Funktionaalianalyysi
800651S

Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
2008
Tomi Alaste ja Mikael Lindström

Sisältö

1 **Metriikka ja metrinen avaruus** *1*
2 **Normiavaruudet ja Banachin avaruudet** *11*
3 **Banachin kiintopisteperiaate** *26*
4 **Hilbertin avaruudet** *29*
5 **Lineaariset operaattorit** *37*
6 **Bairen kategorialause ja sen sovelluksia** *43*
7 **Avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet** *46*
8 **Dualiteetti, Hahn-Banachin lause ja sovelluksia** *52*
9 **Operaattorin transpoosi ja adjungaatti** *62*
10 **Kompaktit operaattorit ja niiden spektri** *71*
Kirjallisuus *85*

Luku 1

Metriikka ja metrinen avaruus

Määritelmä 1.1. Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on *metriikka* joukossa X, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(M1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (kolmioepäpyhtälö),
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ kaikilla $x, y \in X$,
(M3) $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

Jos d on metriikka joukossa X, niin pari (X,d) on *metrinen avaruus*.

Huomautus. Olkoon (X,d) metrinen avaruus.

1. $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$.
2. Metriikka on yleensä tällä kurssilla jonkin normin (kts. Määritelmä 2.1) indusoima.
3. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on *semi-metriikka* (*pseudo-metriikka*), jos d toteuttaa ehdot (M1) ja (M2) sekä ehdon
   (M4) $d(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Esimerkki. 1. Pari $(\mathbb{R}^n, d_e)$ on metrinen avaruus, kun asetetaan

$$d_e(x,y) = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\Big)^{1/2},$$

missä $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Tätä metriikkaa sanotaan *euklidiseksi metriikaksi*. Erikoistapauksena $n = 1$, jolloin $d_e(x,y) = |x - y|$.

2. Olkoon $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva }\}$. Normi

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

indusoi metriikan $d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty$ joukkoon $C[0,1]$.

Merkintöjä. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja $r > 0$. Silloin

$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ on *avoin* x-keskinen r-säteinen pallo,
$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ on *suljettu* x-keskinen r-säteinen pallo,
$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$ on x-keskinen r-säteinen *pallonkuori*.

Määritelmä 1.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *avoin*, jos jokaista $x \in A$ kohti on olemassa sellainen $r = r(x) > 0$, että $B(x, r) \subseteq A$. Joukko A on *suljettu*, jos $X \setminus A$ on avoin.

Määritelmä 1.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Pisteen $x \in X$ *ympäristö* on joukko $U \subseteq X$ siten, että $B(x, r) \subseteq U$ jollakin $r > 0$. Joukko $B(x, r)$, missä $r > 0$, on pisteen x *palloympäristö*. Piste x on joukon $A \subseteq X$ *sisäpiste* jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq A$. Joukon A *sisus* $\mathring{A} = \text{int}(A)$ on joukon A sisäpisteiden muodostama joukko.

Nyt $\text{int}(A) \subseteq A$ ja $\text{int}(A)$ on joukon A suurin avoin osajoukko.

Määritelmä 1.4. Joukon X *topologia* τ on kokoelman joukon X osajoukkoja siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

(T1) $\emptyset \in \tau$ ja $X \in \tau$.
(T2) Jos $O_\alpha \in \tau$ jokaiselle $\alpha \in I$, niin $\cup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \tau$.
(T3) Jos $O_j \in \tau$, $1 \leq j \leq n$, niin $\cap_{j=1}^{n} O_j \in \tau$.

Tällä kurssilla tarkastellaan yleensä *metriikan d indusoimaa topologiaa*

$$\tau_d = \{U : U \text{ on avoin avaruudessa } X\}.$$

Määritelmä 1.5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Piste $x \in X$ on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokaiselle pisteen x ympäristölle U löytyy $y \in A$ siten, että $x \neq y$ ja $y \in U$.

Määritelmä 1.6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* kohti pistettä $x \in X$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ jokaiselle $n \geq n_\varepsilon$. Jos jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä x, merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ tai $x_n \to x$, kun $n \to \infty$.

Huomautus Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden (X, d) jono ja $x \in X$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jos ja vain jos jokaiselle pisteen x ympäristölle U on olemassa n_ε siten, että $x_n \in U$ kaikille $n \geq n_\varepsilon$. Tämä on vielä yhtäpitävää sen kanssa, että jono $(d(x_n, x))_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti nollaa avaruudessa $(\mathbb{R}, d_e)$.

Määritelmä 1.7. Joukon A *sulkeuma* on joukko

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ on joukon } A \text{ kasaantumispiste}\} \cup A.$$

Avaruuden X osajoukko A on *tiheä* avaruudessa X, jos $\overline{A} = X$.

Huomautus Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko A on tiheä avaruudessa X jos ja vain jos $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ aina, kun $x \in X$ ja $r > 0$. Tämä on vielä yhtäpitävää sen kanssa, että $U \cap A \neq \emptyset$ jokaiselle avaruuden X avoimelle epätyhjälle joukolle U.

Määritelmä 1.8. Metrinen avaruus (X, d) on *separoituva* jos sillä on numeroituva tiheä osajoukko.

Esimerkki.

1. Avaruus $(\mathbb{R}, d_e)$ on separoituva, sillä $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$.
2. Avaruus $(\mathbb{R}^n, d_e)$ on separoituva, kun d_e on euklidinen metriikka. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ annettuja. Valitaan jokaiselle $1 \leq j \leq n$ sellainen $q_j \in \mathbb{Q}$, että $|x_j - q_j| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Tällöin $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ ja

$$d_e(x, q) = (\sum_{j=1}^{n} |x_j - q_j|^2)^{1/2} < (\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n})^{1/2} = (n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n})^{1/2} = \varepsilon.$$

   Siis $x \in \overline{\mathbb{Q}^n}$. Lisäksi $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva, koska $\mathbb{Q}$ on numeroituva.

Lause 1.9. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Oletetaan, että on olemassa ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä osajoukkoja (eli $U \cap V = \emptyset$ kaikilla $U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V$). Tällöin (X, d) ei ole separoituva.

Todistus. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että (X, d) on separoituva. Tällöin siis $X = \overline{A}$, missä $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ on numeroituva. Jos $U \in \mathcal{U}$, niin U on avoin ja epätyhjä. Vastaoletuksen perusteella voidaan kiinnittää indeksi $n_U \in \mathbb{N}$ siten, että $a_{n_U} \in U$. Voidaan siis määritellä kuvaus $f : \mathcal{U} \to \mathbb{N}$ siten, että $f(U) = n_U$. Nyt f on injektio: Jos $U, V \in \mathcal{U}$, $U \neq V$, niin $U \cap V = \emptyset$. Siten $a_{n_U} \neq a_{n_V}$, eli $n_U \neq n_V$. Tästä seuraisi että $\mathcal{U}$ on numeroituva, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Määritelmä 1.10. Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko A on *rajoitettu*, jos on olemassa $x \in X$ ja $r > 0$ siten, että $A \subseteq B(x, r)$.

Huomautus Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko A on rajoitettu jos ja vain jos

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty.$$

Tällöin lukua $d(A)$ sanotaan joukon A *halkaisijaksi*.

Todistus. Oletetaan, että on olemassa $z \in X$ ja $r > 0$ joille $A \subseteq B(z, r)$. Tällöin $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, r) < 2r$ kaikille $x, y \in A$, joten $d(A) \leq 2r$. Toisaalta, jos $\delta = d(A) < \infty$, niin $A \subseteq B(x, \delta + 1)$ mille tahansa $x \in A$. □

Lause 1.11. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

a) Jos (x_n) on avaruuden X suppeneva jono, niin joukko $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu. Lisäksi jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ raja-arvo on yksikäsitteinen.

b) Jos $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ avaruudessa X kun $n \to \infty$, niin $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ avaruudessa $\mathbb{R}$.

Todistus. a) Oletetaan, että $x_n \to x$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Siis $x_n \in B(x, \varepsilon)$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$, joten $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu.
Oletetaan, että $x_n \to x$ ja $x_n \to y$ joillekin $x, y \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ ja $d(x_n, y) < \varepsilon/2$ aina kun $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon, \text{ kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Tässä $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, joten täytyy olla $x = y$.

b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin löytyy $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ ja $d(y_n, y) < \varepsilon/2$ jokaiselle $n \geq n_\varepsilon$. Jos $n \geq n_\varepsilon$, niin $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$. Tästä saadaan $d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \varepsilon$ kaikille $n \geq n_\varepsilon$. Vastaavasti $d(x, y) - d(x_n, x) < \varepsilon$ kaikille $n \geq n_\varepsilon$, joten $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon$ jokaiselle $n \geq n_\varepsilon$. □

Määritelmä 1.12. Metrisen avaruuden (X, d) jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ on *Cauchy-jono* jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kaikille $n, m \geq n_\varepsilon$. Toisin sanoen, jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ on Cauchyn jono, jos $d(x_n, x_m) \to 0$, kun $n, m \to \infty$.

Lause 1.13. Jokainen metrisen avaruuden suppeneva jono on Cauchy-jono.

Todistus. Tämä seuraa suoraan kolmioepäyhtälöstä. □

Määritelmä 1.14. Metrinen avaruus (X, d) on täydellinen jos jokainen avaruuden X Cauchy-jono suppenee johonkin avaruuden X pisteeseen.

Esimerkki.
1. $(\mathbb{R}^n, d_e)$ on täydellinen ($n \geq 2$ seuraa avaruuden $\mathbb{R}$ täydellisyydestä).
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ei ole täydellinen euklidisella metriikalla $d_e(x, y) = |x - y|$.
3. Olkoon $C[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva }\}$ ja asetetaan

$$d_1(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|.$$

Tällöin d_1 on metriikka avaruudessa $C[-1, 1]$. Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ määritellään

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1] \\ nt + 1 & \text{kun } t \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ -nt + 1 & \text{kun } t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}.$$

Nyt

$$d_1(f_n, 0) = \int_{-1}^{1} |f_n(t)| dt = \frac{2}{n} \to 0, \text{ kun } n \to \infty,$$

joten $f_n \to 0$ metrisessä avaruudessa $(C[-1, 1], d_1)$.
Toisaalta, jos avaruudessa $C[-1, 1]$ määritellään metriikka kaavalla

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [-1, 1]} |f(t) - g(t)|,$$

niin

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{t\in[-1,1]} |f_n(t)| = 1 \text{ jokaiselle } n \in \mathbb{N}.$$

Jono $(f_n)_{n=1}^\infty$ ei siis suppene kohti nollafunktiota avaruudessa $(C[-1,1], d_\infty)$.

Osoitetaan, että avaruus $(C[-1,1], d_1)$ ei ole täydellinen. Olkoon $f_n(t) = t^{1/(2n+1)}$ kun $n \in \mathbb{N}$ ja $t \in [-1,1]$. Huomaa, että koska $2n+1$ on pariton jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, niin funktio f_n on hyvin määritelty myös kun $t < 0$. Koska

$$\begin{aligned}
d_1(f_n, f_m) &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)| dt \\
&= 2\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt \\
&= 2\Big|\Big/_0^1 \frac{2n+1}{2n+2} t^{\frac{2n+2}{2n+1}} - \Big/_0^1 \frac{2m+1}{2m+2} t^{\frac{2m+2}{2m+1}}\Big| \\
&= \frac{|4n-4m|}{(2n+2)(2m+2)} \\
&< \frac{|m-n|}{mn} \\
&\le \frac{1}{m} + \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

saadaan, että $d_1(f_n, f_m) \to 0$, kun $n, m \to \infty$. Näin ollen $(f_n)_{n=1}^\infty$ on Cauchyn jono avaruudessa $(C[-1,1], d_1)$. Toisaalta, jono $(f_n)_{n=1}^\infty$ ei suppene tässä avaruudessa. Tehdään vastaoletus: On olemassa $f \in C[-1,1]$ jolle $d_1(f_n, f) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin

$$\int_0^1 |f(t)-1| dt \le \int_0^1 |f(t)-f_n(t)| dt + \int_0^1 |f_n(t)-1| dt \le d_1(f_n, f) + (1 - \frac{2n+1}{2n+2}) \to 0,$$

kun $n \to \infty$, joten funktion f jatkuvuuden nojalla $f(t) = 1$ jokaiselle $t \in [0,1]$. Vastaavasti nähdään, että $f(t) = -1$ jokaiselle $t \in [-1,0]$, mutta tästä seuraa ristiriita $-1 = f(0) = 1$.

Lause 1.15. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $A \subseteq X$ epätyhjä. Tällöin

a) $x \in \overline{A}$ jos ja vain jos on olemassa jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ siten, että $x_n \in A$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

b) A on suljettu jos ja vain jos $x \in A$ jokaiselle avaruuden X jonolle $(x_n)_{n=1}^\infty$, jolle $x_n \in A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Todistus. (a) Oletetaan, että $x \in \overline{A}$. Jos $x \in A$, niin jono $(x_n)_{n=1}^\infty$, missä $x_n = x$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, on etsitty jono. Oletetaan, että $x \notin A$. Tällöin x on joukon A kasaantumispiste, joten jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in A \cap B(x, 1/n)$. Selvästi $x_n \in A$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x$, kun $n \to \infty$.

Oletetaan sitten, että on olemassa jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ siten, että $x_n \in A$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x$, kun $n \to \infty$. Jos $x \in A$, niin $x \in \overline{A}$. Voidaan siis olettaa, että

$x \notin A$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in B(x, \varepsilon)$ kun $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin x on joukon A kasaantumispiste, eli $x \in \overline{A}$.

(b) Oletetaan, että A on suljettu. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono joukossa A joka suppenee kohti pistettä $x \in X$. Oletetaan, että $x \notin A$, jolloin $x \in X \setminus A$. Koska $X \setminus A$ on avoin, on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Olkoon $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ kaikille $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin $x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ kun $n \geq n_\varepsilon$, eli $x_n \notin A$ kun $n \geq n_\varepsilon$. Tämä on ristiriita, joten täytyy olla $x \in A$.
Oletetaan, että $x \in A$ jokaiselle avaruuden X jonolle $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jolle $x_n \in A$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x$, kun $n \to \infty$. Olkoon $x_0 \in X \setminus A$. Pitäisi löytää $\varepsilon > 0$ siten, että $B(x_0, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Oletetaan, että tällaista $\varepsilon > 0$ ei ole olemassa. Tällöin jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_n \in B(x_0, 1/n) \cap A$. Nyt $x_n \in A$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x_0$, kun $n \to \infty$, joten oletuksen nojalla $x_0 \in A$. Tämä on ristiriita, joten täytyy löytyä $\varepsilon > 0$ siten, että $B(x_0, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Tällöin $X \setminus A$ on avoin, eli A on suljettu. □

Määritelmä 1.16. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subseteq X$ ja $(U_i)_{i \in I}$ perhe avaruuden X osajoukkoja. Jos $A \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, niin perhe $\{U_i\}_{i \in I}$ on joukon A *peite*. Jos tässä $K \subseteq I$ ja myös $A \subseteq \cup_{i \in K} U_i$, sanotaan, että $\{U_i\}_{i \in K}$ on peitteen $\{U_i\}_{i \in I}$ *alipeite*. Osajoukon A peitettä sanotaan *avoimeksi peitteeksi*, jos U_i on avoin jokaiselle $i \in I$.

Määritelmä 1.17. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Joukko A on *kompakti* jos jokaisella joukon A avoimella peitteellä on äärellinen alipeite.

