Sisältö

1 Peruskäsitteistöä

1.1 Määritelmiä

Sarjat määritellään jonojen avulla. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mielivaltainen lukujono. Määrittelemällä kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ luku

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

saadaan uusi lukujono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Tässä s_n on sarjan n:s osasumma ja a_n on sarjan n:s termi. Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, mikäli osasummien jono $(s_n)_{k=1}^{\infty}$ suppenee ja sarjan summa on sen osasummien jonon raja-arvo. Mikäli osasummien jono hajaantuu, myöskin sarjan sanotaan hajaantuvan. Sarjan n:s jäännöstermi r_n on $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Voidaan siis kirjoittaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_n + r_n.$$

Koska s_n on äärellinen summa, se on olemassa kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Täten sarjan suppeneminen riippuu jäännöstermin r_n suppenemisesta. Huomaa, että jäännöstermi ei ole aina hyvin määritelty.

Kannattaa huomata, että summa on hämäävä nimi sarjan raja-arvolle. Merkintä $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ voi tarkoittaa sekä sarjan summaa, mikäli sarja suppenee, taikka formaalia sarjaa, joka sitten suppenee tai hajaantuu. Äärellisillä summilla $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ on aina yksikäsitteinen arvo ja niiden termien järjestystä voidaan vaihdella. Sarjan raja-arvoa eli summaa taasen ei ole määritelty yhtä hyvin. Se voi riippua termien summauksen järjestyksestä ja sarjan hajaantuessa sitä ei ole määritelty lainkaan. Siten sitä ei voi manipuloida kuten tavallisia summia, koska sarja on pohjimmiltaan raja-arvo. Täten sarjoja koskevia lauseita todistettaessa väite todistetaan sarjan osasummien jonolle.

Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ on sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ termien uudelleenjärjestely, mikäli on olemassa bijektio $\sigma : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ siten, että $b_{\sigma(k)} = a_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin siis molemmissa sarjoista löytyvät täsmälleen samat termit, mutta järjestys voi olla eri.

Sarjoja, joilla on oma nimi

- Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ suppenee, kun $|q| < 1$.
- Harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, joskin hyvin hitaasti. Tarvitaan yli $1,509 \cdot 10^{43}$ termiä ennen kuin summa on suurempi kuin 100.
- Alternoiva harminonen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ suppenee.
- Teleskooppisarja $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ suppenee jos ja vain jos jono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ suppenee.

1.2 Perustuloksia

Koska sarjat ovat summien avulla määriteltyjä jonoja, pätevät myös kaikki jonoille johdetut tulokset. Cauchyn kriteeriä osasummien jonoon soveltamalla saadaan

Cauchyn kriteeri sarjoille. *Sarja suppenee jos ja vain jos sen osasummien jono on Cauchyn jono eli jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$, että*

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \epsilon$$

aina, kun $n > n_\epsilon$ ja $k = 1, 2, 3 \ldots$

Valitsemalla $k = 1$ saadaan

Lause. *Jos sarja suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Siis jos $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, niin sarja hajaantuu.*

Harmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, mutta $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Siis sarjan termien jonon suppeneminen kohti nollaa ei ole riittävä ehto sarjan suppenemiselle.

Cauchyn kriteerin tehokkuus on siinä, että se mahdollistaa sarjan suppenemistarkastelut ilman että sarjan summa tunnetaan. Vaikka Cauchyn kriteerin avulla teoriassa voitaisiin osoittaa kaikkien sarjojen suppeneminen tai hajaantuminen, niin osasummien jonon osoittaminen Cauchyn jonoksi on yleensä hyvinkin hankalaa. Tarvitaan siis tehokkaampia työkaluja.

2 Suppenemistestejä positiivitermisille sarjoille

Sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sanottiin positiivitermiseksi sarjaksi, mikäli $a_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$.

