Käytä edellistä tehtävää.

Tehtävä 5. Muista, että $e = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k$.

Tehtävä 6. Todista arvio $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ja käytä sitä.

Tehtävä 7. Oletuksen perusteella sarjalla on summa s. Osoita, että väitteet $m > s$ ja $m < s$ ovat epätosia.

Tehtävä 8. Käytä integraalitestiä, kun $p > 1$ ja $p = 1$. Arvioi tapauksia $p < 1$ majorantti- ja minoranttiperiaatteella.

Tehtävä 9. Oletusten perusteella raja-arvo $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = c$. Valitse ϵ sopivasti ja muodosta sopivat majorantti- ja minoranttisarjat.

Tehtävä 10.

1. Kokeile minoranttisarjana harmonista sarjaa.
2. Käytä Leibnizin lausetta.
3. Kokeile juuritestillä.
4. Käytä suhdetestiä.
5. Todista osittaisintegroinnin avulla, että $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.
6. Leibnizin lause ja arvio $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a} = 1$.
7. Arvioi majoranttiperiaatteella.
8. Muista, että neliöjuuri on aidosti kasvava funktio ja käytä 1)- kohtaa.
9. Käytä suhdetestiä.
10. Käytä Leibnizin lausetta.
11. Lavenna termiä, niin että pääset eroon neliöjuurista osoittajassa.
12. Todista ja käytä arviota $x > \sin x$, kun $x > 0$.

Tehtävä 11. Tarkastele termien suhteen raja-arvon olemassaoloa.

Tehtävä 12. Tarkastele juuren raja-arvon olemassaoloa.

Tehtävä 13. Mieti täyttyvätkö kaikki suhdetestin oletukset.

Tehtävä 14.

1. Arvioi majoranttiperiaatteen avulla.
2. Tutki termien raja-arvoa.
3. Muista, että $|\cos x| \leq 1$.

Tehtävä 15. Tee vastaoletus tai käytä teorian lausetta: sarja suppenee itseisesti jos ja vain jos sen positiivisten termien sarja ja negatiivisten termien sarja suppenevat.

Tehtävä 16. Käytä Leibnizin lauseen seurausta $|s - s_n| < a_{n+1}$.

Tehtävä 17. Tutki voiko sarja supeta itseisesti tai ehdollisesti. Tätä varten tarkastele positiivisten termien sarjaa ja negatiivisten termien sarjaa.

Tehtävä 18. Muista, että Cauchyn tulosarjan k:s termi on $c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \ldots + a_k b_1$. Suppenemistarkastelua varten laske sarjojen summat.

Tehtävä 19. Sarja on geometrinen sarja, joten sen summan voi laskea tehtävä 3 menetelmällä. Laske sitten Cauchyn tulosarja, kun sarja kerrotaan itsellään.

Tehtävä 20. Laske tulosarjojen arvot.

Tehtävä 21.

1. Ota mielivaltainen hajaantuva sarja ja mieti että onko sen ja mielivaltaisen hajaantuvan sarjan summa aina hajaantuva sarja.
2. Mieti, mitä väite oikein sanoo ja keksi vastaesimerkki.
3. Tutki sarjan termien jonon raja-arvoa.
4. Koska sarja suppenee, niin on olemassa sellainen termi, josta lähtien kaikki termit ovat lukua 1 pienempiä. Sovella tähän majoranttiperiaatetta.
5. Mieti tilannetta harmonisen sarjan kannalta.
6. Huomaa, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti.
7. Keksi vastaesimerkki.
8. Mieti miten uuden sarjan termien jonon raja-arvo käyttäytyy.

Vihjeitä vaativampiin tehtäviin

Tehtävä 22. Johda kaava sarjan n:lle osasummalle.

Tehtävä 23. Käytä arviota $\sum_{k=n_0}^{n} a_k > \underbrace{(n - n_0 + 1)}_{\text{termien lukumäärä}} \cdot \underbrace{a_i}_{\text{pienin termi}}$, kun $a_k > a_i$ kaikilla $k = n_0, n_0 + 1, \ldots, n$.