Lause 1.18. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subseteq X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

a) Joukko A on kompakti.
b) Jokaisella joukon A äärettömällä osajoukolla on kasaantumispiste, joka kuuluu joukkoon A.
c) Jokaisella joukon A pisteiden jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotakin joukon A pistettä.

Todistus. a) $\Rightarrow$ b) Oletetaan, että A on kompakti. Olkoon D joukon A ääretön osajoukko. Jos mikään $x \in A$ ei ole joukon D kasaantumispiste, niin jokaiselle $x \in A$ on olemassa $\varepsilon_x > 0$ siten, että $B(x, \varepsilon_x) \cap D \subseteq \{x\}$. Koska A on kompakti, voidaan valita äärellinen joukko $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ siten, että $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_{x_i})$. Tällöin

$$D \subseteq D \cap \left(\cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_{x_i}) \right) = \cup_{i=1}^{n} \left(D \cap B(x_i, \varepsilon_{x_1}) \right) \subseteq \{x_1, \ldots x_n\}.$$

Tämä on mahdotonta, koska D on ääretön. Täytyy siis olla, että b) pätee.

b) $\Rightarrow$ c) Oletetaan, että joukon A jokaisella äärettömällä joukolla on kasaantumispiste. Olkoon (x_n) jono joukon A pisteitä. Jos joukko $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on äärellinen, niin jokin sen pisteistä saadaan äärettömän monella luvun n arvolla, joten saadaan joukon A pistettä kohti suppeneva osajono. Muussa tapauksessa joukolla

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on oletuksen nojalla kasautumispiste $x \in A$. Lauseen 1.15 todistuksen nojalla saadaan, että jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ joukko $B(x, 1/k)$ sisältää äärettömän monta jonon pistettä (Harjoitustehtävä). Nyt voidaan valita induktiivisesti luvut $n_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, siten, että $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ ja $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Jonolle $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ pätee $x_{n_k} \to x$, kun $k \to \infty$.

c) $\Rightarrow$ a) Oletetaan, että jokaisella joukon A pisteistä koostuvalla jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotain joukon A pistettä. Olkoon $\{U_i\}_{i \in I}$ joukon A mielivaltainen avoin peite. Pitää siis osoittaa, että perheellä $\{U_i\}_{i \in I}$ on äärellinen alipeite.

Väite 1: On olemassa $r > 0$ siten, että jokaista $y \in A$ vastaa $i \in I$ jolle $B(y, r) \subseteq U_i$.

Tehdään vastaoletus. Tällöin voidaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ valita $y_n \in A$ siten, että joukko $B(y_n, 1/n)$ ei sisälly mihinkään joukoista U_i, $i \in I$. Oletuksen (c) nojalla jonolla $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ on osajono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ joka suppenee kohti joukon A pistettä. Siis, $z_n \to z \in A$ kun $n \to \infty$. Nyt $z \in U_{i_0}$ jollekin $i_0 \in I$ ja koska U_{i_0} on avoin, löytyy $\varepsilon > 0$, jolle $B(z, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(z_n, z) < \varepsilon/2$ aina, kun $n \geq n_0$. Valitaan sitten $N \geq n_0$ siten, että $1/N < \varepsilon/2$. Tällöin $B(z_N, 1/N) \subseteq B(z, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$, sillä jos $y \in B(z_N, 1/N)$, niin

$$d(y, z) \leq d(y, z_N) + d(z_N, z) \leq 1/N + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, koska z_N on alussa muodostetun jonon $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ piste.

Väite 2: Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa äärellinen joukko $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ siten, että

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Tehdään jälleen vastaoletus: On olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että mikään äärellinen kokoelma ε-palloja, joiden keskipisteet ovat joukossa A, ei peitä joukkoa A. Konstruoidaan induktiolla jono seuraavasti: Olkoon $y_1 \in A$ mielivaltainen. Tämän jälkeen valitaan

$$y_2 \in A \setminus B(y_1, \varepsilon),\ y_3 \in A \setminus [B(y_1, \varepsilon) \cup B(y_2, \varepsilon)], \text{ etc.}$$

Näin muodostetulle jonolle pätee $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon$ kaikille $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Tämä on ristiriita oletuksen (c) kanssa, joten vastaoletus on väärä.

Osoitetaan nyt, että alussa valitulla joukon A peitteellä $\{U_i\}_{i \in I}$ on äärellinen alipeite. Olkoon $r > 0$ kuten väitteessä 1. Väitteen 2 mukaan on olemassa äärellinen joukko $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ siten, että $A \subseteq \cup_{k=1}^{n} B(x_k, r)$. Väitteen 1 mukaan jokaiselle $k \in \{1, \ldots, n\}$ on olemassa $i_k \in I$, jolle $B(x_k, r) \subseteq U_{i_k}$. Tällöin

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

ja haluttu alipeite on löydetty. $\square$

Määritelmä 1.19. (a) Metrisen avaruuden X osajoukko A on *relatiivikompakti*, jos sen sulkeuma $\overline{A}$ on kompakti, eli jos A sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon.

(b) Metrisen avaruuden X osajoukko A on *prekompakti*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa joukon A peite äärellisen monella ε-säteisellä pallolla $B(x, \varepsilon)$, missä $x \in A$.

Lause 1.20. Kompakti metrinen avaruus X on separoituva.

Todistus. Lauseen 1.18 väitteen 2 mukaan jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa äärellinen joukko $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ siten, että

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Erityisesti jokaiselle $\varepsilon = 1/k$, missä $k \in \mathbb{N}$, on olemassa avaruuden X äärellinen joukko $\{x_1^{(k)}, \ldots x_{n(k)}^{(k)}\}$ siten, että

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(k)} B(x_i^{(k)}, \frac{1}{k}).$$

Joukko $A = \{x_i^{(k)} : k \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n(k)\}$ on numeroituva. Osoitetaan, että joukko A on tiheä avaruudessa X. Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Valitaan $x \in U$ ja $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq U$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ sellainen, että $1/k < r$. Tällöin $x \in B(x_i^{(k)}, 1/k)$ jollain $1 \leq i \leq n(k)$, joten $x_i^{(k)} \in B(x, 1/k) \subseteq B(x, r) \subseteq U$. Siis A on avaruuden X tiheä osajoukko. □

Lause 1.21. Olkoot (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $A \subseteq X$ sen osajoukko. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(a) A on relatiivikompakti.

(b) A on prekompakti.

(c) Jokaisella joukon A pisteiden jonolla on osajono, joka suppenee avaruudessa X.

Todistus. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Lauseen 1.18 nojalla.

(c) $\Rightarrow$ (b) seuraa Lauseen 1.18 todistuksesta.

(b) $\Rightarrow$ (a) Olkoon $\{U_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ joukon $\overline{A}$ mielivaltainen avoin peite. Oletetaan, että tällä peitteellä ei ole äärellistä alipeitettä. Koska A on prekompakti, on olemassa sellainen äärellinen joukko $\{x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}\} \subseteq A$, että

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_1} B(x_k^{(1)}, 1).$$

Jollekin k, $1 \leq k \leq n_1$, perheellä $\{U_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ ei ole joukon $A_1 := A \cap B(x_k^{(1)}, 1)$ äärellistä alipeitettä (muuten myös joukolle $A = \cup_{k=1}^{n_1}(A \cap B(x_k^{(1)}, 1))$ saataisiin äärellinen alipeite.) Koska A_1 on prekompakti (harjoitustehtävä), niin on olemassa sellainen äärellinen joukko $\{x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}\} \subseteq A_1$, että

$$A_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_2} B(x_k^{(2)}, \frac{1}{2}).$$

Taas on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $1 \leq k \leq n_2$ ja perheellä $\{U_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ ei ole joukon $A_2 := A_1 \cap B(x_k^{(2)}, 1/2)$ äärellistä alipeitettä. Näin jatkamalla saadaaan induktiolla jono joukkoja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, joista mitään ei voida peittää äärellisen monella joukoista U_i, $i \in \mathcal{J}$, ja joille

$$d(x, y) < \frac{2}{n} \text{ aina, kun } x, y \in A_n. \qquad (*)$$

Valitaan jokin piste $x_n \in A_n$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Koska $x_m \in A_n$ kaikilla $m \geq n$, jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on epäyhtälön $(*)$ nojalla Cauchyn jono. Täten raja-arvo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa ja $x \in \overline{A}$. Koska $\overline{A} \subseteq \cup_{i\in\mathcal{J}} U_i$, niin $x \in U_{i_0}$ jollekin $i_0 \in \mathcal{J}$. Koska U_{i_0} on avoin, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(x, \delta) \subseteq U_{i_0}$. Valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x) < \delta/2$ aina, kun $n \geq n_0$. Valitaan sitten $p \geq n_0$ siten, että $2/p < \delta/2$. Tällöin $A_p \subseteq B(x, \delta) \subseteq U_{i_0}$, sillä jos $y \in A_p$, niin

$$d(x, y) \leq d(y, x_p) + d(x_p, x) \leq \frac{2}{p} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Siis joukko A_p voitiin peittää jopa yhdellä joukolla U_{i_0}, mikä on ristiriita konstruktion kanssa. Täten ehdon (a) täytyy olla voimassa. □

Lemma 1.22. Jokainen metrisen avaruuden (X, d) kompakti osajoukko on suljettu ja rajoitettu.

Todistus. Oletetaan, että $A \subseteq X$ on kompakti. Jos $x \in \overline{A}$, niin on olemassa jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että $x_n \in A$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x$, kun $n \to \infty$. Tällöin $x \in A$ Lauseen 1.18 nojalla, joten $\overline{A} = A$ ja A on suljettu. Jos A ei ole rajoitettu, niin on olemassa jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ joukon A pisteitä siten, että $d(x_n, y) > n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ ja $y \in X$. Tällaisella jonolla ei voi olla suppenevaa osajonoa. Tämä on ristiriita, joten joukon A täytyy olla rajoitettu. □

Huomautus. Käänteinen tulos ei päde.

Esimerkki. Joukko $A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq 2\}$ on suljettu avaruudessa $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, sillä $A = [0, 2] \cap \mathbb{Q}$. Selvästi A on rajoitettu. Joukko A ei kuitenkaan ole kompakti, sillä jos esimerkiksi $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono joukon A pisteitä siten, että $q_n \to \sqrt{2}$ kun $n \to \infty$, niin mikään jonon $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono ei suppene joukossa A. (Tämä seuraa siitä, että jokainen jonon $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono suppenee kohti pistettä $\sqrt{2}$ avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla joukossa A ei voi olla minkään jonon $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ osajonon raja-arvoa.)

Lause 1.23 (Heine-Borel)**.** Avaruuden $(\mathbb{R}^n, d_e)$ osajoukko A on kompakti jos ja vain jos A on suljettu ja rajoitettu.

Todistus. Analyysi II. □

Määritelmä 1.24. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, että $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ aina, kun $d(x, y) < \delta$. Funktio f on *jatkuva avaruudessa* X jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

Lause 1.25. Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$ jos ja vain jos $f(x_n) \to f(x_0)$ avaruudessa Y aina, kun $x_n \to x_0$ avaruudessa X.

Todistus. Oletetaan ensin, että f on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ aina, kun $d(x, x_0) < \delta$. Jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, niin on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_0) < \delta$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$. Tällöin $d'(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$, joten $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Oletetaan sitten, että $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ aina, kun $(x_n)_{n=1}^\infty$ on avaruuden X jono jolle $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tehdään vastaoletus: f ei ole jatkuva pisteessä x_0. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ jota kohti ei ole olemassa $\delta > 0$ jolle $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ aina, kun $d(x, x_0) < \delta$. Erityisesti, jos $n \in \mathbb{N}$ ja $\delta = 1/n$, niin on olemassa $x_n \in B(x_0, 1/n)$ jolle $d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Näin saadulle jonolle (x_n) pätee $d(x_n, x_0) < 1/n$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, joten $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Koska $d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, niin jono $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ ei voi supeta kohti pistettä $f(x_0)$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. □

Luku 2

Normiavaruudet ja Banachin avaruudet

Olkoon X vektoriavaruus (eli lineaariavaruus) skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

Määritelmä 2.1. Kuvaus $p : X \to \mathbb{R}_+$ on *normi* avaruudessa X, jos

(N1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in X$ (”kolmioepäyhtälö”)
(N2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ kaikilla $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ (”homogeenisuus”)
(N3) $p(x) = 0$ jos ja vain jos $x = \overline{0}$ (avaruuden X nolla-alkio)

Merkitään $p(x) = \|x\|$. Paria $(X, \|\cdot\|)$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Huomautus.
1. Normin $\|\cdot\|$ määrittely edellyttää, että määrittelyjoukko X on vektoriavaruus: $x + y \in X$ kun $x, y \in X$ ja $\alpha x \in X$ kun $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
2. Kuvaus $p : X \to \mathbb{R}_+$ on *semi-normi* avaruudessa X, jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2). Tällöin $p(\overline{0}) = p(0 \cdot \overline{0}) = |0| p(\overline{0}) = 0$ ja $\{x \in X : p(x) = 0\}$ on avaruuden X vektorialiavaruus.
3. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) = \|x - y\|$, on metriikka avaruudessa X. Erityisesti $\|x\| = d(x, \overline{0})$.

   Todistus. Kaikilla $x, y, z \in X$,

   $$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z),$$

   joten (M1) on voimassa. (N2) implikoi ehdon (M2). Edelleen,

   $$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \overline{0} \Leftrightarrow x = y,$$

   joten myös (M3) on voimassa. □

Lause 2.2. Jos normiavaruuden X Cauchy-jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on osajono $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ joka suppenee kohti vektoria $y \in X$, niin myös alkuperäinen jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti vektoria y.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $\|x_k - x_j\| < \varepsilon/2$ kaikilla $k, j \geq n_\varepsilon$. Koska $x_{n_j} \to y$, on olemassa indeksi $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $j \geq j_\varepsilon$ pätee $n_j \geq n_\varepsilon$ ja $\|x_{n_j} - y\| < \varepsilon/2$. Tällöin

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - y\| < \varepsilon$$

kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Siis $x_n \to y$. $\square$

Määritelmä 2.3. Vektoriavaruuden X normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat *ekvivalentit*, jos on olemassa vakiot $c_1, c_2 > 0$ siten, että

$$c_1\|x\| \leq \|x\|' \leq c_2\|x\|$$

kaikille $x \in X$.

Ekvivalentit normit määräävät samat avoimet ja suljetut joukot, suppenemisen jne. (Harjoitustehtävä.)

Esimerkki. Olkoon X joko $\mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{C}^n$ ja $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Nyt

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_k|$$

ovat normeja avaruudessa X. Nämä normit ovat ekvivalentteja. Todistamme kohta, että äärellisulotteisen normiavaruuden kaikki normit ovat ekvivalentteja.

Määritelmä 2.4. Normiavaruus $(X, \|\cdot\|)$ on *Banach-avaruus* jos se on täydellinen, ts. jokainen avaruuden $(X, \|\cdot\|)$ Cauchy-jono suppenee.