Lause. *Positiiviterminen sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee jos ja vain jos sen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu eli on olemassa sellainen vakio* $M > 0$*, että*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M \text{ aina, kun } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Todistus. Positiivitermisen sarjan osasummien jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava. Täten se suppenee jos ja vain jos se on ylhäältä rajoitettu. □

Majorantti- ja minoranttiperiaate. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *positiivitermisiä sarjoja. Jos on olemassa sellainen vakio* $k_0 \in \mathbb{Z}_+$*, että* $a_k \leq b_k$ *aina, kun* $k > k_0$*, niin seuraavat väitteet pätevät:*
Jos majoranttisarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *suppenee, niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*
Jos minoranttisarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu, niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *hajaantuu.*

Todistus. Summat $s_{k_0} = \sum_{k=1}^{k_0} a_k$ ja $\sigma_{k_0} = \sum_{k=1}^{k_0} b_k$ ovat äärellisiä, joten ne eivät vaikuta suppenemiseen. Kun k_0 on kiinnitetty, ne ovat vakioita. Oletuksen perusteella

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=k_0+1}^{n} b_k$$

Kun $n > k_0$, niin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = s_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} a_k \leq s_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} b_k \leq s_{k_0} + \sigma_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} b_k = s_{k_0} + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Täten, mikäli sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on ylhäältä rajoitettu ja siten suppeneva.
Lisäksi, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu, niin positiivitermisenä sarjana sen osasummien jono kasvaa rajatta. Siten myös osasummat $\sum_{k=1}^{n} b_k$ kasvavat rajatta. □

Seuraavassa annetaan ilman todistuksia tavallisimmat suppenemistestit positiivitermisille sarjoille. Kaikki nämä testit perustuvat siihen, että oletusten ollessa voimassa voidaan löytää sopiva majorantti- tai minoranttisarja, joiden avulla suppeneminen ja hajaantuminen on osoitettavissa.

Vertailuperiaate. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *positiivitermisiä sarjoja. Jos*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0,$$

niin joko molemmat sarjat suppenevat tai molemmat sarjat hajaantuvat.

Huomautus. Mikäli $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$, niin voidaan todistaa, että sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenemisesta seuraa sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneminen ja sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantumisesta seuraa sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hajaantuminen, mutta ei välttämättä toisinpäin.

Suhdetesti 1. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja ja on olemassa sellainen vakio* $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, *että*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \text{ aina, kun } k \geq k_0$$

niin sarja suppenee.

Jos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq q > 1 \text{ aina, kun } k \geq k_0$$

niin sarja hajaantuu.

Tämän tuloksen seuraksena saadaan varsinainen suhdetesti, joka ei kuitenkaan ole yhdenpitävä tämän testin kanssa. Se on kuitenkin helpommin muistettavissa ja miellyttävämpi käyttää.

Suhdetesti 2. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja ja*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Tällöin seuraavat väitteet ovat tosia:

Jos $q < 1$, *niin sarja suppenee.*

Jos $q > 1$, *niin sarja hajaantuu.*

Juuritesti 1. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja ja on olemassa sellainen vakio* $k_0 \in \mathbb{Z}_+$*, että*

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \text{ aina, kun } k \geq k_0$$

niin sarja suppenee.

Jos taasen

$$\sqrt[k]{a_k} \geq q > 1 \text{ aina, kun } k \geq k_0$$

niin sarja hajaantuu.

Juuritesti 2. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja ja*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$$

Tällöin seuraavat väitteet ovat tosia:

Jos $q < 1$*, niin sarja suppenee.*

Jos $q > 1$*, niin sarja hajaantuu.*

Huomautus. Tarkastelemalla sarjoja $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ nähdään, että suhde- ja juuritestiä ei voi käyttää silloin, kun testien vaatima raja-arvo on 1.

Huomautus. Voidaan osoittaa, että jos $a_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ ja raja-arvo $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ on olemassa, niin $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$. Täten mikäli suhdetesti antaa tietoa sarjasta, niin myöskin juuritesti antaa saman tuloksen. Tämä ei kuitenkaan päde toisinpäin yleisesti, joten juuritesti on suhdetestiä yleisempi. Useimmiten suhdetestin käyttäminen on kuitenkin helpompaa kuin juuritestin soveltaminen.