Tehtävä 24. Mieti miten uudelleenjärjestellyn sarjan osasummaa voidaan rajoittaa ylhäältä alkuperäisen sarjan osasummilla.

Tehtävä 25. Osoita, että molempien sarjojen raja-arvon täytyy olla sama luku käyttämällä edellistä tehtävää ja tehtävää 7.

Tehtävä 26. Tulkitse integraali ja sarjan termit pinta-aloiksi ja tee arvio tällä tavoin osasummien jonon arvoja.

Tehtävä 27. Käytä edellisen tehtävän johdossa käytettyä arviota

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \int_{1}^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{n+1} a_k$$

ja laske epäoleellinen integraali.

Tehtävä 28. Laske edellisen tehtävän avulla arvio sarjan positiivisten termien sarjan summalle. Tutki sitten alkuperäisen sarjan uudelleenjärjestelyn osasumman käyttäytymistä. Voiko se saada mielivaltaisia negatiivisia arvoja?

Tehtävä 29. Käytä integraalitestissä johdettua arviota.

Tehtävä 30. Huomaa, että jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee itseisesti.

Tehtävä 31. Muista Newtonin binomikaava $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Tehtävä 32. Muista, että jokainen luonnollinen luku $n > 1$ voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukujen tulona. Muodosta siten termeistä harmoninen sarja.

Tehtävä 33. Tutki mielivaltaista osasumman arvoa suluttamalla summa uudelleen. Pyri täten muodostamaan alternoivan harmonisen sarjan osasumma kerrottuna vakiolla $\frac{1}{2}$.

Ratkaisut perustehtäviin

Tehtävä 1. Koska

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

niin

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$$

Täten $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 - 0 = 1$.

Tehtävä 2. Jos n on parillinen, niin $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k = 0$.

Jos taasen n pariton, niin $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k = -1$. Täten osajonojen summa (s_n) hajaantuu, joten sarja ei suppene.

Tehtävä 3. Selvästi sarja hajaantuu, kun $q = 1$ tai $q = -1$, koska $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n \neq 0$. Oletetaan siis, että $q \neq \pm 1$. Kerrotaan geometrisen sarjan n:s osasumma

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$$

suhteella q ja saadaan

$$qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n+1}$$

Vähennetään nämä toisistaan

$$(1-q)s_n = a - aq^{n+1}$$

Kun $q \neq 1$, niin $(1-q) \neq 0$ ja sillä voidaan jakaa.

$$s_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Täten sarjan osasummien jonon suppeneminen riippuu täysin termin q^{n+1} suppenemisesta. Kun $|q| < 1$, niin $q^{n+1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Kun $|q| > 1$, niin $q^{n+1} \to \pm\infty$.

Siis geometrinen sarja suppenee kohti summaa $\frac{a}{1-q}$, kun $|q| < 1$.

Tehtävä 4. Kyseessä on geometrinen sarja, koska

$$\frac{(-1)^{k+1}}{4^k} = -(-\frac{1}{4})^k.$$

ja suhdeluku $q = -\frac{1}{4}$. Edellisen tehtävän nojalla sarja suppenee ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{4})^k = -\frac{-\frac{1}{4}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{1}{5}.$$

Tehtävä 5. Nyt sarjan k:s termi

$$a_k = (1+\frac{1}{2k})^k = (1+\frac{1}{2k})^{2k\cdot\frac{1}{2}} = ((1+\frac{1}{2k})^{2k})^{\frac{1}{2}} \to e^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

kun $k \to \infty$. Siis sarja hajaantuu. Vaihtoehtoisesti voidaan vain huomioida, että $a_k \geq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, joten $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$.

Tehtävä 6. Kun $k > 1$, niin

$$0 < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k+1-k}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Täten kun $n, p > 1$

$$\begin{aligned}
|s_{n+p} - s_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \sum_{k=n+1}^{n+p} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) \\
&= (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \to 0
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Siis Cauchyn kriteeri täyttyy ja sarja suppenee.