Esimerkki. 1. Olkoon $A \neq \emptyset$ joukko ja

$$B(A) = B(A, \mathbb{K}) = \{f : A \to \mathbb{K} : f \text{ on rajoitettu kuvaus }\}.$$

Asetetaan

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)|, \text{ kun } f \in B(A).$$

Tässä $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ ja $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$ kun $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. On helppo todeta, että näillä operaatioilla varustettuna $B(A, \mathbb{K})$ on vektoriavaruus. Osoitetaan, että $\|\cdot\|_\infty$ on normi avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$: Olkoot $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$. Tällöin

$$|(f + g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

joten

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{t \in A} |(f + g)(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

eli (N1) on voimassa. Olkoon $\alpha \in K$. Tällöin

$$|(\alpha f)(t)| = |\alpha||f(t)|, \text{ joten } \|\alpha f\|_\infty = \sup_{t \in A} |(\alpha f)(t)| = |\alpha| \sup_{t \in A} |f(t)| = |\alpha|\|f\|_\infty,$$

eli (N2) on voimassa. Koska

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0 \text{ kaikilla } t \in A \Leftrightarrow f = 0 \text{ (nollafunktio)},$$

niin myös (N3) toteutuu.

2. Myös avaruuksissa $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$ voidaan määritellä normi edellisen kohdan erikoistapauksena: Tällöin $A = \{1, \ldots, n\}$ ja saadaan normi

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|,$$

missä $x \in \mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \text{ kaikille } 1 \le i \le n\}$.

3. Kun $A = \mathbb{N}$, merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : x(i) = x_i,\ \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}.$$

Annetuista normiavaruuksista saadaan muodostettua uusia avaruuksia monella tavalla. Esimerkiksi seuraavalla periaatteella.

Lause 2.5. Jokaisen normiavaruuden $(X, \|\cdot\|)$ vektorialiavaruus E on normiavaruus (avaruuden X indusoimalla normilla varustettuna).

Esimerkki. Olkoon $X = \ell^\infty$. Seuraavat jonoavaruudet ovat sen vektorialiavaruuksia:

$$c = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to \infty} x_n \text{ on olemassa}\}$$
$$c_0 = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N},\ \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}.$$

Molemmissa normina toimii siis $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Lause 2.6. Jos A on epätyhjä joukko, niin $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Todistus perustuu skalaarikunnan $\mathbb{K}$ täydellisyyteen. Olkoon siis $(f_k)_{k=1}^\infty$ Cauchyn jono avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $t \in A$ mielivaltainen. Nyt on olemassa $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $\|f_k - f_j\|_\infty < \varepsilon$ kaikille $k, j \ge m_\varepsilon$. Siis, jos $k, j \ge m_\varepsilon$, niin

$$|f_k(t) - f_j(t)| \le \|f_k - f_j\|_\infty \le \varepsilon. \qquad (*)$$

Täten skalaarijono $(f_k(t))_{k=1}^\infty$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{K}$ jokaiselle $t \in A$. Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, jono $(f_k(t))_{k=1}^\infty$ suppenee jokaiselle $t \in A$. Määritellään funktio f joukolta A avaruudelle $\mathbb{K}$ seuraavasti: $f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t)$ kaikille $t \in A$.

Nyt riittää osoittaa, että $f \in B(A, \mathbb{K})$ ja $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ kun $k \to \infty$. Käytetään epäyhtälöä $(*)$, joka pätee *tasaisesti* jokaiselle $t \in A$. Pidetään siinä $k \ge m_\varepsilon$ sekä $t \in A$ kiinteänä ja annetaan $j \to \infty$. Tällöin

$$\lim_{j \to \infty} |f_k(t) - f_j(t)| = |f_k(t) - f(t)|,$$

joten epäyhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$|f_k(t) - f(t)| \le \varepsilon, \text{ kun } t \in A \text{ ja } k \ge m_\varepsilon.$$

Tästä saadaan

$$|f(t)| \leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t)| \leq \varepsilon + \|f_k\|_\infty \text{ kaikilla } t \in A,$$

eli $f \in B(A, \mathbb{K})$. Edelleen,

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon \text{ kaikilla } k \geq m_\varepsilon,$$

eli $f_k \to f$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$. □

Erikoistapauksissa $A = \{1, \ldots, n\}$ ja $A = \mathbb{N}$ saadaan

Seuraus 2.7. (a) Avaruus $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, on Banachin avaruus.

(b) Avaruus $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Määritelmä 2.8. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin

$$\ell^p := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p} < \infty\}.$$

Tässä siis $x_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos $x = (x_n)_{n=1}^\infty, y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, niin määritellään $x + y = (x_n + y_n)_{n=1}^\infty$ ja $\alpha x = (\alpha x_n)_{n=1}^\infty$. Avaruus

$$\ell^1 = \{x = (x_i)_{i=1}^\infty : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |x_i| < \infty\}$$

on *itseisesti* tai *absoluuttisesti suppenevien sarjojen avaruus*. On helppo todeta, että $\|\cdot\|_1$ on normi. Vaikeammin käsiteltäviä ovat muut ℓ^p-avaruudet, $1 < p < \infty$.

Lemma 2.9 (Hölderin epäyhtälö)**.** Olkoot $1 < p, q < \infty$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, eli p ja q ovat (toistensa) duaaliekspontentteja. Jos $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$ ja $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^q$, niin

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^\infty |y_k|^q)^{1/q}.$$

Todistus. Olkoot $A := p \ln a$ ja $B := q \ln b$, missä $a, b > 0$. Koska eksponenttifunktio on konveksi (eli $\mathrm{e}^{tx+(1-t)y} \leq t\mathrm{e}^x + (1-t)\mathrm{e}^y$ kun $t \in [0,1]$), saadaan

$$\mathrm{e}^{\frac{A}{p} + \frac{B}{q}} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^A + \frac{1}{q}\mathrm{e}^B,$$

joten

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Jos nyt $x \in \ell^p$ ja $y \in \ell^q$ siten, että $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, niin

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k||y_k| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^\infty |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Voimme olettaa, että $0 \neq x \in \ell^p$ ja $0 \neq y \in \ell^q$. Olkoot $x' = x/\|x\|_p$ ja $y' = y/\|y\|_q$, jolloin $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$. Nyt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq 1,$$

eli

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

□

Kun osoitamme, että avaruudet ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ ovat normiavaruuksia, tarvitsemme seuraavan arvion, jota sanotaan *Minkowskin epäyhtälöksi* kun $1 < p < \infty$.

Lause 2.10. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{1/p}$$

kaikille $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Todistus. Tapaus $p = 1$ on helppo. Olkoot $p > 1$ ja $q = \frac{p}{p-1}$, jolloin $1/p + 1/q = 1$. Jos $a, b \geq 0$, niin

$$(a+b)^p \leq (2\max\{a,b\})^p = 2^p(\max\{a,b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Tämän avulla saadaan

$$|x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|)^p \leq 2^p(|x_i|^p + |y_i|^p)$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p < \infty$. Toisaalta,

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}.$$

Edelleen, $(|x_i + y_i|^{p-1})^q = |x_i + y_i|^p$, joten $\sum_{i=1}(|x_i + y_i|^{p-1})^q < \infty$. Näin ollen $((x_i + y_i)^{p-1})_{i=1}^{\infty} \in \ell^q$. Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|x_i|}_{\in \ell^p} \underbrace{|x_i + y_i|^{p-1}}_{\in \ell^q} + \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|y_i|}_{\in \ell^p} \underbrace{|x_i + y_i|^{p-1}}_{\in \ell^q} \\
&\leq \|x\|_p (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{q(p-1)})^{1/q} + \|y\|_p (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{q(p-1)})^{1/q} \\
&= \|x\|_p (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{1/q} + \|y\|_p (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{1/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/q}.
\end{aligned}$$

Koska $p/q = p - 1$, saadaan $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. □

Lause 2.11. Avaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus, kun $1 \leq p < \infty$.

Todistus. Olkoon $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$. Tällöin $x + y = (x_i + y_i)_{i=1}^{\infty}$ ja Lauseen 2.10 mukaan

$$\|x+y\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Erityisesti $x + y \in \ell^p$ ja (N1) pätee. Jos $\alpha \in \mathbb{K}$, niin

$$\|\alpha x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha x_i|^p)^{1/p} = |\alpha|(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{1/p} = |\alpha|\|x\|_p,$$

eli (N2) on myös voimassa. Edelleen,

$$0 = \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{1/p} \Leftrightarrow x_i = 0 \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = (0,0,0,\ldots),$$

eli (N3) on voimassa. □

Huomautus

1. $\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty$ kun $1 \leq p \leq q < \infty$.
2. Vektorit $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots) \in \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, ovat lineaarisesti riippumattomia, joten $\dim \ell^p = \infty$ kaikille $1 \leq p \leq \infty$.

Esimerkki. Avaruus $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole täydellinen, kun

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i| \text{ kaikille } x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^1.$$

Ratkaisu: Olkoon $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$ kun $n \in \mathbb{N}$. Selvästi $x^{(n)} \in \ell^1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta, kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\|x^{(n)} - x^{n+p}\|_\infty = \sup_{n+1\leq i\leq n+p}\frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ kaikilla } p \in \mathbb{N}, \text{ kun } n \to \infty.$$

Näin ollen $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$. Osoitetaan seuraavaksi, että ei ole olemassa sellaista $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^1$, että

$$\|x^{(n)} - y\|_\infty \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

Tehdään vastaoletus: On olemassa sellainen $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^1$, että $x^{(n)} \to y$ supnormissa. Jonon $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ koordinaatit ovat muotoa

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{i} & , 1 \leq i \leq n, \\ 0 & , i > n. \end{cases}$$

Kaikilla indekseillä $i \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_i^{(n)} - y_i| \leq \|x^{(n)} - y\|_\infty \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Siksi

$$y_i = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{i}, \text{ kun } i \in \mathbb{N}.$$

Toisaalta $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$, eli $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \notin \ell^1$, mikä on ristiriita. Näin ollen $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole täydellinen.

Lause 2.12. Olkoon X Banachin avaruus ja $M \subseteq X$ suljettu aliavaruus. Tällöin M on täydellinen, eli Banachin avaruus, avaruuden X indusoimassa normissa.

Todistus. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono avaruudessa M. Tällöin jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono myös avaruudessa X. Koska X on täydellinen, on olemassa $x \in X$ siten, että $x_n \to x$ kun $n \to \infty$. Koska M on suljettu ja $x_n \in M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, saadaan $x \in M$ (Lause 1.15), joten M on täydellinen □

Lause 2.13. Normiavaruuden X täydellinen aliavaruus M on suljettu avaruudessa X.

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Lauseen 1.15 nojalla löytyy jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa M siten, että $x_n \to z$ kun $n \to \infty$. Tällöin $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa X Lauseen 1.13 nojalla ja siten myös avaruudessa M. Avaruuden M täydellisyyden nojalla on olemassa $y \in M$ siten, että $x_n \to y$ kun $n \to \infty$. Rajaarvon yksikäsitteisyyden nojalla (Lause 1.11) $y = z$, joten $\overline{M} = M$ ja M on suljettu. □

Seuraus 2.14. Olkoon M Banachin avaruuden X vektorialiavaruus. Tällöin M on Banachin avaruus jos ja vain jos M on suljettu avaruudessa X.

Esimerkki. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ on jatkuva }\}.$$

Jos $f, g \in C(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin pisteittäin määritelty summafunktio $f + g \in C(X)$ ja pisteittäin määritelty skalaarilla kerrottu funktio $\lambda f \in C(X)$, eli $C(X)$ on vektoriavaruus. Merkitään

$$BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) = B(X, \mathbb{K}) \cap C(X, \mathbb{K}),$$

eli $BC(X)$ on jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $X \to \mathbb{K}$ avaruus. Siis $BC(X)$ on avaruden $B(X)$ aliavaruus.

Kysymys: Onko $BC(X) \subseteq B(X)$ suljettu normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen?

Lemma 2.15. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $t \in X$. Tällöin vektorialiavaruus

$$BC_t(X) = \{f \in B(X) : f \text{ on jatkuva pisteessä } t\} \subseteq B(X)$$

on suljettu normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen.

Todistus. Olkoon $g \in \overline{BC_t(X)}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $h \in BC_t(X)$ siten, että $\|g - h\|_\infty < \varepsilon/3$. Koska h on jatkuva pisteessä t, on olemassa $\delta > 0$, jolle $h(t) - h(u)| < \varepsilon/3$ aina kun $d(t, u) < \delta$. Nyt saadaan

$$|g(t) - g(u)| \leq \underbrace{|g(t) - h(t)|}_{\leq \|g-h\|_\infty} + \underbrace{|h(t) - h(u)|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|h(u) - g(u)|}_{\leq \|g-h\|_\infty} < \varepsilon$$

aina kun $d(t, u) < \delta$. Siis g on jatkuva pisteessä t, joten $g \in BC_t(X)$. Näin ollen $BC_t(X)$ on suljettu. □

Seuraus 2.16. Avaruus $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Nyt

$$BC(X) = \bigcap_{t \in X} BC_t(X)$$

on suljettu avaruudessa $B(X)$. Väite seuraa Lauseesta 2.12, koska $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. □

Seuraus 2.17. Jos X on kompakti metrinen avaruus, niin $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. Erityisesti $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Harjoitustehtävän mukaan $C(X) = BC(X)$. □

Esimerkki. 1. Avaruudet c ja c_0 ovat Banachin avaruuksia sup-normin suhteen.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

2. Olkoon

$$L^p[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{K} : f \text{ on mitallinen ja } \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty\}.$$

Avaruus $(L^p, \|\cdot\|_p)$ on Banachin avaruus, kun

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{1/p}.$$

Todistus. Analyysi III. □

Vektoriarvoisista sarjoista

Määritelmä 2.18. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus ja $x_k \in X$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$. Sarja $\sum_{k=1}^\infty x_k$ *suppenee* avaruudessa X, jos osasummien jono $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$ suppenee kohti vektoria $x \in X$, eli

$$\|s_n - s\| \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

Tällöin sarjan summa on s ja tätä merkitään $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_n$. Edelleen, sanomme, että avaruuden X sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ on *absoluuttisesti suppeneva* jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ suppenee.

Esimerkki. Olkoon

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, 0, \ldots) \in \ell^2 \text{ kun } n \in \mathbb{N}.$$

Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ avaruudessa ℓ^2? Entä suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ absoluuttisesti avaruudessa ℓ^2?

Ratkaisu. Olkoon $x = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$. Nyt $x \in \ell^2$, koska $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, joten sen summa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n} = x$. Nimittäin

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots)$$

ja

$$\|x - s_m\|_2 = \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\,kpl}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots)\|_2 = (\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2)^{1/2} \to 0, \text{ kun } m \to \infty.$$

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ ei ole absoluuttisesti suppeneva avaruudessa ℓ^2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{e_n}{n}\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|e_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Täydellisyyden ja absoluuttisesti suppenevien sarjojen välillä on tärkeä yhteys.

Lause 2.19. Normiavaruus X on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen avaruuden X absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee avaruudessa X.

Todistus. Oletetaan ensin, että X on Banachin avaruus. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absoluuttisesti suppeneva sarja, eli sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ suppenee. Jos $n, p \in \mathbb{N}$ ja $s_m = \sum_{k=1}^{m} x_k$ kaikille $m \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned}
\|s_{n+p} - s_n\| &= \|\sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\| \\
&= \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \to 0, \text{ kun } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa X, joten se suppenee.