Integraalitesti. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja ja olkoon* f *jatkuva, vähenevä ja positiivinen funktio kaikilla* $x \geq k_0 \in \mathbb{Z}_+$*. Jos lisäksi* $f(k) = a_k$*, niin tällöin*

$$\text{sarja } \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ suppenee jos ja vain jos epäoleellinen integraali } \int_{k_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ suppenee.}$$

Edellä esitellyt testit pätevät, vaikka osa sarjan termeistä olisikin nollia, sillä ne eivät vaikuta sarjan summaan.

3 Itseinen ja ehdollinen suppeneminen

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti, mikäli sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee. Merkitään seuraavasti

$$s'_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,.$$

Lause. *Jos sarja suppenee itseisesti, niin se suppenee.*

Todistus. Kolmioepäyhtälöä soveltamalla saadaan arvio

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+k} + a_{n+k-1} + \ldots + a_n| \leq |a_{n+k}|+|a_{n+k-1}|+\ldots+|a_n| \,. = \left|s'_{n+k} - s'_n\right|$$

Täten jos jono $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, niin myös $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, mistä väite seuraa Cauchyn kriteerin nojalla. □

Edellinen lause ei päde toiseen suuntaan, kuten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ osoittaa. Suppenevan sarjan sanotaan suppenevan ehdollisesti, mikäli se ei suppene itseisesti. Olkoon s_n mielivaltainen osasumma ja $p_n = \sum p'_i$ sen positiivisten termien p'_i summa ja $q_n = \sum q'_i$ sen negatiivisten termien q'_i summa. Siten

$$s_n = p_n + q_n \text{ ja } s'_n = p_n - q_n.$$

Lisäämällä ja vähentämällä nämä puolittain saadaan

$$p_n = \frac{1}{2}(s_n + s'_n) \text{ ja } q_n = \frac{1}{2}(s_n - s'_n).$$

Näistä kahdesta tuloksesta saadaan suoraan seuraavat kaksi lausetta.

Lause. *Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee ehdollisesti, niin sen positiivisten termien sarja* $\sum_{a_k>0} a_k$ *ja sen negatiivisten termien sarja* $\sum_{a_k<0} a_k$ *hajaantuvat.*

Lause. *Sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee itseisesti jos ja vain jos sen positiivisten termien sarja* $\sum_{a_k>0} a_k$ *ja sen negatiivisten termien sarja* $\sum_{a_k<0} a_k$ *suppenevat.*

Ensimmäinen lause ei päde toiseen suuntaan, kuten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ osoittaa.

Lause. *Ehdollisesti suppeneva sarja saadaan uudelleenjärjestelemällä hajaantumaan tai suppenemaan mitä tahansa reaalilukua kohti.*

Todistus. Tämä ei ole eksakti todistus, mutta antaa ymmärrystä todistuksessa käytettäviin askeliin. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja $r \in \mathbb{R}$ luku, jota kohden sarjan halutaan suppenevan. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ei suppene itseisesti, niin sarjan positiivisten termien muodostama sarja ja negatiivisten termien muodostama sarja hajaantuvat. Siten sarjalla on olemassa äärettömän monta positiivista ja negatiivista termiä. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Siten on olemassa sellainen vakio $k_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$, että $|a_k| < \epsilon$ aina, kun $k > k_\epsilon$. Täten on olemassa vain äärellinen määrä termejä (k_ϵ kappaletta), joiden itseisarvo on suurempi tai yhtä suuri kuin ϵ.

Täten sarjan positiiviset termit voidaan järjestään väheneväksi jonoksi $(p'_k)_{k=1}^{\infty}$. Vastaavasti negatiiviset termit voidaan järjestää kasvavaksi jonoksi $(q'_k)_{k=1}^{\infty}$. Molempien jonojen raja-arvo on 0, vaikka niitä vastaavat sarjat kasvavat tai vähenevät rajatta.