Tehtävä 7. Koska sarja suppeni, niin merkitään, että $s_n \to s$. Sarja oli positiiviterminen, joten osasummien jono (s_n) on aidosti kasvava eli $s_n < s_{n+1} < s$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Täten osasummien jonon ylärajojen joukko on alhaalta rajoitettu ja m on olemassa. Väite $m > s$ on selvästi epätosi, koska s on yksi osasummien jonon yläraja. Jos $m < s$, niin raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $m < s_{n_0}$, mikä on ristiriidassa m:n määritelmän kanssa. Täten $m = s$. Myös minimi käy suurimman alarajan tilalle, sillä edellisen perusteella $s \leq M'$, missä $M' \in \{M \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq M \text{ kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Tehtävä 8. Kun $p \geq 1$ niin funktiot $f_p(x) = \frac{1}{x^p}$ täyttävät integraalitestin oletukset (jatkuva, vähenevä, positiivinen, kun $x \geq 1$) ja $f(k) = \frac{1}{k^p}$, joten integraalitestiä voidaan käyttään. Kun $p > 1$, niin

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \Big/_1^c \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

Täten sarjat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ suppenevat, kun $p > 1$.

Kun $p = 1$, niin

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \Big/_1^c \ln x$$

Nyt $\ln c \to \infty$, kun $c \to \infty$, joten harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu. Nyt jos $p < 1$ ja $k > 1$, niin $\frac{1}{k} < \frac{1}{k^p}$, joten minoranttiperiaatteen nojalla sarjat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ $(p < 1)$ hajaantuvat.

Tehtävä 9. Koska $\frac{a_n}{b_n} \to c > 0$, niin raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että kaikilla $n > n_0$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$$

Täten

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}$$

ja koska $b_n > 0$, niin

$$\frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n$$

kun $n > n_0$. Täten sarja $\frac{3c}{2} \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$ on sarjan $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ majorantti ja sarja $\frac{c}{2} \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$ on sarjan $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ minorantti (c oli vakio). Nyt majorantti- ja minoranttiperiaatetta soveltamalla saadaan väite.

Tehtävä 10.

1. Koska $k \geq \sqrt{k}$, kun $k \geq 1$, niin $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$, niin minoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ hajaantuu.

2. Leibnizin lauseen ehdot täyttyvät ja $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{k}}} = 0$, joten sarja suppenee
3. Nyt $\sqrt[k]{\frac{(k+1)^k}{k^{2k}}} = \frac{k+1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \to 0 < 1$, joten juuritestin nojalla sarja suppenee.
4. Koska $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2 2^k}{2^{k+1}k^2} = \frac{k^2+2k+1}{2k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} \to 0 < 1$, niin suhdetestin nojalla sarja suppenee.
5. Osittaisintegoinnilla saadaan, että $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ Siis
$$\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}((\ln a)^2 - (ln 1)^2) = \frac{1}{2}(\ln a)^2 \to \infty$$
kun $a \to \infty$. Muutkin integraalitestin oletukset pätevät, joten sen nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ hajaantuu.
6. Koska $1 - \sqrt[k]{a} \to 0$, kun $k \to \infty$ ja muutkin niin Leibnizin lauseen ehdot täyttyvät (totea tarkasti), niin sarja suppenee.
7. Kun $k > 0$, niin voidaan arvioida, että $\frac{1}{k^2+k} < \frac{1}{k^2}$. Täten sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.
8. Koska neliöjuuri on aidosti kasvava funktio, niin arvio $\frac{\sqrt{k+1}}{k} > \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ on voimassa. Ensimmäisessä kohdassa todistettiin minoranttisarjan hajaantuminen, joten tarkasteltavakin sarja hajaantuu.
9. Nyt $\frac{(k+1)^3 k!}{(k+1)!k^3} = \frac{(k+1)^2}{k^3} = \frac{k^2+2k+1}{k^3} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^3} \to 0 < 1$, niin suhdetestin nojalla sarja suppenee.
10. Koska $\frac{\ln k}{k} \to 0$, kun $k \to \infty$ ja muutkin Leibnizin lauseen oletukset täyttyvät, kun $k \geq 1$, joten sarjaa suppenee.
11. Nyt $0 < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{k+1-k}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} < \frac{1}{k(2\sqrt{k})} = \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}}$, joten sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.
12. Merkitään $f(x) = x - \sin x$. Siten $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ eli f kasvava ja erityisesti aidosti kasvava, kun $x \neq n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Toisinsanoen $x > \sin x$, kun $x > 0$. Täten myös $\frac{1}{k^2} > \sin(\frac{1}{k^2}) > 0$, kun $k \in \mathbb{Z}_+$ joten sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Tehtävä 11. Jos $k = 2p$, niin
$$\frac{a_{2p}}{a_{2p-1}} = \frac{\frac{1}{2\cdot 3^p}}{\frac{1}{3^p}} = \frac{3^p}{2\cdot 3^p} = \frac{1}{2}$$