Oletetaan sitten, että jokainen avaruuden X absoluuttisesti suppeneva sarja suppenee avaruudessa X. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono avaruudessa X. Lauseen 2.2 nojalla riittää löytää suppeneva osajono $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. Konstruoidaan se induktiivisesti:

Koska $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2}$ kaikilla $p, q \geq n_0$. Oletetaan, että on valittu luvut $n_0 < n_1 < \ldots < n_j$ siten, että

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^{k+1}} \text{ kaikilla } p, q \geq n_k \text{ ja } k = 0, 1, \ldots, j.$$

Valitaan seuraavaksi $n_{j+1} \in \mathbb{N}$. Koska $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono, on olemassa sellainen $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ siten, että $n_{j+1} > n_j$ ja

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^{j+2}} \text{ kaikilla } p, q \geq n_{j+1}.$$

Merkitään $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ kun $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin

$$\|y_j\| = \|x_{nj} - x_{n_{j-1}}\| < \frac{1}{2^j}$$

kaikilla $j = 1, 2, \ldots$, sillä $n_j > n_{j-1}$ ja arvio saadaan valitsemalla $p = n_j$, $q = n_{j-1}$. Sarja $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ on absoluuttisesti suppeneva, sillä

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j\| < \|y_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty.$$

Oletuksen mukaan sarja $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ suppenee. Merkitään $y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j$. Tämän sarjan osasummille pätee

$$\sum_{j=0}^{k} y_j = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \ldots (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Näin ollen jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä $y \in X$, joten X on täydellinen Lauseen 2.2 nojalla. □

Esimerkki. Avaruus $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ on täydellinen. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluuttisesti (itseisesti) suppeneva sarja avaruudessa $\mathbb{R}$. Merkitään $b_k = |a_k| - a_k$, kun $k \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$0 \leq b_k \leq 2|a_k| \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}, \text{ joten}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee. Koska $a_k = |a_k| - b_k$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, seuraa tästä, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee myöskin. Näin ollen $\mathbb{R}$ on täydellinen Lauseen 2.19 nojalla.

Lause 2.20. Jonoavaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on Banachin avaruus kaikilla $1 \leq p \leq \infty$.

Todistus. Olkoon $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa ℓ^p, eli $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p < \infty$. Vektorin jonolle $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ pätee

$$|x_k^{(n)}| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p)^{1/p} = \|x^{(n)}\|_p \text{ kaikille } k \in \mathbb{N},$$

joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p < \infty \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Koska $\mathbb{K}$ on täydellinen, seuraa tästä, että skalaarisarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_k^{(n)}$ suppenee. Merkitään $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_k^{(n)}$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$.

Väite: $\|y - \sum_{n=1}^{r} x^{(n)}\|_p \to 0$, kun $r \to \infty$ ja $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p$ suppenee, on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p \leq \varepsilon.$$

Olkoot $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \leq r < s$. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{i} |y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)}|^p = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{i} |\sum_{n=1}^{s} x_k^{(n)} - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)}|^p \leq \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{n=k+1}^{s} x_k^{(n)}|^p.$$

Toisaalta,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)}|^p = \|\sum_{n=r+1}^{s} x^{(n)}\|_p^p \leq (\sum_{n=r+1}^{s} \|x^{(n)}\|_p)^p \leq (\sum_{n=r+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|)^p \leq \varepsilon^p.$$

Kun $s \to \infty$, saadaan

$$\sum_{k=1}^{i} |y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)}|^p \leq \varepsilon^p \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N} \text{ ja } r \geq m.$$

Antamalla siis $i \to \infty$ nähdään, että

$$\|y - \sum_{n=1}^{r} x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)}| \leq \varepsilon^p,$$

kun $r \geq m$. Siis jono

$$\big(y_k - \sum_{k=1}^{m} x_k^{(m)}\big)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p.$$

Koska ℓ^p on normiavaruus, saadaan tästä, että

$$y = (y_k)_{k=1}^{\infty} = (y_k - \sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} + (\sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in \ell^p,$$

ja edelleen

$$\|y - \sum_{n=1}^{r} x^{(x)}\| \leq \varepsilon \text{ kun } r \geq m.$$

Siis $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$ suppenee avaruudessa ℓ^p, joten ℓ^p on täydellinen Lauseen 2.19 nojalla. □

Äärellisulotteisista normiavaruuksista

Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus skalaarikuntana $\mathbb{K}$. Silloin kuvaukset $(x, y) \mapsto x+y$, $X \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $\mathbb{K} \times X \to X$, ja $x \mapsto \|x\|$, $X \to \mathbb{R}^+$, ovat jatkuvia.

Todistus. 1. Oletetaan, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ avaruudessa X. Tällöin

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$$

kun $n \to \infty$, joten $x_n + y_n \to x + y$.

2. Oletetaan, että $\lambda_n \to \lambda$ avaruudessa $\mathbb{K}$ ja $x_n \to x$ avaruudessa X. Tällöin

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \\ &= |\lambda_n|\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\| \to 0\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, joten $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

3. Helposti nähdään, että

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \text{ kaikille } x, y \in X,$$

joten

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

ja siten $\|x_n\| \to \|x\|$ avaruudessa $\mathbb{R}^+$ jos $x_n \to x$ avaruudessa X.

□

Lemma 2.21. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Jos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ on lineaarisesti riippumaton vektorijoukko, niin on olemassa $\gamma > 0$ siten, että

$$|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| \leq \gamma\|\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n\| \text{ kaikilla } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| = 1$. Olkoon

$$\gamma = \inf\{\|\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n\| : \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\}.$$

Tällöin on olemassa jono

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} x_i \text{ siten, että } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)}| = 1 \text{ jokaiselle } k \in \mathbb{N} \text{ ja } \|y_k\| \to \gamma, \text{ kun } n \to \infty.$$

Koska $|\alpha_i^{(k)}| \leq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, on olemassa osajono $(\alpha_i^{(k_l)})_{l=1}^{\infty}$ siten, että $\alpha_i^{k_l} \to \beta_i$, kun $i = 1, \ldots, n$. Selvästi $|\alpha_i^{k_l}| \to |\beta_i|$, joten

$$|\beta_1| + \ldots + |\beta_n| = \lim_{l \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k_l)}| = 1$$

Koska $\{x_1, \ldots, x_n\}$ on lineaarisesti riippumaton, tästä seuraa, että

$$x := \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n \neq 0 \text{ ja } \|x\| > 0.$$

Normi $\|\cdot\|$ on jatkuva, joten

$$\lim_{l \to \infty} \|y_{k_l}\| = \lim_{l \to \infty} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k_l)} x_i\| = \|\lim_{l \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k_l)} x_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\| = \|x\|.$$

Toisaalta, $\|y_{k_l}\| \to \gamma$ ja $\|x\| = \gamma > 0$. Tällöin myös $\mu = 1/\gamma > 0$ ja

$$\frac{1}{\mu} \leq \|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| \text{ kun } |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| = 1.$$

Jos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ovat mielivaltaisia ja ainakin yksi $\alpha_i \neq 0$, niin muodostamme luvut

$$\frac{\alpha_j}{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|}, j = 1, \ldots, n$$

ja väite seuraa. □

Lause 2.22. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ äärellisulotteinen normiavaruus. Jos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ on avaruuden X kanta, niin jono (y_k), missä $y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i$, suppenee kohti vektoria $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ jos ja vain jos $\alpha_i^{(k)} \to \alpha_i$ jokaisella $1 \leq i \leq n$.

Todistus. Jos $\alpha_i^{(k)} \to \alpha_i$ jokaisella $1 \leq i \leq n$, niin $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ koska laskutoimitukset ovat jatkuvia.

Oletetaan, että $y_k \to y$, kun $k \to \infty$. Lemman 2.21 nojalla

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)} - \alpha_i| \leq \mu \|(\alpha_1^{(k)} - \alpha_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n^{(k)} - \alpha_n)e_n\| = \mu \|y_k - x\|,$$

mistä väite seuraa. □

Seuraus 2.23. Jos $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ ovat äärellisulotteisen normiavaruuden X normeja, niin ne ovat ekvivalentit.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.24. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ äärellisulotteinen normiavaruus. Jokainen suljettu ja rajoitettu joukko avaruudessa X on kompakti.

Todistus. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avaruuden X kanta. Olkoon $A \subseteq X$ suljettu ja rajoitettu. Edelleen, olkoon (y_k) jono joukossa A. Tällöin

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i \text{ ja } \|y_k\| \leq \gamma \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots.$$

Lemman 2.21 nojalla on olemassa $\mu > 0$ siten, että

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)}| \leq \mu \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i\| = \mu \|y_k\| \leq \mu\gamma \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots.$$

Näin ollen on olemassa osajono $(\alpha_i^{(k_l)})_{l=1}^{\infty}$ joka suppenee kohti jotain lukua β_i jokaiselle $i = 1, 2, \ldots$, kun $l \to \infty$. Lauseen 2.22 nojalla

$$y_{k_l} \to \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \text{ avaruuden } X \text{ normissa .}$$

Koska A on suljettu, saadaan $\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in A$, joten A on kompakti. □

Lause 2.25. Jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on täydellinen.

Todistus. Olkoot $(X, \|\cdot\|)$ äärellisulotteinen normiavaruus ja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden X Cauchyn jono. On helppo nähdä, että jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu. Lauseen 2.24 todistuksesta seuraa, että jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono. Tällöin Lauseen 2.2 mukaan alkuperäinen jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, eli X on täydellinen. □

Lause 2.26 (Rieszin lemma)**.** Olkoon X normiavaruus ja $Y \subseteq X$ aito suljettu vektorialiavaruus sekä $\nu \in \mathbb{R}$, $0 < \nu < 1$. Tällöin on olemassa $x_\nu \in X$ siten, että

$$\|x_\nu\| = 1 \text{ ja } \|y - x_\nu\| \geq \nu \text{ kaikilla } y \in Y.$$

Todistus. Olkoon $x \in X \setminus Y \neq \emptyset$ ja olkoon

$$d := \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Tällöin on olemassa jono $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että $z_n \in Y$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ ja $\|x - z_n\| \to d$, kun $n \to \infty$. Koska Y on suljettu, täytyy olla $d > 0$. Nyt $d/\nu > d$, joten on olemassa $z \in Y$ siten, että

$$d \leq \|x - z\| < d/\nu.$$

Olkoon $x_\nu = \frac{x-z}{\|x-z\|}$. Osoitetaan, että x_ν on väitetty vektori. Nyt $\|x_\nu\| = 1$ ja jokaiselle $y \in Y$ pätee

$$\begin{aligned}
\|x_\nu - y\| &= \|\frac{x-z}{\|x-z\|} - y\| \\
&= \|\frac{x}{\|x-z\|} - \frac{z}{\|x-z\|} - \frac{\|x-z\|y}{\|x-z\|}\| \\
&= \frac{1}{\|x-z\|}\|x - \underbrace{(z + \|x-z\|y)}_{\in Y}\| \\
&> \frac{\nu}{d}d \\
&= \nu.
\end{aligned}$$

□

Lause 2.27. Normiavaruus X on äärellisulotteinen jos ja vain jos jokainen suljettu ja rajoitettu avaruuden X osajoukko on kompakti.

Todistus. Jos X on äärellisulotteinen, niin väite seuraa Lauseesta 2.24. Oletetaan, että $\dim X = \infty$. Olkoon $x_1 \in X$ siten, että $\|x_1\| = 1$ ja olkoon $Y_1 = \text{span}\,\{x_1\}$. Tällöin $Y_1 \neq X$ ja Lauseen 2.25 nojalla Y_1 on täydellinen, joten Y_1 on suljettu avaruudessa X Lauseen 2.13 mukaan. Rieszin Lemman nojalla on olemassa $x_2 \in X$ siten, että $\|x_2\| = 1$ ja $\|x - x_2\| \geq 1/2$ kaikilla $x \in Y_1$, eli erityisesti $\|x_1 - x_2\| \geq 1/2$. Olkoon $Y_2 = \text{span}\,\{x_1, x_2\}$. Taas $Y_2 \neq X$ ja Y_2 on avaruuden X suljettu aliavaruus. Rieszin Lemman nojalla on siis olemassa $x_3 \in X$ siten, että $\|x_3\| = 1$ ja $\|x - x_3\| \geq 1/2$ kaikille $x \in Y_2$, eli erityisesti $\|x_1 - x_3\| \geq 1/2$ ja $\|x_2 - x_3\| \geq 1/2$. Näin jatkamalla saadaan jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että

$$\|x_n\| = 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N} \text{ ja } \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \text{ kaikilla } m \neq n.$$

Tällaisella jonolla ei voi olla suppenevaa osajonoa, joten avaruuden X suljettu yksikköpallo ei ole kompakti. □

Luku 3

Banachin kiintopisteperiaate

Määritelmä 3.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $T : X \to X$ kuvaus. Jos on olemassa sellainen vakio $k \in \mathbb{R}$, että $0 < k < 1$ ja

$$d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

niin kuvausta T sanotaan *kontraktioksi*.

Huomautus 3.2. Kontraktio $T : X \to X$ on jatkuva.

Todistus. Jos $\varepsilon > 0$, niin $d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y) < \varepsilon$ aina, kun $d(x, y) < \delta$, missä $\delta = \varepsilon/k$. □

Lause 3.3 (Banachin kiintopisteperiaate)**.** Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $T : X \to X$ kontraktio. Silloin on olemassa täsmälleen yksi $x \in X$, jolle $T(x) = x$ (x on siis kuvauksen T *kiintopiste*).

Todistus. Olkoon $x_0 \in X$ mielivaltainen ja määritellään jono (x_n) induktiivisesti asettamalla

$$x_{n+1} = T(x_n),\ n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Jos k, $0 \leq k < 1$, on sellainen, että $d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$, niin jokaiselle $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1). \tag{$**$}$$

Tämä nähdään induktiolla: ($**$) pätee selvästi arvolla $m = 1$, ja jos ($**$) pätee jollakin arvolla m, niin

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_{m+2}) &= d(T(x_m), T(x_{m+1})) \\ &\leq k\, d(x_m, x_{m+1}) \\ &\leq k^{m+1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Siis kaikille $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq d(x_0, x_1)\big(\sum_{j=n}^{n+p-1} k^j\big) \\ &= k^n d(x_0, x_1)\big(\sum_{j=0}^{p-1} k^j\big) \\ &\leq k^n d(x_0, x_1)\big(\sum_{j=0}^{\infty} k^j\big) \\ &= k^n d(x_0, x_1)\frac{1}{1-k}. \end{aligned} \tag{+}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. On olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) < \varepsilon \text{ kun } n \geq n_\varepsilon,$$

joten epäyhtälön $(+)$ nojalla $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_\varepsilon$ ja $p \in \mathbb{N}$. Täten (x_n) on Cauchyn jono ja se suppenee, koska X on täydellinen. Olkoon $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Koska T on jatkuva, niin

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

eli x on kuvauksen T kiintopiste. Toisaalta, jos myös $y \in X$ on kuvauksen T kiintopiste, niin

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq k\, d(x, y),$$

eli $0 \leq (1-k)d(x, y) \leq 0$. Koska $k < 1$, täytyy olla $d(x, y) = 0$, eli $x = y$. □

Huomautus Yllä olevassa todistuksessa kiintopiste x löytyi iteroimalla:

$$x = \lim_{n\to\infty} T(x_n), \text{ missä } x_n = T(x_{n-1}) = \ldots = \underbrace{(T \circ \ldots T)}_{n\ kpl}(x_0)$$

ja $x_0 \in X$ oli mielivaltainen. Epäyhtälöstä $(+)$ saadaan virhearvio, kun annetaan luvun p kasvaa rajatta:

$$d(x, \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n\ kpl}(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x),$$

missä $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja ydin $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat annettuja jatkuvia kuvauksia. Edelleen, f on etsimämme funktio ja λ on mielivaltainen parametri.