Valitaan pienin sellainen positiivinen j_1, että

$$\sum_{k=1}^{j_1} p'_k > r.$$

Eli valittiin j_1 ensimmäistä termiä positiivisten termien jonosta $(p'_k)_{k=1}^{\infty}$, niin että summa kasvaa suuremmaksi kuin r. Tämä voidaan tehdä, koska $\sum_{k=1}^{n} p'_k \to \infty$, kun $n \to \infty$. Seuraavaksi valitaan pienin sellainen positiivinen j_2, että

$$\sum_{k=1}^{j_1} p'_k + \sum_{k=1}^{j_2} q'_k < r.$$

Joten poimittiin j_2 ensimmäistä termiä negatiivisten termien jonosta $(q'_k)_{k=1}^{\infty}$, niin että kokonaissumma saatiin pienemmäksi kuin r. Sitten valitaan pienin sellainen positiivinen j_3, että

$$\sum_{k=1}^{j_1} p'_k + \sum_{k=1}^{j_2} q'_k + \sum_{k=j_1+1}^{j_3} p'_k > r.$$

Valitsemalla positiivisten termien jonosta termit $p'_{j_1+1}, \ldots, p'_{j_3}$, saatiin summa kasvamaan taas suuremmaksi kuin r. Sitten palataan taas negatiivisten termien pariin.

Tämän toistaminen n kertaa tuottaa summan $S_{j_1+j_2+\ldots+j_n}$. Nyt $|S_{j_1+j_2+\ldots+j_n} - r|$ on pienempi kuin viimeisin lisätty termi, koska $(p'_k)_{k=1}^{\infty}$ on vähenevä ja $(q'_k)_{k=1}^{\infty}$ kasvava. Koska $p'_k, q'_k \to 0$, niin saamme kohti r suppenevan sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ uudelleenjärjestelyn.

Hajaantumaan sarja saadaan, kun negatiivisten termien jonosta valitaan ensimmäinen termi q'_1. Jatketaan valitsemalla pienin sellainen positiivinen j_1, että

$$\left(\sum_{k=1}^{j_1} p'_k\right) + q'_1 > 1.$$

Eli poimittiin j_1 ensimmäistä termiä positiivisten termien jonosta $(p'_k)_{k=1}^{\infty}$, niin että summa kasvaa suuremmaksi kuin luvun q'_1 itseisarvo lisättynä yhdellä. Tämä voidaan tehdä, koska $\sum\limits_{k=1}^{n} p'_k \to \infty$, kun $n \to \infty$. Jatketaan ottamalla negatiivisten termien jonon toinen termi q'_2. Valitaan sitten pienin sellainen positiivinen j_2, että

$$\left(\sum_{k=1}^{j_1} p'_k\right) + \left(\sum_{k=j_1+1}^{j_2} p'_k\right) + q'_1 + q'_2 > 2.$$

Nyt uudelleenjärjestelyn summa kasvoi suuremmaksi kuin 2. Tätä jatkamalla m:s askel on valita sellainen pienin sellainen $j_m \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\left(\sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} p'_k \right) + q'_i \right) > m,$$

missä $j_0 = 1$. Täten uudelleenjärjestelyn m:s osasumma on suurempi kuin m. Näin alkuperäisen sarjan termit saadaan järjestettyä uudelleen, niin että uuden sarjan osasummien jono kasvaa rajatta. Täten sarjan uudelleenjärjestely hajaantuu.

Mahdolliset nollatermit voidaan molemmissa tapauksissa lisätä uudelleenjärjestelyihin mielivaltaisilla tavoilla, ilman että se vaikuttaa sarjojen suppenemiseen tai hajaantumiseen. □

Huomautus. Olennaista edellisessä todistuksessa on se, että positiivisten termien ja negatiivisten termien sarjat hajaantuvat. Täten sarjan uudelleenjärjestelyissä voimme kasvattaa tai vähentää kokonaissummaa mielivaltaisen paljon riippumaatta siitä, mitkä termit on jo käytetty. Kuitenkin molemmissa on mielivaltaisen pieniä termejä, joten summaus saadaan lopulta halutessamme suppenemaan.

Esimerkiksi sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ uudelleenjärjestelyjen osasummat saadaan kasvavaan tai vähenemään mielivaltaisen suuriksi. Kuitenkaan ne eivät voi supeta, koska käytössä ei ole mielivaltaisen pieniä termejä.

Seuraavan lauseen todistus on harjoitustehtävänä.