Jos $k = 2p - 1$, niin

$$\frac{a_{2p-1}}{a_{2p-2}} = \frac{\frac{1}{3^p}}{\frac{1}{2\cdot 3^{p-1}}} = \frac{2\cdot 3^{p-1}}{3^p} = \frac{2}{3}$$

Täten $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{2}{3} < 1$, joten Suhdetesti 1 nojalla sarja suppenee. Kuitenkaan raja-arvoa $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ei ole olemassa, joten Suhdetesti 2 ei anna tietoa sarjan suppenemisesta.

Tehtävä 12. Jos $k = 2p$, niin

$$\sqrt[2p]{\frac{1}{3^{2p}}} = \frac{1}{\sqrt[2p]{3^{2p}}} = \frac{1}{3}$$

Jos $k = 2p - 1$, niin

$$\sqrt[2p-1]{\frac{1}{2^{2p-1}}} = \frac{1}{\sqrt[2p-1]{2^{2p-1}}} = \frac{1}{2}$$

Täten $\sqrt[k]{a_k} \leq \frac{1}{2} < 1$, joten Juuritesti 1 nojalla sarja suppenee. Kuitenkin raja-arvoa $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ ei ole olemassa, joten Juuritesti 2 ei anna tietoa sarjan suppenemisesta.

Tehtävä 13. Nyt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1$$

joten suhdetestiä ei voi käyttää.

Tehtävä 14.

1. Koska $\frac{3^k}{4^k+7} \leq \frac{3^k}{4^k}$ ja sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k}$ suppenee geometrisena sarjana, niin alkuperäinen sarja suppenee itseisesti majoranttiperiaatteen nojalla.
2. Nyt $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2}$, joten termin raja-arvo ei suppene kohti nollaa. Täten sarja ei voi supeta lainkaan.
3. Voidaan arvioida, että $\left|\frac{\cos 3^k}{2^k+1}\right| \leq \frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k}$. Täten sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla itseisesti.

Tehtävä 15. Ensimmäinen tapa. Oletetaan, että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ehdollisesti. Olkoon $\theta : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{Z}_+$ bijektio. Mikäli uudelleenjärjestely $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\theta(k)}$ suppenee itseisesti, niin sen kaikki uudelleenjärjestelyt suppenevat myös itseisesti. Koska funktio θ on bijektio, niin sillä on käänteisfunktio $\theta^{-1} : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{Z}_+$. Siten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\theta^{-1}\circ\theta(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\theta(k)}$ uudelleenjärjestely ja siten se suppenee itseisesti, mikä on ristiriita oletuksen kanssa.

Toinen tapa. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ehdollisesti, niin sarjat $\sum_{a_k>0} a_k$ ja $\sum_{a_k<0} a_k$ hajaantuvat. Täten sen uudelleenjärjestelyt eivät voi supeta itseisesti, koska sarja suppenee itseisesti jos ja vain jos sen positiivisten termien sarja ja negatiivisten termien sarjat suppenevat.