Nyt on olemassa $M > 0$ siten, että $|K(x,y)| \leq M$ kaikilla $x, y \in [a,b]$. Tarkastellaan kuvausta $T : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$,

$$Tf(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + g(x).$$

Olkoon $f_1, f_2 \in C[a,b]$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(Tf_1, Tf_2) &= \|Tf_1 - Tf_2\| \\ &= \max_{a \leq x \leq b} |Tf_1(x) - Tf_2(x)| \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \{|\lambda| \int_a^b |K(x,y)||f_1(y) - f_2(y)|dy\} \\ &\leq |\lambda| M \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|(b-a) \\ &= |\lambda| M(b-a)\|f_1 - f_2\|_\infty \\ &= |\lambda| M(b-a)d(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Näin ollen T on kontraktio jos $|\lambda|M(b-a) < 1$, eli jos

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Tällöin Lauseen 3.3 nojalla yhtälöllä $Tf = f$, siis alkuperäisellä integraaliyhtälöllä, on ratkaisu $f \in C[a,b]$. Lisäksi ratkaisu on yksikäsitteinen.

Esimerkki 3.5. Valitaan edellisen esimerkin integraaliyhtälön ytimeksi

$$K(x,y) = xy,\ 0 \leq x, y \leq 1,$$

sekä olkoon annettu funktio $g(x) \equiv 1$. Silloin

$$f(x) = 1 + \lambda x \int_0^1 yf(y)dy,\ x \in [0,1].$$

Koska $M = \max_{x,y \in [0,1]} |K(x,y)| = 1$, yhtälöllä on Banachin kiintopistelauseen nojalla ratkaisu ainakin kun $\lambda < 1$. Selvästi $f(0) = 1$ ja

$$f'(x) = \lambda \int_0^1 yf(y)dy := \lambda A,$$

joten $f(x) = \lambda Ax + B$ ja $B = 1$. Sijoittamalla nähdään, että jos

$$\lambda Ax + 1 - \lambda x \int_0^1 y(\lambda Ay + 1)dy = 1,\ x \in [0,1],$$

niin

$$A - (\frac{1}{2} + \frac{\lambda A}{3}) = 0$$

ja

$$A = \frac{3}{2} - \frac{1}{3-\lambda}.$$

Siis

$$f(x) = \frac{3\lambda x}{6-2x} + 1.$$

Integraaliyhtälö siis ratkeaa kun $\lambda \neq 3$. Kun $\lambda = 3$, ratkaisua ei ole olemassa.

Luku 4

Hilbertin avaruudet

Olkoon H vektoriavaruus skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

Määritelmä 4.1. Kuvausta $(\cdot \mid \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ sanotaan *sisätuloksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(S1) $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$ aina, kun $x, y \in H$.
(S2) $(x \mid x) \geq 0$ aina, kun $x \in H$.
(S3) $(x \mid x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$.
(S4) $(x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$ aina, kun $x, y, z \in H$.
(S5) $(\lambda x \mid y) = \lambda(x \mid y)$ aina, kun $x, y \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

Paria $(H, (\cdot \mid \cdot)$ sanotaan *sisätuloavaruudeksi*.

Ominaisuuksien (S4) ja (S5) nojalla sisätulo on ensimmäisen tekijän suhteen lineaarinen. Ominaisuuksista (S1), (S4) ja (S5) seuraa, että

$$(x \mid \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda}(x \mid y) + \overline{\mu}(x \mid y)$$

aina, kun $x, y, z \in H$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Sisätulo on siis toisen tekijän suhteen *konjugaattilineaarinen*. Edelleen, $(0 \mid y) = (x \mid 0) = 0$ kaikille $x, y \in H$, koska $2(0 \mid y) = (2 \cdot 0 \mid y) = (0 \mid y)$.

Merkitään

$$\|x\| := \sqrt{(x \mid x)},\ x \in H.$$

Tällöin $\|x\| \geq 0$ kaikilla $x \in H$ ja $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $(x \mid x) = 0$, eli $\|x\| = 0$ täsmälleen silloin kun $x = 0$. Jos $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $x \in H$, niin

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x \mid x)} = \sqrt{|\lambda|^2\|x\|^2} = |\lambda|\|x\|.$$

Jos vielä näytämme, että $\|\cdot\|$ toteuttaa kolmioepäyhtälön, on se normi.

Lause 4.2 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)**.** Sisätuloavaruudessa H pätee

$$|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\| \text{ kaikilla } x, y \in H.$$

Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos vektorit x ja y ovat lineaarisesti riippuvia.

Todistus. Voidaan olettaa, että $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Jokaisella $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y \mid x + \lambda y) \\ &= (x \mid x) + \lambda(x \mid y) + \overline{\lambda}(y \mid x) + |\lambda|^2(y \mid y) \\ &= \|x\|^2 + \lambda\overline{(x \mid y)} + \overline{\lambda}(x \mid y) + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Valitaan

$$\lambda = -\frac{(x \mid y)}{\|y\|^2}.$$

On hyvä huomata että tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tämä on polynomin

$$\lambda \mapsto \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2\|y\|^2$$

minimikohta. Nyt saadaan

$$0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x^2\| - \frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^2}.$$

Tästä saadaan $|(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ mistä ensimmäinen väite seuraa. Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $0 = \|x + \lambda y\|$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x + \lambda y = 0$, eli yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos x ja y ovat lineaarisesti riippuvia. □

Lause 4.3. Jokainen sisätuloavaruus on myös normiavaruus, kun normi määritellään kaavalla

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)} \text{ aina kun } x \in H.$$

Todistus. Edellä nähtiin, että (N2) ja (N3) ovat voimassa. Riittää siis todeta, että kolmioepäyhtälö on tosi. Olkoon $x, y \in H$. Nyt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y \mid x + y) \\ &= (x \mid x) + (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} + (y \mid y) \\ &= \|x^2\| + 2\mathrm{Re}(x \mid y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Koska jokaiselle kompleksiluvulle z pätee $\mathrm{Re}z \leq |z|$, niin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2|(x \mid y)|^2 + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri saadaan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, joten $\|\cdot\|$ on normi. □

Sisätulon määräämä normi on sikäli erikoinen, että se toteuttaa ns. *suunnikasyhtälön*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Tämä todetaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y \mid x+y)+(x-y \mid x-y)\\ &= (x \mid x)+(x \mid y)+(y \mid x)+(y \mid y)\\ &+ (x \mid x)-(x \mid y)-(y \mid x)+(y \mid y)\\ &= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Kääntäen, jos normi $\|\cdot\|$ toteuttaa suunnikasyhtälön, niin voidaan osoittaa, että kaava

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\big)$$

määrittelee sisätulon ja $\|x\|^2 = (x \mid x)$. Tämä on ns. *polarisaatiokaava* (reaalisessa tapauksessa sen vastine on $(x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$).

Lause 4.4. Olkoon H sisätuloavaruus. Jos $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ avaruudessa H, niin $(x_n \mid y_n) \to (x \mid y)$ avaruudessa $\mathbb{K}$, ts. $(\cdot \mid \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ on jatkuva kuvaus.

Todistus. Oletetaan, että $\|x_n - x\| \to 0$ ja $\|y_n - y\| \to 0$ kun $n \to \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned}|(x_n \mid y_n)-(x \mid y)| &= |(x_n \mid y_n)-(x \mid y_n)+(x \mid y_n)-(x \mid y)|\\ &\le |(x_n - x \mid y_n)| + |(x \mid y_n - y)\\ &\le \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|\\ &\le \|x_n - x\|M + \|x\|\|y_n - y\|\end{aligned}$$

jollekin $M \ge 0$, sillä jono (y_n) on suppenee ja on siten rajoitettu. Tästä nähdään, että $|(x_n \mid y_n)-(x \mid y)| \to 0$ kun $n \to \infty$. □

Jos erityisesti $(H, (\cdot \mid \cdot))$ on täydellinen normin $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ suhteen, eli Banachin avaruus, sanomme että $(H, (\cdot \mid \cdot))$ on *Hilbertin avaruus*.

Esimerkki.

1. Jos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, niin kuvaus

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ sisätulo. Vastaava normi

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2}$$

on avaruuden $\mathbb{K}^n$ tavallinen Euklidinen normi.

2. Avaruudessa

$$\ell^2 = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathbb{K} \text{ ja } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$$

määritellään sisätulo kaavalla

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \text{ kun } x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2,\ y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2. \qquad (*)$$

Sisätulon määärämä normi on

$$\|x\|_2 = \big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\big)^{1/2},\ \text{kun } x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Tiedämme, että tämän normin suhteen ℓ^2 on täydellinen, eli $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus.

Lemman 2.9 nojalla saadaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}| \leq \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\big)^{1/2} \big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\big)^{1/2} < \infty,\ \text{kun } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

joten sarja $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ suppenee avaruudessa $\mathbb{K}$ ja $(*)$ on järkevä.

Esimerkki. Avaruus

$$\ell^1 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathbb{K} \forall i \in \mathbb{N} \text{ ja } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$

varustettuna normilla

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

on Banachin avaruus. Avaruus $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ei kuitenkaan ole Hilbertin avaruus. Olkoon $e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$ ja $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$. Tällöin

$$\|e_1 + e_2\|_1 = \|e_1 - e_2\|_1 = 2 \text{ ja } \|e_1\|_1 = \|e_2\|_1 = 1$$

joten

$$\|e_1 + e_2\|_1^2 + \|e_1 - e_2\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(\|e_1\|_1^2 + \|e_2\|_1^2).$$

Siispä $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ei ole sisätuloavaruus.

Määritelmä 4.5. Sisätuloavaruuden H vektorit x ja y ovat *ortogonaaliset* (eli *kohtisuorat*), merkitään $x \perp y$, jos $(x \mid y) = 0$. Lisäksi, jos $\|x\| = \|y\| = 1$, niin vektoreita x ja y sanotaan *ortonormaaleiksi*.

Lause 4.6 (Pythagoras)**.** Olkoon H sisätuloavaruus. Jos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq H$ ja vektorit x_i, $1 \leq i \leq k$, ovat keskenään ortogonaaliset, eli $x_i \perp x_j$ kun $i \neq j$, niin

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Määritelmä 4.7. Olkoon H sisätuloavaruus ja olkoon $S \subseteq H$, $S \neq \emptyset$. Joukkoa

$$S^{\perp} = \{x \in H : (x \mid y) = 0 \text{ kaikille } y \in S\}$$

sanotaan joukon S *ortogonaaliseksi komplementiksi.*

Lause 4.8. Olkoon H sisätuloavaruus ja olkoon $S \subseteq H$ epätyhjä. Tällöin joukko $S^{\perp}$ on avaruuden H suljettu aliavaruus.

Todistus. Selvästi $0 \in S^{\perp}$. Olkoot $x_1, x_2 \in S^{\perp}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Jos $y \in S$, niin

$$(\alpha x_1 + x_2 \mid y) = \alpha(x_1 \mid y) + (x_2 \mid y) = 0.$$

Täten $\alpha x_1 + x_2 \in S^{\perp}$ ja $S^{\perp}$ on avaruuden H aliavaruus.

Osoitetaan nyt, että $S^{\perp}$ on suljettu. Olkoon $x \in \overline{S^{\perp}}$. Tällöin on olemassa jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ joukon $S^{\perp}$ vektoreita siten, että $x_n \to x$. Olkoon $y \in S$. Nyt $(x_n \mid y) = 0$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, joten sisätulon jatkuvuuden nojalla

$$(x \mid y) = (\lim_{n\to\infty} x_n \mid y) = \lim_{n\to\infty} (x_n \mid y) = 0.$$

Näin ollen $x \in S^{\perp}$ ja siten $S^{\perp}$ on suljettu. □

On helppo todeta, että

$$\begin{gathered} H^{\perp} = \{0\}, \{0\}^{\perp} = H \\ \text{jos } S_1 \subseteq S_2, \text{ niin } S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp} \\ S \cap S^{\perp} \subseteq \{0\} \text{ (yhtäsuuruus esim. jos } 0 \in S) \end{gathered}$$

Jos $L, M \subseteq H$ ovat avaruuden H lineaarisia aliavaruuksia, niiden summa

$$L + M := \{l + m : l \in L, m \in M\}$$

on myös lineaarinen aliavaruus.

Seuraavaksi alamme tarkastella minimointitehtäviä. Kun tilanteita mallinnetaan Hilbertin avaruuksilla, tulee usein tehtäväksi selvittää, millä ehdoin joukosta löytyy normin minimoivia alkioita. On itse asiassa yllättävää, että Hilbertin avaruuksissa minimointitehtävä ratkeaa suhteellisen yleisesti.

Olennainen ominaisuus tällaisissa minimointitehtävissä on *konveksisuus.*

Muistetaan, että pisteiden x ja y välinen *yhdysjana* on joukko

$$\{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}.$$

Vektoriavaruuden H osajoukko S on konveksi, jos pisteiden $x, y \in S$ välinen yhdysjana aina sisältyy joukkoon S, eli jos

$$tx + (1-t)y \in S \text{ aina, kun } x, y \in S \text{ ja } 0 \leq t \leq 1.$$

Seuraava ns. miniminormilause on tärkeä peruslause Hilbertin avaruuksien teoriassa ja sillä on paljon käyttöä myös optimointiteoriassa.

Lause 4.9 (Miniminormilause)**.** Olkoon $S \neq \emptyset$ Hilbertin avaruuden H suljettu konveksi osajoukko sekä $x \in H$. Silloin on olemassa täsmälleen yksi alkio $y_0 \in S$, jolle

$$|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in S\}.$$

Todistus. Infimumin määritelmän mukaan on olemassa jono $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ siten, että $\|x - y_n\| \to d := \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$, kun $n \to \infty$. Koska S on konveksi, niin $1/2(y_n + y_m) \in S$ kaikille $n, m \in \mathbb{N}$, joten

$$\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\| \geq d, \text{ eli } \|2x - (y_n + y_m)\| \geq 2d.$$

Suunnikassäännön nojalla saamme

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\
&= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \|2x - (y_m + y_n)\|^2 \\
&\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2.
\end{aligned}$$

Koska $2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \to 0$ kun $n, m \to \infty$, niin $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa H. Koska H on täydellinen, on olemassa $y_0 \in H$ siten, että $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Koska S on suljettu, saadaan $y_0 \in S$. Edelleen, koska normi $\|\cdot|$ on jatkuva funktio, niin

$$\|x - y_0\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d.$$

Oletetaan, että $y_1 \in S$ on toinen vektori, jolle $\|x - y_1\| = d$. Tällöin $\frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in S$ ja suunnikassäännön nojalla saadaan

$$\|y_0 - y_1\|^2 \leq 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - y_1\|^2) - 4d^2.$$

Koska $\|x - y_0\| = d$ ja $\|x - y_1\| = d$, niin $\|y_0 - y_1\|^2 \leq 0$, joten $y_0 = y_1$. □

Lemma 4.10. Olkoon M sisätuloavaruuden H lineaarinen aliavaruus ja $x \in H$. Silloin $x \in M^{\perp}$ jos ja vain jos

$$\|x - y\| \geq \|x\| \text{ kaikilla } y \in M.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $x \in M^{\perp}$. Jos $y \in M$, niin $(x \mid y) = 0$. Siis

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2,$$

eli $\|x - y\| \geq \|x\|$.