Lause. *Suppenevan positiivitermisen sarjan termien uudelleenjärjestely ei vaikuta sarjan suppenemiseen tai summaan.*

Tämän avulla saadaan

Lause. *Itseisesti suppenevan sarjan termien uudelleenjärjestely ei vaikuta sarjan suppenemiseen tai summaan.*

Todistus. Todistuksen periaate on seuraava. Olkoon $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mielivaltaisen itseisesti suppenevan sarjan summa. Nyt sarjan positiivisten ja negatiivisten termien sarjat suppenevat ja $s = p + q$, missä p on positiivisten termien sarjan summa ja q negatiivisten termien sarjan summa. Positiivitermisen sarjan termien järjestely ei vaikuttanut sarjan summaan, joten positiiviset ja negatiiviset termit voidaan järjestellä p:ssa ja q:ssa vapaasti.

Olkoon $\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} b_k$ mielivaltaisen uudelleenjärjestelyn m:s osasumma. Nyt tämän osasumman termit voidaan järjestää positiivisiin ja negatiivisiin. Nyt

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{b_k>0}^{m} b_k + \lim_{m\to\infty} \sum_{b_k<0}^{m} b_k = p + q = s.$$

□

Täten huomataan, että itseisesti suppenevat sarjat ovat muita sarjoja paremmin määriteltyjä. Niiden summa on olemassa ja summausjärjestys voidaan valita mielivaltaisesti.

4 Alternoivat sarjat

Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ positiiviterminen jono. Tällöin sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

sanotaan alternoivaksi sarjaksi.

Leibnizin lause. *Olkoon* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *positiiviterminen vähenevä jono ja* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. *Tällöin sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

suppenee.

Todistus. Olkoon s_n sarjan n:s osasumma. Nyt

$$|s_{n+k} - s_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k}(-1)^{i+1}a_i\right|.$$

Koska jono on vähenevä, niin $a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \ldots \geq a_{n+k}$ ja k:n ollessa parillinen saadaan, että

$$\begin{aligned}
|s_{n+k} - s_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots + (-1)^{k+1}a_{n+k} \\
&= a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{a_{n+k}}_{>0} \\
&< a_{n+1}.
\end{aligned}$$

ja k:n ollessa pariton saadaan, että

$$\begin{aligned}
|s_{n+k} - s_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots + (-1)^{k+1}a_{n+k} \\
&= a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{n+k-1} - a_{n+k})}_{\geq 0} \\
&\leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

Siis $|s_{n+k} - s_n| \leq a_{n+1} \to 0$, kun $n \to \infty$ ja $k = 1, 2, 3, \ldots$. Siten s_n on Cauchyn jono ja sarja suppenee. □

Huomautus. Leibnizin lauseessa oletus jonon vähenevyydestä on tärkeä. Jos sarja on alternoiva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\lim_{k\to\infty} = 0$, niin sarja voi hajaantua. Esimerkiksi käy sarja

$$1 - \frac{q}{2} + \frac{1}{3} - \frac{q}{4} + \frac{1}{5} - \frac{q}{6} + \dots,$$

missä $q \neq 1$.

Todistuksessa saatiin arvio $|s_{n+k} - s_n| \leq a_{n+1}$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$. Siten mikäli sarja suppenee, niin

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| = |s - s_n| < a_{n+1}.$$

Täten sarjan summaa arvioidessa osasummalla s_n tehdään virhe, jonka itseisarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin ensimmäinen pois jätetyn termin itseisarvo.

5 Sarjojen algebraa ja Cauchyn tulosarja

Koska sarjoissa on äärettömän monta termiä, täytyy tavalliset laskuoperaatiot kuten yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku määritellä sarjoille erikseen. Seuraavassa esitellyt määritelmät ovat vain yhdet mahdolliset.

Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sarjoja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tällöin määritellään

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k).$$

Tämä määritelmä sisältää siis sarjojen yhteen- ja vähennyslaskun sekä kertomisen skalaarilla.

Sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Cauchyn tulosarjaksi nimitetään sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, missä

$$c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \ldots + a_k b_1 = \sum_{i+j=k+1}^{\infty} a_i b_j.$$

Täten

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots$$

Nyt jakolasku voidaan määrittää kertolaskun käänteislaskutoimituksena. Asetetaan, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k : \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

jos ja vain jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on sarjojen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ Cauchyn tulosarja.