Tehtävä 16. Leibnizin lauseen seurauksena saatiin arvio $|s - s_n| < a_{n+1}$. Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 100 < n + 1 \Leftrightarrow n > 99.$$

Täten saadaan arvio

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{100} \approx \ln 2,$$

jonka epätarkkuus on pienempi kuin 0,01.

Tehtävä 17. Sarjan negatiiviset termit muodostavat sarjan

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \ldots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

joka hajaantuu. Sarja suppenee itseisesti jos ja vain jos positiivisten termien muodostama sarja ja negatiivisten termien sarja suppenevat. Täten alkuperäinen sarja ei voi supeta itseisesti. Sarjan positiiviset termit muodostavat sarjan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

joka suppenee. Täten alkuperäinen sarja ei voi supeta ehdollisesti. Nimittäin, jos se suppenisi ehdollisesti, niin teorian perusteella sen positiivisten termien sarja ja negatiivisten termien sarja hajaantuvat.

Koska sarja ei suppene itseisesti eikä ehdollisesti, niin sen täytyy hajaantua.

Leibnizin lausetta ei voi käyttää tämän sarjan suppenemistarkasteluun, koska termien jono ei ole vähenevä.

Tehtävä 18. Suoraan Cauchyn tulosarjan termien määritelmien mukaan saadaan

$$c_1 = a_1b_1 = \frac{2}{3}(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{(1+1)^3}) = \frac{7}{12}$$
$$c_2 = a_1b_2 + a_2b_1 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(2+1)^3}) + (\frac{2}{3})^2(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{(1+1)^3}) = \frac{145}{324}$$
$$c_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = \frac{2}{3}(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{(3+1)^3}) + (\frac{2}{3})^2(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{(2+1)^3}) + (\frac{2}{3})^3(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{(1+1)^3})$$
$$= \frac{37}{2592} + \frac{19}{486} + \frac{7}{27} = \frac{2431}{7776}$$

Geometrisen sarjan summan kaavasta saadaan $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^k = 2$. Teleskooppisarjalle voidaan laskea tehtävän 22 menetelmällä, että $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}) = 1$. Koska molemmissa sarjoissa on vain positiivisia termejä, niin ne suppeneminen on itseistä. Täten niiden Caucyn tulosarja suppenee (jopa itseisesti) ja sen summa on $2 \cdot 1 = 2$.

Tehtävä 19. Suoraan tehtävän 3 menetelmällä saadaan laskettua, että $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, kun $|x| < 1$. Selvästi sarja suppenee itseisesti. Laskemalla Cauchyn tulosarja sarjan tulolle itsensä kanssa saadaan, että

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

Suoraan Cauchyn tulosarjan termin määrittelyn nojalla

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \underbrace{x^o x^k + x^1 x^{k+1} + \ldots + x^k x^0}_{k+1 \text{ kpl}} \\ &= \underbrace{x^k + x^k + \ldots + x^k}_{k+1 \text{ kpl}} \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

Siis $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$, kun $|x| < 1$.

Tehtävä 20. Koska sarjat suppenevat itseisesti, niin voidaan merkitä $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Täten teorian perusteella Cauchyn tulosarjan summa on ab. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k &= a_1 \sum_{k=1}^{\infty} b_k + a_2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \ldots + a_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\ &= a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) b \\ &\to ab\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Täten sarjat ovat samat.

Tämän uuden määrittelyn ongelma on se, että sitä ei voida laajentaa käsittämään hajaantuvia sarjoja. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu, niin uuden tulosarjan termit eivät ole laskettavissa. Cauchyn tulosarjan mielivaltainen termi on aina laskettavissa, vaikka sarja hajaantuisikin. Myös kertomisjärjestyksellä on väliä. Esimerkiksi jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuu, niin

$$(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)(\sum_{k=1}^{\infty} 0) = b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 \ldots = 0$$

mutta sarjan $(\sum_{k=1}^{\infty} 0)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$ termejä ei ole määritelty.