Oletetaan sitten, että $\|x - y\| \geq \|x\|$ jokaiselle $y \in M$. Koska $\lambda y \in M$ aina, kun $y \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin

$$\|x - \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Tässä

$$\|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\lambda}(x \mid y) - \lambda(y \mid x) + |\lambda|^2\|y\|^2,$$

joten

$$-\overline{\lambda}(x \mid y) - \lambda\overline{(x \mid y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Oletetaan, että $y \neq 0$. Olkoon

$$\lambda := \frac{(x \mid y)}{\|y\|^2}, \text{ jolloin } \overline{\lambda} = \frac{\overline{(x \mid y)}}{\|y\|^2}.$$

Nyt saadaan

$$-\frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^2} - \frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0, \text{ eli } \frac{|(x \mid y)|^2}{\|y\|^2} \leq 0.$$

Siis $(x \mid y) = 0$ kaikilla $y \in M$, eli $x \in M^\perp$. (Tämä pätee selvästi myös kun $y = 0$.) □

Lause 4.11. Olkoon M Hilbertin avaruuden H suljettu vektorialiavaruus. Silloin jokaisella vektorilla $x \in H$ on olemassa yksikäsitteinen esitys $x = y + z$, missä $y \in M$ ja $z \in M^\perp$.

Todistus. Jos $M = \{0\}$, niin lause on triviaali, koska $M^\perp = H$ ja $x = 0 + x$ kaikilla $x \in H$. Voidaan siis olettaa, että $M \neq \{0\}$. Olkoon $x \in H$. Joukko $M \neq \emptyset$ on konveksi ja suljettu. Miniminormilauseen mukaan on olemassa $y \in M$, jolle

$$\|x - y\| \leq \|x - u\| \text{ kaikilla } u \in M.$$

Olkoon $z := x - y$, jolloin $x = y + z$. Koska M on lineaarinen aliavaruus, $y + u \in M$ jokaiselle $u \in M$, ja siten

$$\|z\| = \|x - y\| \leq \|x - (y + u)\| = \|x - y - u\| = \|z - u\|.$$

Näin ollen $\|z\| \leq \|z - u\|$ kaikilla $u \in M$, joten Lemman 4.10 nojalla $z \in M^\perp$. Vektori x voidaan siis esittää muodossa $x = y + z$ missä $y \in M$ ja $z \in M^\perp$.

Oletetaan, että $x = y + z = y_1 + z_1$, missä $y, y_1 \in M$ ja $z, z_1 \in M^\perp$. Tällöin $y - y_1 = z - z_1$, $y - y_1 \in M$ ja $z - z_1 \in M^\perp$, joten $y - y_1 \in M \cap M^\perp$ ja $z - z_1 \in M \cap M^\perp$. Selvästi $M \cap M^\perp = \{0\}$, joten $y = y_1$ ja $z = z_1$. □

Seuraus 4.12. Jos M on Hilbertin avaruuden H suljettu vektoriavaruus ja $M \neq H$, niin on olemassa $z \neq 0$, $z \in H$, siten, että $z \in M^\perp$.

Todistus. Koska $H \neq M$, niin on olemassa $x \in H$ siten, että $x \notin M$. Lauseen 4.11 nojalla $x = y + z$, missä $y \in M$ ja $z \in M^{\perp}$. Jos $z = 0$, niin $x = y \in M$, mikä on ristiriita. Siispä $z \neq 0$. $\square$

Jos $L, M \subseteq H$ ovat Hilbertin avaruuden H vektorialiavaruuksia, sanomme, että H on niiden *suora summa* ja käytämme merkintää $H = L \oplus M$, mikäli $L \cap M = \{0\}$ ja jokaisella $x \in H$ on olemassa esitys $x = y + z$, missä $y \in L$ ja $z \in M$.

Seuraus 4.13. Olkoon H Hilbertin avaruus ja M avaruuden H suljettu vektorialiavaruus. Tällöin $H = M \oplus M^{\perp}$.

Luku 5

Lineaariset operaattorit

Olkoot X ja Y $\mathbb{K}$-kertoimisia normiavaruuksia. Kuvaus $T : X \to Y$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \text{ kaikilla } x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Sanomme usein, että T on *lineaarinen operaattori*.

Jos X ja Y ovat normiavaruuksia, niin lineaarinen kuvaus $T : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$ jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\|Tx - Tx_o\| = \|T(x - x_0)\| < \varepsilon \text{ aina, kun } \|x - x_0\| < \delta.$$

Huomautus. *Identiteettioperaattori* $I : X \to X$, $I(x) = x$, on tietysti rajoitettu ja samoin on nollaoperaattori $\theta : X \to Y$, $\theta(x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Lause 5.1. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $T : X \to Y$ lineaarinen kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) T on rajoitettu operaattori, ts. on olemassa $C < \infty$ siten, että

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \text{ kaikilla } x \in X.$$

(ii) T on jatkuva koko avaruudessa X.

(iii) T on jatkuva origossa.

Todistus. (i) $\Rightarrow$ (ii) Oletetaan, että $T \neq \theta$ on rajoitettu. Koska $T \neq \theta$, eli $Tx \neq \theta$ jollekin $x \in X$, niin $C > 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq C\|x - y\| < \varepsilon$$

kun $x, y \in X$ ja $\|x - y\| < \varepsilon/C$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Selvä.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Oletetaan, että T on jatkuva origossa. Koska $T(0) = 0$, voimme valita sellaisen $\delta > 0$, että

$$\|Tx\| = \|Tx - T0\| < 1 \text{ aina, kun } \|x\| = \|x - 0\| < \delta.$$

Valitaan luku M siten, että $0 < M < \delta$. Jos $x \in X$, $x \neq 0$, niin olkoon $y = \frac{M}{\|x\|}x$. Tällöin $\|y\| = M < \delta$, joten

$$\|Ty\| = \frac{M}{\|x\|}\|Tx\| < 1, \text{ eli } \|Tx\| \leq M^{-1}\|x\|.$$

Näin ollen T on rajoitettu. □

Huomautus. 1. Lineaarisen operaattorin $T : X \to Y$ *käänteisoperaattori* $T^{-1} : Y \to X$ määräytyy ehdoista $T^{-1}T = I_X$ ja $TT^{-1} = I_Y$.

2. Normiavaruuden X osajoukko A on rajoitettu jos ja vain jos

$$\sup_{x \in A}\|x\| \leq M < \infty.$$

Esimerkki. Olkoot $X = \ell^2$ ja $Y = \ell^1$ sekä

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^{\infty} = (\frac{1}{k}x_k)_{k=1}^{\infty}.$$

Onko T rajoitettu operaattorina $\ell^2 \to \ell^1$? Olkoon $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Tällöin saadaan Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla, että

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k}|x_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^{1/2}(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2)^{1/2}.$$

Siis $\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k| \leq C\|x\|_2$, missä $C = (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2})^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$ ja T on rajoitettu.

Lemma 5.2. Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Lineaarinen operaattori $T : X \to Y$ on rajoitettu jos ja vain jos

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Todistus. Jos T on rajoitettu, niin on olemassa $C < \infty$ siten, että $\|Tx\| \leq C\|x\|$ kaikilla $x \in X$. Tällöin $\|T\| \leq C$.

Oletetaan, että $\|T\| < \infty$. Koska $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ kaikilla $x \in X$, $x \neq 0$, saadaan

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|T\| \text{ kaikilla } x \in X.$$

Tästä saamme, että $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ kaikilla $x \in X$, joten T on rajoitettu. □

Huomautus Lukua $\|T\|$ kutsutaan operaattorin T *normiksi*. Operaattorin normi toteuttaa epäyhtälön $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ kaikilla $x \in X$.

Kaikkien rajoitettujen lineaaristen operaattoreiden $T : X \to Y$ joukolle käytämme merkintää $L(X, Y)$. Lineaarikombinaatio $\lambda T + \mu S$ määritellään tietysti

$$(\lambda T + \mu S)x = \lambda Tx + \mu Sx \text{ jokaiselle } x \in X.$$

On helppo todeta, että $\lambda T + \mu S \in L(X,Y)$ aina kun $S, T \in L(X,Y)$, joten $L(X,Y)$ on vektoriavaruus. Jos $X = Y$, niin $L(X) := L(X,X)$.

Osoitetaan nyt, että operaattorinormi todella toteuttaa normiehdot. On selvä, että $\|T\| \geq 0$ ja

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow Tx = 0 \text{ kun } \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow T = 0.$$

Edelleen,

$$\|\lambda T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|(\lambda T)x\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|\lambda Tx\| = |\lambda| \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|Tx\| = |\lambda|\|T\|.$$

Lopuksi, jos $T, S \in L(X,Y)$, niin

$$\|S+T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|Tx + Sx\| \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|Tx\| + \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|Sx\| = \|T\| + \|S\|.$$

Siis kyseessä on normi ja $L(X,Y)$ on normiavaruus.

Lause 5.3. Jos X on normiavaruus ja Y on Banachin avaruus, niin $L(X,Y)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Olkoon (T_n) Cauchyn jono avaruudessa $L(X,Y)$ ja $x \in X$. Tällöin pätee, että

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \text{ kaikille } n, m \in \mathbb{N},$$

joten $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa Y. Koska Y on täydellinen, tämä jono suppenee. Merkitään $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Helposti nähdään, että näin määritelty funktio T on lineaarinen. Pitää siis osoittaa, että T on rajoitettu ja $\|T_n - T\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ kaikille $n, m \geq n_0$. Jos $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, niin

$$\|T_{n_0}x - Tx\| = \lim_{m\to\infty} \|T_{n_0}x - T_m x\| \leq \varepsilon.$$

Kaikille $n \geq n_0$ pätee $\|T_n - T\| \leq 2\varepsilon$, koska

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - Tx\| \leq \|T_n - T_{n_0}\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Siten $\|T\| < \infty$ ja $\|T_n - T\| \to 0$, kun $n \to \infty$. □

Lause 5.4. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $T : X \to Y$ on lineaarinen operaattori. Jos X on äärellisulotteinen, niin T on jatkuva.

Todistus. Olkoot $\|\cdot\|$ avaruuden X normi ja $\|\cdot\|_Y$ avaruuden Y normi. Määritellään $\|x\|_1 = \|x\| + \|Tx\|_Y$ jokaiselle $x \in X$.

Väite: $\|\cdot\|_1$ on myös avaruuden X normi.

Olkoot $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$.

(N1): $\|x+y\|_1 = \|x+y\| + \|T(x+y)\|_Y \leq \|x\| + \|y\| + \|Tx\|_Y + \|Ty\|_Y = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

(N2): $\|\alpha x\|_1 = \|\alpha x\| + \|T(\alpha x)\|_Y = |\alpha|\|x\| + |\alpha|\|Tx\|_Y = |\alpha|\|x\|_1$.

(N3): Jos $\|x\|_1 = 0$, eli $\|x\| + \|Tx\|_Y = 0$, niin $\|x\| = 0$, ja siten $x = 0$. Toisaalta, jos $x = 0$, niin $Tx = 0$, ja siten $\|x\|_1 = \|x\| + \|Tx\|_Y = 0$.

Koska X on äärellisulotteinen, normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|_1$ ovat ekvivalentteja avaruudessa X, eli on olemassa $M > 0$ siten, että $\|x\|_1 \leq M\|x\|$ jokaiselle $x \in X$. Näin ollen $\|Tx\|_Y \leq \|x\| + \|Tx\|_Y = \|x\|_1 + \leq M\|x\|$ kaikilla $x \in X$, eli T on rajoitettu. □

Lause 5.5. Olkoot X, Y ja Z normiavaruuksia ja $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$. Tällöin yhdistetty kuvaus $ST \in L(X, Z)$ ja $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Todistus. On selvää, että ST on lineaarinen. Jos $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, niin

$$|(ST)x\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

mistä väite seuraa. □

Lause 5.6. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $T : X \to Y$ lineaarinen bijektio. Tällöin $T^{-1} : Y \to X$ on lineaarinen ja T^{-1} on jatkuva jos ja vain jos on olemassa $M > 0$ siten, että $\|Tx\| \geq M\|x\|$ kaikille $x \in X$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että T^{-1} on lineaarinen. Olkoot $y, y' \in Y$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Olkoot $x, x' \in X$ siten, että $Tx = y$ ja $Tx' = y'$. Koska T on lineaarinen, niin $T(\lambda x + \mu x') = \lambda Tx + \mu Tx' = \lambda y + \mu y'$, joten

$$T^{-1}(\lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' = \lambda T^{-1}y + \mu T^{-1}y'.$$

Oletetaan nyt, että T^{-1} on rajoitettu. Voidaan olettaa, että $X \neq \{0\}$ ja $Y \neq \{0\}$. Epäyhtälö $\|Tx\| \geq M\|x\|$ on selvästi tosi, jos $x = 0$. Olkoon $x \in X$, $x \neq 0$. Tällöin

$$0 < \|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|,$$

joten

$$0 < \frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|Tx\|.$$

Voidaan siis valita $M = 1/\|T^{-1}\|$.

Oletetaan, että on olemassa $M > 0$ siten, että $\|Tx\| \geq M\|x\|$ jokaiselle $x \in X$. Olkoon $y \in Y$ mielivaltainen. Olkoon $x \in X$ siten, että $x = T^{-1}y$, eli $Tx = y$. Nyt

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{M}\|Tx\| = \frac{1}{M}\|y\|.$$

Siten $\|T^{-1}\| \leq 1/M$, eli T^{-1} on rajoitettu. □

Huomautus Edellisessä lauseessa ei oletettu, että T on rajoitettu.

Olkoot X on normiavaruus, $k \in \mathbb{N}$ ja $T \in L(X)$. Merkitään

$$T^k = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{k \text{ kpl}}$$

Määritelmä 5.7. Olkoot X Banachin avaruus ja $T \in L(X)$. Jos on olemassa rajoitettu lineaarinen operaattori $T^{-1} : X \to X$, niin T on *kääntyvä operaattori.*

Lause 5.8. Olkoot X Banachin avaruus ja $T \in L(X)$. Jos $\|T\| < 1$, niin operaattori $I - T$ on kääntyvä ja

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ (Neumannin sarja)}$$

ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|$ suppenee. Lisäksi $\|(I - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$.

Todistus. Lauseen 5.5 nojalla $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|} < \infty, \text{ kun } \|T\| < 1.$$

Koska $L(X)$ on Banachin avaruus Lauseen 5.3 nojalla, niin saadaan Lauseen 2.19 nojalla, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ suppenee. Olkoon

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k \text{ jokaiselle } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k \in L(X)$. Lisäksi

$$(I - T)S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^{k+1} = I - T^{n+1} = S_n(I - T),$$

joten

$$\|(I - T)S_n - I\| \leq \|T\|^{n+1} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Täten $(I - T)S = I$ ja vastaavasti $S(I - T) = I$, eli $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \in L(X)$ on operaattorin $I - T$ käänteisoperaattori ja $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$. □

Huomautus. Jos $S, T \in L(X)$ ovat kääntyviä, niin yhdistetty kuvaus ST on kääntyvä ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. Tämä seuraa yhtälöistä $STT^{-1}S^{-1} = SS^{-1} = I$ ja $T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$.

Lause 5.9. Olkoon X Banachin avaruus. Jos $T \in L(X)$ on kääntyvä ja $S \in L(X)$ toteuttaa $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, niin $T - S$ on kääntyvä.