Huomautus. Edelliset määritelmät yhtyvät reaalilukujen laskutoimituksiin, jos reaaliluku $r \in \mathbb{R}$ tulkitaan sarjaksi

$$r + 0 + 0 + \ldots$$

Tällöin esimerkiksi $d = \frac{a}{b}$ jos ja vain jos $a = bd$. Sarjan voisikin tulkita vektoriksi, jossa on äärettömän monta koordinaattia.

Näille sarjojen laskutoimituksille voidaan johtaa erilaisia ominaisuuksia, kuten seuraavan lauseen, jonka todistus on harjoitustehtävänä.

Lause. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_1$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_2$ *kaksi suppenevaa sarjaa. Nyt niiden summasarja suppenee ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = S_1 + S_2.$$

Cauchyn tulosarjan suppeneminen ei kuitenkaan ole itsestään selvää, kuten seuraavan lauseen todistus osoittaa.

Lause. *Jos sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee itseisesti ja sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *suppenee, niin niiden Cauchyn tulosarja suppenee ja sen summa on näiden sarjojen summien tulo.*

Todistus. Merkitään seuraavasti:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ , \ s' = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ja } \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

Merkinnät ovat järkeviä oletusten perusteella. Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} c_k &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) \\
&= a_1(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + a_nb_1 \\
&= a_1(\sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k) + a_2(\sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=n}^{\infty} b_k) + \ldots + a_n(\sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=2}^{\infty} b_k) \\
&= s_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \underbrace{(a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1} + \ldots + a_n\sigma_1)}_{=\lambda_n} \\
&= s_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \lambda_n
\end{aligned}$$

Siis jos $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, niin $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = \lim_{n\to\infty} (s_n \sum_{k=1}^{\infty} b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$ mikä olikin todistettavana.

Koska $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Eli mielivaltaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $n'_\epsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $|\sigma_n| < \frac{\epsilon}{2s'}$ aina, kun $n > n'_\epsilon$.

$$\begin{aligned}
|\lambda_n| &= |a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1} + \ldots + a_n\sigma_1| \\
&= \left|a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1} + \ldots + a_{n-n'_\epsilon+1}\sigma_{n'_\epsilon} + a_{n-n'_\epsilon}\sigma_{n'_\epsilon+1} + \ldots + a_n\sigma_1\right| \\
&\leq |a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1}| + \ldots + \left|a_{n-n'_\epsilon+1}\sigma_{n'_\epsilon}\right| + \left|a_{n-n'_\epsilon}\sigma_{n'_\epsilon+1}\right| + \ldots + |a_n\sigma_1| \\
&< \frac{\epsilon}{2s'}(|a_1| + \ldots + \left|a_{n-n'_\epsilon}\right|) + \left|a_{n-n'_\epsilon}\sigma_{n'_\epsilon+1}\right| + \ldots + |a_n\sigma_1|
\end{aligned}$$

Nyt $|a_1| + \ldots + \left|a_{n-n'_\epsilon}\right| \leq s'$. Koska $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $|\sigma_n|$ on rajoitettu ja n'_ϵ vakio, niin voidaan valita sellainen n''_ϵ siten, että

$$\left|a_{n-n'_\epsilon}\sigma_{n'_\epsilon+1}\right| + \ldots + |a_n\sigma_1| < \frac{\epsilon}{2} \text{ aina, kun } n > n''_\epsilon$$

Valitsemalla $n_\epsilon = \max\{n''_\epsilon, n'_\epsilon\}$ saadaan, että

$$|\lambda_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2s'}s' = \epsilon \text{ aina, kun } n > n_\epsilon$$

Koska ϵ oli valittu mielivaltaiseksi saadaan, että $\lambda_n \to 0$, kun $n \to \infty$. $\square$

Tämän lauseen avulla voidaan todistaa seuraava lause.

Lause. *Kahden itseisesti suppenevan sarjan Cauchyn tulosarja suppenee itseisesti.*