Tehtävä 21.

1. Väittämä ei ole totta. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mielivaltainen hajaantuva sarja. Tällöin summasarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_k) = 0$$

suppenee, vaikka onkin kahden hajaantuvan sarjan summasarja.

2. Väite on valetta. Se sanoo, että osasummien itseisarvojen jonon suppenemisesta seuraisi sarjan suppeneminen. Vastaesimerkiksi käy sarja

$$1 - 2 + 2 - 2 + \ldots$$

Tällöin osasumma $s_n = \pm 1$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, mutta selvästi sarja ei voi supeta.

3. Väite on totta. Koska $a_k \geq c > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, niin $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, mikäli raja-arvo on edes olemassa. Täten sarja ei voi supeta.
4. Jos sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, missä $a_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$, suppenee, niin $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Siis on olemassa sellainen luku $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, että $0 < a_k < 1$ aina, kun $k \geq k_0$. Siis $a_k^2 < a_k$ kaikilla $k \geq k_0$. Täten sarja
$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^2 < \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$
suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Koska äärellinen määrä sarjan alun termejä ei vaikuta suppenemiseen, niin täten myös sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ suppenee. Väite on siis totta.
5. Väite ei ole totta. Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee, mutta sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2}}$ on harmoninen sarja, joka tunnetusti hajaantuu.
6. Koska jono (b_n) on rajoitettu, niin on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $|b_k| < M$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja sen kaikki termit ovat positiivisia, niin se suppenee itseisesti. Nyt sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|b_k| < \sum_{k=1}^{\infty} M\,|a_k| = M(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|) = M\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
suppenee majoranttiperiaatteen nojalla, koska sarja $M(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k)$ suppenee. Väite on siis tosi.
7. Väite ei pidä paikaansa. Sarja $1 + 1 + 1 + \ldots$ hajaantuu, kuten tekee myös sarja $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots$
8. Koska sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Täten
$$\frac{1}{a_k} \to \infty,$$
kun $k \to \infty$. Koska raja-arvo ei ole nolla, niin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ hajaantuu. Väite on siis tosi.

Ratkaisut vaativampiin tehtäviin

Tehtävä 22. Tarkastellaan osasummaa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Jos $a_n \to a$, niin $s_n \to a_1 - a$.

Jos $s_n \to s$, niin $a_n \to a_1 - s$.

Tehtävä 23. Perusaskel: $s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Induktio-oletus: $s_{2^n} = \sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Induktio-väitteen todistus:

$$s_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2\cdot 2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2\cdot 2^n} \frac{1}{k}.$$

Rittää siis osoittaa, että $\sum\limits_{k=2^n+1}^{2\cdot 2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. Tässä summassa on aina $2 \cdot 2^n - 2^n$ termiä ja pienin termi on $\frac{1}{2\cdot 2^n}$, joten

$$\sum_{k=2^n+1}^{2\cdot 2^n} \frac{1}{k} \geq (2 \cdot 2^n - 2^n)\frac{1}{2 \cdot 2^n} = \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}$$

Täten $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \to \infty$, kun n kasvaa rajatta. Harmoninen sarjan osasummien jono on aidosti kasvava ja äskeisen todistuksen mukaan sen osasummien jonolla on rajatta kasvava osajono (s_{2^n}). Täten harmoninen sarja hajaantuu.

Tehtävä 24. Koska $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ on positiiviterminen suppeneva sarja, niin sen summa $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ rajoittaa sen osasummien jonoa ylhäältä. Täten $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k < s$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Koska $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ on uudelleenjärjestely, niin on olemassa bijektio $\theta : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ siten, että $a_{\theta(k)} = b_k$. Nyt olkoon $m_n = \max\{\theta(k) | k \leq n\}$, joten $\{b_1, b_2, \ldots b_n\} \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_{m_n}\}$. Täten

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k < s.$$

Siis osasummien jono $\sum_{k=1}^{n} b_k$ on ylhäältä rajoitettu. Myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on positiiviterminen, joten se suppenee.