Todistus. Jos $T \in L(X)$ on kääntyvä, niin $T - S = T(I - T^{-1}S)$. Oletuksen nojalla

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\|S\| < 1,$$

joten Lauseen 5.5 nojalla $I - T^{-1}S$ on kääntyvä. Edellisen huomatuksen nojalla myös operaattoritulo $T(I - T^{-1}S) = T - S$ on kääntyvä. $\square$

Esimerkki. Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ jatkuva (ns. ydinfunktio). Asetetaan jokaiselle $f \in C[0,1]$,

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s)f(s)ds \text{ kaikilla } x \in [0,1].$$

Voidaan osoittaa, että $Tf \in C[0,1]$. Edelleen on helppoa nähdä, että $f \mapsto Tf$ on lineaarinen. Jos $C[0,1]$ varustetaan $\sup$-normilla, niin $T : C[0,1] \to C[0,1]$ on rajoitettu. Nimittäin, K on jatkuva kompaktissa joukossa $[0,1] \times [0,1]$ ja saa siinä suurimman arvonsa, joten on olemassa $M < \infty$ siten, että $|K(x,s)| \leq M < \infty$ kaikilla $x, s \in [0,1]$. Näin voimme arvioida

$$|(Tf)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,s)||f(s)|ds \leq M\|f\|_\infty$$

ja $\|Tf\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$. Siis T on rajoitettu operaattori.

Väite: Jos $M < 1$, niin jokaisella $g \in C[0,1]$ on olemassa yksikäsitteinen $f \in C[0,1]$ siten, että

$$g(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,s)f(s)ds, \text{ eli } g = (I - T)f$$

Olemme osoittaneet, että $\|T\| \leq M < 1$. Sovellamme Neumannin sarjaa operaattoriin $-T$, sillä $\|-T\| = \|T\| < 1$. Operaattori $I + T = I - (-T)$ on kääntyvä, joten

$$(I + T)f = g \text{ jos ja vain jos } f = (I + T)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty}(-T)^k g.$$

Koska $M < 1$, niin voidaan myös käyttää Banachin kiintopistelausetta (katso esimerkki, Luku 3).

Luku 6

Bairen kategorialause ja sen sovelluksia

Bairen kategorialause on yksi modernin analyysin perusperiaatteista. Tässä luvussa todistamme tasaisen rajoituksen periaatteen eli Banach-Steinhausin lauseen soveltamalla Bairen lausetta.

Olkoon A epätyhjä osajoukko metrisessä avaruudessa (X, d). Palautetaan mieliin, että

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Aloitamme Cantorin lauseella:

Lause 6.1. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $F_n \subseteq X$ on epätyhjä suljettu osajoukko jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ siten, että $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ ja $d(F_n) \to 0$ kun $n \to \infty$, niin $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ koostuu täsmälleen yhdestä pisteestä $x_0 \in X$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(F_n) \leq \varepsilon \text{ kun } n \geq n_0.$$

Valitaan jokin $x_n \in F_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ kun $n, m \geq n_0$, joten (x_n) on Cauchyn jono avaruudessa X. Koska (X, d) on täydellinen, on siis olemassa $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee, että osajono $(x_k, x_{k+1}, \ldots)$ myöskin suppenee kohti pistettä x_0. Koska F_k on suljettu ja $(x_k, x_{k+1}, \ldots)$ sisältyy joukkoon F_k, seuraa että $x_0 \in F_k$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Siis $x_0 \in \cap_{k=1}^{\infty} F_k := F$. Kaikilla $y \in F$ pätee

$$0 \leq d(x_0, y) \leq d(F) \leq d(F_n) \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Siis $d(x_0, y) = 0$, joten $x_0 = y$ ja siten $\{x_0\} = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. □

Nyt voimme formuloida

Lause 6.2 (Bairen kategorialause)**.** Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja

$$X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

missä $F_n \subseteq X$ on suljettu jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Silloin ainakin yksi joukoista F_n sisältää suljetun pallon ja siten myös avoimen pallon. (Erityisesti sisus int $F_n \neq \emptyset$).

Todistus. Väite: Jos suljettu joukko $F \subseteq X$ ei sisällä yhtään suljettua palloa, niin silloin jokainen suljettu pallo $\overline{B}(x_0, r)$ sisältää suljetun pallon jolla ei ole yhteisiä pisteitä joukon F kanssa.

Valitaan $x_1 \in \overline{B}(x_0, \frac{r}{2})$ siten, että $x_1 \notin F$. Nyt on olemassa $0 < r_1 \leq \frac{r}{2}$ siten, että $\overline{B}(x_1, r_1) \cap F = \emptyset$, koska F on suljettu. Edelleen,

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$$

sillä jos $x \in \overline{B}(x_1, r_1)$, niin $d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) \leq r_1 + \frac{1}{2}r \leq r$.

Tehdään nyt vastaoletus ja oletetaan, että millään $n \in \mathbb{N}$ joukko F_n ei sisällä suljettua palloa.

Olkoon $\overline{B}^{(0)}$ mielivaltainen suljettu pallo. Tällöin on edellisen väitteen nojalla olemassa suljettu pallo $\overline{B}^{(1)}$ siten, että $\overline{B}^{(1)} \subseteq \overline{B}^{(0)}$ ja $\overline{B}^{(1)} \cap F_1 = \emptyset$. Tietysti voimme olettaa, että $d(\overline{B}^{(1)}) \leq 1$. Sovelletaan edellistä väitettä joukkoon $\overline{B}^{(1)}$, jolloin löytyy suljettu pallo $\overline{B}^{(2)}$ siten, että $\overline{B}^{(2)} \subseteq \overline{B}^{(1)}$, $d(\overline{B}^{(2)}) \leq \frac{1}{2}$ ja $\overline{B}^{(2)} \cap F_2 = \emptyset$. Jatkamalla tätä konstruktiota saadaan jono $(\overline{B}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ suljettuja palloja siten, että

$$\overline{B}^{(1)} \supseteq \overline{B}^{(2)} \supseteq \ldots, \; d(\overline{B}^{(n)}) \to 0 \text{ kun } n \to \infty \text{ ja } \overline{B}^{(n)} \cap F_n = \emptyset$$

ja kaikille $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 6.1 nojalla $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}^{(n)} = \{x_0\}$, joten $x_0 \notin F_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tästä seuraisi, että $X \neq \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. □

Lause 6.3 (Tasaisen rajoituksen periaate eli Banach-Steinhausin lause)**.** Olkoot X Banachin avaruus, Y normiavaruus ja $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ kokoelma rajoitettuja lineaarikuvauksia $T_\alpha : X \to Y$ (indeksijoukko J mielivaltainen). Jos kokoelma $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ on pisteittäin rajoitettu, eli $M(x) := \sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha x\| < \infty$ jokaiselle $x \in X$, niin se on tasaisesti rajoitettu, eli $\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| = \sup_{\alpha \in J} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_\alpha x\| < \infty$.

Todistus. Olkoon $F(n, \alpha) := \{x \in X : \|T_\alpha x\| \leq n\}$ kun $\alpha \in J$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska jokainen T_α, $\alpha \in J$, on jatkuva, seuraa, että jokainen $F(n, \alpha)$ on avaruuden X suljettu osajoukko. Tällöin myös leikkausjoukko

$$F_n := \cap_{\alpha \in J} F(n, \alpha) \subseteq X$$

on suljettu. Oletuksesta seuraa, että $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Koska X on Banachin avaruus, niin Lauseen 6.2 nojalla on olemassa $N \in \mathbb{N}$ ja sellainen suljettu pallo $\overline{B}(x_0, r)$, että $\overline{B}(x_0, r) \subseteq F_N$. Olkoon $\gamma := N > 0$. Tällöin

$$\|T_\alpha x\| \leq \gamma \text{ jokaisella } \alpha \in J \text{ ja jokaisella } x \in \overline{B}(x_0, r).$$

Olkoon $y \in X$, $\|y\| \leq 1$. Tällöin $x := x_0 + ry \in \overline{B}(x_0, r)$, joten

$$\|T_\alpha y\| = \|T_\alpha(\frac{x - x_0}{r})\| \leq \frac{1}{r}(\|T_\alpha x\| + \|T_\alpha x_0\|) \leq \frac{1}{r}2\gamma =: M,$$

joten $\|T_\alpha\| \leq M$ jokaisella $\alpha \in J$. □

Seuraus 6.4. Olkoot X Banachin avaruus, Y normiavaruus ja $(T_n)_{n=1}^\infty$ avaruuden $L(X, Y)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ on olemassa kaikilla $x \in X$. Tällöin $T \in L(X, Y)$, eli T on jatkuva lineaarikuvaus.

Todistus. Selvästi T on lineaarinen. Oletuksen mukaan jono $(T_n x)_{n=1}^\infty$ suppenee avaruudessa Y jokaiselle $x \in X$, joten jono $(T_n x)_{n=1}^\infty$ on Cauchy jono ja näin ollen rajoitettu. Täten $M(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| < \infty$ kaikilla $x \in X$. Nyt Banach-Steinhausin Lauseen nojalla löytyy sellainen $M < \infty$, että $\|T_n\| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|\|x\| \leq M\|x\| \text{ kun } x \in X,$$

joten $\|T\| \leq M$. □

Luku 7

Avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet

Äärellisulotteisen avaruuden kaikki normit ovat keskenään ekvivalentteja. Avoimen kuvauksen lauseen voidaan sanoa olevan yleistys tälle periaatteelle ääretönulotteisten Banachin avaruuksien tapauksessa.

Määritelmä 7.1. Jos X ja Y ovat normiavaruuksia, niin kuvaus $f : X \to Y$ on *avoin*, jos $f(U)$ on avoin avaruudessa Y aina, kun U on avoin avaruudessa X.

Esimerkki. Äärellisulotteisten avaruuksien välinen lineaarinen surjektio on avoin kuvaus. Harjoitustehtävä.

Lemma 7.2. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $T : X \to Y$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos jokaista $r > 0$ kohti on olemassa sellainen $s > 0$, että $B(0, s) \subseteq T(B(0, r))$.

Todistus. Oletetaan, että T on avoin kuvaus ja olkoon $r > 0$. Tällöin $T(B(0, r))$ on avoin avaruudessa Y. Koska $T(0) = 0 \in T(B(0, r))$, on olemassa $s > 0$ siten, että $B(0, s) \subseteq T(B(0, r))$.

Oletetaan, että jokaiselle $r > 0$ on olemassa $s > 0$ siten, että $B(0, s) \subseteq T(B(0, r))$. Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja olkoon $x \in U$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subseteq U$, eli

$$x + B(0, r) \subseteq U.$$

Oletuksen nojalla on olemassa $s > 0$ siten, että $B(0, s) \subseteq T(B(0, r))$. Tällöin

$$B(Tx, s) = Tx + B(0, s) \subseteq Tx + T(B(0, r)) = T(x + B(0, r)) \subseteq T(U),$$

josta seuraa, että $T(U)$ on avoin avaruudessa Y. □

Huomautus. Olkoot A ja B normiavaruuden X osajoukkoja. Määritellään seuraa-

vat joukot:

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\},\ \lambda \in \mathbb{K},$$
$$A + y = \{x + y : x \in A\},\ y \in X,$$
$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Tällöin $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

Todistus. Olkoot $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $x_0 \in A$ ja $y_0 \in B$ siten, että

$$\|x - x_0\| < \varepsilon/2 \text{ ja } \|y - y_0\| < \varepsilon/2,$$

joten

$$\|x + y - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \varepsilon.$$

Tässä $x_0 + y_0 \in A + B$, joten $x + y \in \overline{A + B}$ koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. □

Lemma 7.3. Olkoot X normiavaruus, Y Banachin avaruus ja $T : X \to Y$ lineaarinen surjektio. Jos V on pisteen $0 \in X$ ympäristö avaruudessa X, niin $\overline{T(V)}$ on pisteen $0 \in Y$ ympäristö avaruudessa Y.

Todistus. Olkoon V pisteen $0 \in X$ ympäristö. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että jos $B = B(0, r)$, niin $B + B \subseteq V$. Nimittäin, jos $B(0, 2r) \subseteq V$, niin kolmioepäyhtälön perusteella $B(0, r) + B(0, r) \subseteq V$. Jos $y \in Y$, niin $y = Tx$ jollakin $x \in X$. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\|x\| < nr$, eli $x \in nB$. Siis

$$y \in T(nB) = nT(B) \subseteq n\overline{T(B)}.$$

Koska $y \in Y$ on mielivaltainen, olemme siis osoittaneet, että

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Koska Y on Banachin avaruus, voimme soveltaa Bairen lausetta: Ainakin yksi suljetuista joukoista $n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon, eli

$$B_Y(x_0, \rho_0) \subseteq n\overline{T(B)} \text{ jollakin } n \in \mathbb{N},$$

joten

$$B_Y(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}) = \frac{1}{n} B_Y(x_0, \rho_0) \subseteq \overline{T(B)}.$$

Merkitään $x = \frac{1}{n}x_0$ ja $\rho = \frac{1}{n}\rho_0$, jolloin $B_Y(x, \rho) \subseteq \overline{T(B)}$. Lisäksi $-x \in \overline{T(B)}$: Jos $x \in \overline{T(B)}$, niin on olemassa jono $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq T(B)$ siten, että $x = \lim_{n\to\infty} y_n$. Nyt

$$y_n \in T(B) = T(B(0, r)),\ \text{joten}\ -y_n \in T(B) \text{ ja } -x = \lim_{n\to\infty}(-y_n) \in \overline{T(B)}.$$

Tästä seuraa, että

$$B_Y(0, \rho) = -x + B_Y(x, \rho) \subseteq \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subseteq \overline{T(B) + T(B)} = \overline{T(B + B)} \subseteq \overline{T(V)}.$$

Siis $\overline{T(V)}$ on pisteen $0 \in Y$ ympäristö avaruudessa Y. □

Lemma 7.4. Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia ja $T : X \to Y$ jatkuva lineaarinen surjektio. Tällöin jokaista $r > 0$ kohti on olemassa $s > 0$, jolle $T(B(0,r)) \supseteq B(0,s)$.

Todistus. Olkoon $r > 0$ annettu, $r_0 = \frac{1}{2}r$ ja $r_k = 2^{-k}r_0$ kun $k \in \mathbb{N}$. Siis $r_k > 0$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 7.3 nojalla löydämme luvut $s_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, joille

$$B_Y(0, s_k) \subseteq \overline{T(B_X(0, r_k))}, \text{ kun } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Jos $y \in \overline{T(B_X(0,r_k))}$, niin $\|y\| \leq \|T\| r_k$. Tässä $r_k \to 0$ kun $k \to \infty$, joten $s_k \to 0$ kun $k \to \infty$.

Väite: $B_Y(0, s_0) \subseteq T(B_X(0,r))$.

Oletetaan, että $y \in Y$ ja $\|y\| < s_0$. Tällöin $y \in \overline{T(B_X(0,r_0))}$, joten on olemassa $x_0 \in B_X(0,r_0)$ siten, että $\|y - Tx_0\| < s_1$, eli $y - Tx_0 \in B_Y(0,s_1) \subseteq \overline{T(B_X(0,r_1))}$. Jatkamalla saadaan, että on olemassa $x_1 \in B_X(0,r_1)$, jolle $\|y - Tx_0 - Tx_1\| < s_2$, eli $y - Tx_0 - Tx_1 \in B_Y(0,s_2) \subseteq \overline{T(B_X(0,r_2))}$.