Tehtävä 25. Käytetään edellisen tehtävän merkintöjä ja lisäksi merkitään $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$. Määrittely $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ on järkevä, koska edellisen tehtävän mukaan sarja suppeni ja lisäksi $\sum_{k=1}^{n} b_k < a$. Tehtävän 7 mukaan $b \leq a$, koska suppenevan positiivitermisen sarjan summa oli sarjan osasummien jonon pienin yläraja. Mutta vastaavasti sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ saadaan sarjasta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ uudelleenjärjestelyn avulla, joten $a \leq b$. Siis $a = b$.

Tehtävä 26. Oletukset: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiiviterminen sarja, $f(x)$ on positiivinen, jatkuva ja vähenevä funktio kaikilla $x \geq k_0 \in \mathbb{Z}_+$ ja $f(k) = a_k$ kaikilla $k \geq k_0$.

Oletetaan jatkossa, että $k \geq k_0$. Tulkitaan sarjan termin arvo x-akselista lähteväksi pylvään pinta-alaksi, jonka korkeus on a_k ja leveys 1. Tulkinta on järkevä, koska sarja oli positiiviterminen. Määrätty integraali voidaan tulkita funktion f ja x-akselin väliin jääväksi pinta-alaksi (funktio f oli jatkuva, joten se on myös integroituva). Koska f oli vähenevä saadaan arvio $a_k = f(k) \geq f(k+1) = a_{k+1}$. Täten

$$a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x \geq a_{k+1}$$

Summataan k_0:sta n:ään

$$a_{k_0} + \ldots + a_n \geq \int_{k_0}^{k_0+1} f(x)\ \mathrm{d}x + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x \geq a_{k_0+1} + \ldots + a_{n+1}$$

$$\sum_{k=k_0}^{n} a_k \geq \int_{k_0}^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x \geq \sum_{k=k_0+1}^{n+1} a_k$$

Jos epäolellinen integraali $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ suppenee, niin osasummien jono $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n+1} a_k$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten se suppenee. Kasvavuus seuraa termien positiivisuudesta. Huomaa, että alun termejä $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0}$ on äärellinen määrä, joten ne eivät vaikuta suppenemiseen.

Jos epäolellinen integraali $\int\limits_{k_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ hajaantuu, niin osasummien jono $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_0-1} + \sum\limits_{k=k_0}^{n} a_k$ kasvaa rajatta, joten sarjakin hajaantuu.

Tehtävä 27. Kun $p > 1$, niin

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \Big/_{1}^{c} \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

Lisäksi sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ suppenee. Siten integraalitestiä todistettaessa saatu arvio

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^p}$$

saadaan muotoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} - 1,$$

kun $n \to \infty$. Siten

$$1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

Yhdistämällä tulokset saadaan väite

$$\frac{1}{p-1} \leq \zeta(p) \leq 1 + \frac{1}{p-1}$$

Tehtävä 28. Edellisestä tehtävästä saadaan arvio $-2 \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k^2} \leq -1$. Olkoon (s_n) alkuperäisen sarjan mielivaltaisella bijektiolla $\theta : \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{Z}_+$ saadun uudelleenjärjestelyn n:s osasumma. Täten $-2 \leq s_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, joten uudelleenjärjestely ei voi supeta kohti lukua $x < -2$. Itseasiassa voidaan arvioida, että

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\theta(2k-1)}}_{\text{positiiviset termit osasummassa } s_n} \qquad -2 \leq s_n$$

missä $p = \frac{n}{2}$, kun n parillinen ja $p = \frac{n+1}{2}$, kun n pariton. Epäyhtälön vasemmalle puolelle saadaan harmoninen sarja, kun $n \to \infty$, joten uudelleenjärjestely hajaantuu.

Tehtävä 29. Tehtävän 26 menettelyllä saadaan arvio

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

Nyt täten luku n saadaan ratkaistua epäyhtälöstä $\ln(n+1) \geq 10$ eli $n \geq \mathrm{e}^{10} - 1$. Pienin luku $n \in \mathbb{Z}_+$, joka toteuttaa tämän ehdon on $n_0 = 22026$. Siis ainakin näin monella termillä harmonisen sarjan osasumma saadaan suuremmaksi kuin luku 10. Tämä ei ole välttämättä pienin määrä termejä, mutta parempaan arvioon tarvittaisiin hienostuneempia menetelmiä.

Tehtävä 30. Teoria-osiossa todistettiin, että jos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti ja jos $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee, niin niiden Cauchyn tulosarja suppenee. Jos nyt lisäksi sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee itseisesti, niin sarjat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$ suppenevat myös itseisesti ja niiden Cauchyn tulosarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ suppenee. Se suppenee myös itseisesti, koska $c_k = \underbrace{|a_1|\,|b_k|}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{|a_k|\,|b_1|}_{\geq 0} = |c_k|$.

Tehtävä 31. Koska $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ suppenee itseisesti, niin sen Cauchyn tulosarja itsensä kanssa suppenee itseisesti. Tulosarjan $e^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ n:s termi

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{n!}\frac{1}{0!} + \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{1!} + \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{0!}\frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{2 \cdot (n-2)!} + \ldots + \frac{1}{(n)!} \\
&= \frac{1}{n!} + \frac{n}{n!} + \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{\binom{n}{0}}{n!} + \frac{\binom{n}{1}}{n!} + \frac{\binom{n}{2}}{n!} + \ldots + \frac{\binom{n}{n}}{n!}
\end{aligned}$$

Sijoittamalla $a = 1$ ja $b = 1$ Newtonin binomikaavaan $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ saadaan, että $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$. Sijoittamalla tämä edelliseen yhtälöön saadaan väite.

Tehtävä 32. Koska 2 on pienin alkuluku, niin sarja $s_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k}$ suppenee geometrisenä sarjana ($\left|\frac{1}{p_i}\right| < 1$) kohti summaa $\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$. Koska summa on äärellinen ja alkulukuja oli oletuksen perusteella äärellinen määrä, niin tulo

$$\prod_{i=1}^{n} s_i = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

on olemassa äärellisenä. Algebrassa on todistettu tulos, että jokaisella luonnollisella luvulla $k > 1$ on yksikäsitteinen esitys alkulukujen tulona. Siksipä edellinen yhtälö summaa kaikkien positiivisten kokonaislukujen k käänteisluvut. Koska tarkasteltava sarja suppeneni ja siinä on vain positiivisiä termejä, niin sen täytyy supeta itseisesti. Täten sen termien järjestystä voidaan vapaasti vaihtaa. Uudelleenjärjestelyllä harmoniselle sarjalle saadaan esitys

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_i - 1}$$

Täten harmoninen sarja suppenisi, mikä johtaakin ristiriitaan. Täten oletus on väärä ja alkulukuja on ääretön määrä.

Tehtävä 33. Olkoon s_n tarkasteltavan sarjan n:s osasumma ja olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$ suurin sellainen, että $3k \leq n$. Tällöin $n = 3k + r$, missä $r \in \{0, 1, 2\}$. Osasummaa s_n voidaan siis approksimoida osasummalla s_{3k}. Siis

$$s_n = s_{3k} - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{3k+i}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
s_{3k} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \\
&= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \ldots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{2k-1}) - \frac{1}{2k} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}).
\end{aligned}$$

Siis $s_{3k} \to \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}\ln 2$, kun $k \to \infty$.

Jos $r = 1$, niin $s_n = s_{3k} - \frac{1}{3k+1} \to \frac{1}{2}\ln 2 - 0$, kun $k \to \infty$. Jos $r = 2$, niin $s_n = s_{3k} - \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2} \to \frac{1}{2}\ln 2 - 0$, kun $k \to \infty$.

Täten tämä alternoivan harmonisen sarjan uudelleenjärjestely suppenee kohti lukua $\frac{1}{2}\ln 2$.