Induktioaskel: Jos $x_k \in B_X(0,r_k)$, $0 \leq k \leq n-1$, ja

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B_Y(0,s_n) \subseteq \overline{T(B_X(0,r_n))},$$

niin on olemassa $x_n \in B_X(0,r_n)$ siten, että

$$\|y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k - Tx_n\| = \|y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k\| < s_{n+1}.$$

Siten saamme jonon $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ avaruudessa X jolle $\|x_k\| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty$, eli sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x_z$ on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa X. Koska X on täydellinen, niin Lauseesta 2.19 seuraa, että sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ suppenee avaruudessa X, eli $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$. Tällöin edellisen arvion nojalla

$$\|x\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < r,$$

joten $x \in B_X(0,r)$. Koska edelleen

$$\|y - T(\sum_{k=0}^{n} x_k)\| = \|y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k\| < s_{n+1} \to 0$$

kun $n \to \infty$, niin operaattorin T jatkuvuuden nojalla

$$y = \lim_{n\to\infty} T(\sum_{k=0}^{n} x_k) = T(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k) = Tx.$$

Siis: Jos $y \in Y$ ja $\|y\| < s_0$, niin $y = Tx$, missä $x \in X$ ja $\|x\| < r$. Tästä seuraa, että $T(B_X(0,r)) \supseteq B_Y(0,s_0)$. □

Seuraava lause on erittäin keskeinen modernissa analyysissä.

Lause 7.5 (Avoimen kuvauksen lause)**.** Jos X ja Y ovat Banachin avaruuksia ja $T : X \to Y$ on jatkuva lineaarinen surjektio, niin silloin T on avoin kuvaus.

Todistus. Tämä seuraa Lemmoista 7.2 ja 7.4. □

Seuraus 7.6. Olkoot X ja Y Banachin avaruuksia ja $T : X \to Y$ jatkuva lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on jatkuva.

Todistus. Avoimen kuvauksen Lauseen nojalla T on avoin kuvaus $X \to Y$. Jos $U \subseteq X$ on avoin joukko, niin tällöin alkukuva $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ on siis avoin avaruudessa Y, eli T^{-1} on jatkuva. □

Esimerkki. Olkoot X vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ sen normeja. Jos on olemassa $\beta > 0$ siten, että $\|x\|_2 \leq \beta\|x_1\|$ kaikilla $x \in X$, niin $id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos $(X, \|\cdot\|)$ ja $(X, \|\cdot\|)$ ovat Banachin avaruuksia, niin edellisen tuloksen avulla saadaan, että $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja.

Tarkastellaan avaruuden $C([0,1], \mathbb{R})$ normeja

$$\|f\|_\infty = \sup_{0<t<1} |f(t)| \text{ ja } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Nyt $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ jokaiselle $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, joten

$$id : (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$$

on jatkuva lineaarinen bijektio. Mutta normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja ($f_n(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$), joten identiteettikuvaus ei ole avoin. Koska $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ on täydellinen, seuraa, että $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ ei ole täydellinen.

Kahden normiavaruuden X ja Y *tuloavaruus* eli *tulo* on joukko $X \times Y$ varustettuna vektoriavaruuslaskutoimituksilla

$$(x,y) + (x_1,y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

ja normilla $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ (tai millä tahansa tämän kanssa ekvivalentilla normilla, kuten $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$).

Huomautus. (1) Jono $(x_n, y_n)_{n=1}^\infty$ suppenee avaruudessa $X \times Y$ kohti pistettä (x,y) jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ avaruudessa X ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ avaruudessa Y.

(2) Kahden täydellisen normiavaruuden tulo on täydellinen. Tämä on helppo todistaa suoraan.

Määritelmä 7.7. Kuvauksen $f : X \to Y$ *kuvaaja* eli *graafi* on joukko

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Jos $T : X \to Y$ on lineaarinen, niin silloin $Gr(T)$ on avaruuden $X \times Y$ vektorialiavaruus. Nimittäin,

$$\alpha(x, Tx) + \beta(y, Ty) = (\alpha x + \beta y, T(\alpha x + \beta y))$$

kaikilla $x, y \in X$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Lause 7.8. Jos X ja Y ovat normiavaruuksia ja $f : X \to Y$ on jatkuva kuvaus, niin funktion f kuvaaja $Gr(f) \subseteq X \times Y$ on suljettu.

Todistus. Olkoon $(x, y) \in \overline{Gr(f)} \subseteq X \times Y$. Tällöin on olemassa sellaiset pisteparit $(x_n, f(x_n)) \in Gr(f)$, $n \in \mathbb{N}$, että

$$\|(x_n, f(x_n)) - (x, y)\| = \|x_n - x\| + \|f(x_n) - y\| \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

Tällöin siis sekä $\|x_n - x\| \to 0$ että $\|f(x_n) - y\| \to 0$ kun $n \to \infty$. Koska f on jatkuva, niin $f(x_n) \to f(x)$ avaruudessa Y kun $n \to \infty$. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla seuraa silloin, että $y = f(x)$, eli $(x, y) = (x, f(x)) \in Gr(f)$. Siis $Gr(f)$ on suljettu avaruudessa $X \times Y$. □

Huomautus Jos X ja Y ovat Banachin avaruuksia, niin Lauseen 7.8 nojalla myöskin $Gr(f)$ on Banachin avaruus kun $T : X \to Y$ on jatkuva lineaarinen kuvaus.

Lause 7.9 (Suljetun kuvaajan lause)**.** Lineaarikuvaus T Banachin avaruudelta X Banachin avaruudelle Y on jatkuva jos ja vain jos sen kuvaaja on suljettu.

Todistus. Jatkuvan kuvauksen kuvaaja todettiin edellä suljetuksi, olipa kuvaus lineaarinen tai ei. Oletetaan siis, että $T : X \to Y$ on lineaarinen kuvaus, jonka graafi $Gr(T)$ on suljettu avaruudessa $X \times Y$. Edellä olevan huomion nojalla $Gr(T)$ on täydellinen. Määritellään kuvaus

$$P : Gr(T) \to X, (x, Tx) \mapsto x.$$

Selvästi P on lineaarinen. Edelleen, P on rajoitettu, koska

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| \text{ kaikilla } x \in X.$$

Kuvaus P on bijektio ja sen käänteiskuvaus on

$$P^{-1} : X \to Gr(T), x \mapsto (x, Tx).$$

Nyt saadaan avoimen kuvauksen lauseen nojalla (Lause 7.5), että P^{-1} on jatkuva. Lauseesta 5.6 seuraa, että on olemassa $\beta > 0$, jolle

$$\|x\| = \|P(x, Tx)\| \geq \beta\|(x, Tx)\| \text{ kaikilla } (x, Tx) \in Gr(T).$$

Tästä seuraa arvio

$$\beta\|Tx\| \leq \beta(\|x\| + \|Tx\|) = \beta\|(x, Tx)\| \leq \|x\| \text{ kaikille } x \in X.$$

Siis $\|Tx\| \leq \frac{1}{\beta}\|x\|$ jokaiselle $x \in X$, eli T on jatkuva. □

Huomautus Lauseen nojalla riittää osoittaa, että $\overline{Gr(T)} = Gr(T)$ jotta lineaarinen operaattori T olisi jatkuva. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jos $x_n \to x$ avaruudessa X ja $Tx_n \to y$ avaruudessa Y kun $n \to \infty$, niin $y = Tx$.

Esimerkki. Olkoot $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva}\}$ normina

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

ja $C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuvasti derivoituva}\}$ avaruuden $C[0,1]$ aliavaruus. Siis $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ on normiavaruus. Määritellään lineaarikuvaus

$$T : C^1[0,1] \to C[0,1] \text{ kaavalla } Tf = f'.$$

Olkoon $f_n(t) = \sin(n\pi t)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $f_n \in C^1[0,1]$ ja

$$\|f_n\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |\sin(n\pi t)| = 1.$$

Edelleen,

$$\|Tf_n\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |\pi n \cos(n\pi t)| = \pi n = \pi n\|f_n\|_\infty > n\|f_n\|_\infty$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen T ei ole jatkuva.

Nyt kuitenkin funktion T kuvaaja $Gr(T)$ on suljettu avaruudessa $C^1[0,1] \times C[0,1]$. Nimittäin, oletetaan, että $f_n \to f$ avaruudessa $C^1[0,1]$ ja $f_n' \to g$ avaruudessa $C[0,1]$. Tällöin $f_n' \to g$ tasaisesti joukossa $[0,1]$, joten

$$f_n(t) - f_n(0) = \int_0^t f_n'(s)ds \to \int_0^t g(s)ds, \text{ kun } n \to \infty.$$

Täten jokaiselle $t \in [0,1]$ pätee

$$f(t) - f(0) = \lim_{n\to\infty}(f_n(t) - f_n(0)) = \int_0^t g(s)ds,$$

joten

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \text{ kun } t \in [0,1].$$

Tästä seuraa, että $f' = g$, joten $f \in C^1[0,1]$ ja $Tf = g$. Siis avaruus $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ei ole täydellinen.

Luku 8

Dualiteetti, Hahn-Banachin lause ja sovelluksia

Jos X on vektoriavaruus, niin merkitään

$$X^\dagger = \{l : X \to \mathbb{K} : l \text{ on lineaarinen }\}.$$

Tätä sanotaan avaruuden X *algebralliseksi duaaliksi*. Duaalin $X^\dagger$ alkioita kutsutaan *funktionaaleiksi*.

Jos $l \in X^\dagger$ ja $x \in X$, niin usein merkitään $\langle x, l\rangle = l(x)$. Normiavaruuden tapauksessa $l \in X^\dagger$ voi olla jatkuva tai epäjatkuva.

Määritelmä 8.1. Jos X on normiavaruus, niin

$$X^* = L(X, \mathbb{K}) = \{l : X \to \mathbb{K} : l \text{ on jatkuva ja lineaarinen }\}$$

on avaruuden X (*topologinen*) *duaali*.

Yleensä $X^* \subsetneq X^\dagger$, mutta jos X on äärellisulotteinen, niin $X^* = X^\dagger$ (Lause 5.4).

Duaaliavaruuden X^* normi on

$$\|l\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} |\langle x, l\rangle|.$$

Lauseen 5.3 nojalla X^* on Banachin avaruus

Määritelmä 8.2. Olkoot X ja Y normiavaruuksia. Lineaarinen kuvaus $T : X \to Y$ on *isomorfismi*, jos T on bijektio ja T sekä T^{-1} ovat jatkuvia. Tällöin avaruudet X ja Y ovat *isomorfiset*. Kuvaus $T : X \to Y$ on *isometrinen* jos $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ kaikilla $x \in X$.

Huomautus Jos X ja Y ovat normiavaruuksia ja $T \in L(X, Y)$, niin T on isometria jos ja vain jos $\|Tx\| = \|x\|$ kaikilla $x \in X$. Harjoitustehtävä.

Esimerkki. Olkoot $1 < p < \infty$ ja $q = p/(p-1)$, jolloin $1/p + 1/q = 1$. Osoitetaan, että $(\ell^p, \|\cdot\|_p)^*$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa.

Olkoon

$$e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^p, \text{ kun } k \in \mathbb{N},$$

ja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \text{ kun } x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p, \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x - s_n(x)\|_p &= \lim_{n\to\infty} \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ kpl}}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_p \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} \\ &= 0,\end{aligned}$$

joten

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Jos $l \in (\ell^p)^*$, $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin lineaarisuuden nojalla

$$\langle s_n(x), l \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, l \rangle =: \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

missä $y_k = \langle e_k, l \rangle$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x$ ja l on jatkuva, niin $\lim_{n\to\infty} \langle s_n(x), l \rangle = \langle x, l \rangle$, joten

$$\langle x, l \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{$*$}$$

Osoitetaan nyt, että $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^q$. Merkitään

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{|y_k|^q}{y_k} & \text{kun } y_k \neq 0 \\ 0 & \text{kun } y_k = 0 \end{cases},$$

ja asetetaan

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \ell^p, \text{ kun } n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin

$$\|w_n\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q, \text{ koska } p = \frac{q}{q-1}.$$

Sijoitetaan nyt kaavaan $(*)$ muuttujan x paikalle w_n, jolloin

$$\begin{aligned} A :&= \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = \langle w_n, l \rangle \\ &= |\langle w_n, l \rangle| \leq \|l\| \|w_n\|_p = \|l\| \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/p} = A^{1/p} \|l\|. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$A^{1-1/p} = A^{1/q} = \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{1/q} \leq \|l\|, \text{ jokaiselle } n \in \mathbb{N}.$$

Antamalla $n \to \infty$ saadaan $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$ ja $\|y\|_q \leq \|l\|$.

Määritellään tämän perusteella kuvauksen

$$\begin{aligned} T : (\ell^p)^* &\to \ell^q \\ l &\mapsto y, \end{aligned}$$

missä siis jono $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} = (\langle e_k, l\rangle)_{k=1}^{\infty}$. Selvästi T on lineaarinen ja

$$\|T(l)\|_q = \|y\|_q \leq \|l\|, \text{ kun } l \in (\ell^p)^*,$$

joten T on jatkuva.

T on injektio: Jos $T(l) = 0$, niin $\langle e_k, l\rangle = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\langle s_n(x), l\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, l\rangle = 0 \text{ kaikilla } x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p,\ n \in \mathbb{N}.$$

Koska l on jatkuva ja $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x$, niin $\langle x, l\rangle = 0$ jokaisella $x \in \ell^p$, eli $l = 0$.

T on surjektio: Jos $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ ja $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön mukaan

$$|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{1/q}.$$

Tästä seuraa, että kuvaus $F_y : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jatkuva lineaarinen funktionaali $\ell^p \to \mathbb{K}$, joten $F_y \in (\ell^p)^*$. Lisäksi

$$\|F_y\| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{1/q} = \|y\|_q.$$

Määritellään kuvaus $S : \ell^q \to (\ell^p)^*$ kaavalla $S(y) = F_y$. Tällöin S on jatkuva lineaarinen operaattori ja

$$\|S(y)\| \leq \|y\|_q \text{ jokaisella } y \in \ell^q.$$

Nyt $\langle e_k, S(y)\rangle = F_y(e_k) = y_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$TS(y) = (\langle e_k, S(y)\rangle)_{k=1}^{\infty} = (y_k)_{k=1}^{\infty} = y \text{ kaikilla } y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^q.$$

Näin ollen T on bijektio ja $S = T^{-1}$.

Olkoot lopuksi $l \in (\ell^p)^*$ ja $y = T(l)$. Tällöin $S(y) = l$ ja

$$\|l\| = \|S(y)\| \leq \|y\|_q = \|T(l)\|_q \leq \|l\|.$$

Tästä seuraa, että $\|T(l)\|_q = \|l\|$, joten T on isometrinen isomorfismi $(\ell^p)^* \to \ell^q$. Täten voimme samaistaa avaruudet $(\ell^p)^*$ ja ℓ^q isometrian välityksellä.

Koska p ja q ovat symmetrisessä asemassa, niin myöskin ℓ^p ja $(\ell^q)^*$ voidaan samaistaa keskenään isometrisesti isomorfisina avaruuksina. Jos käytämme merkintää $\ell^p \cong (\ell^q)^*$, saadaan, että

$$((\ell^p)^*)^* \cong (\ell^q)^* \cong \ell^p.$$

Siis ℓ^p on *refleksiivinen* kun $1 < p < \infty$. Katso Luku 9.

Tarkastellaan nyt Hilbertin avaruuden H duaalia. Olkoon $y \in H$ ja määritellään $F_y : H \to \mathbb{K}$ kaavalla $F_y(x) = (x \mid y)$, missä $(\cdot \mid \cdot)$ on avaruuden H sisätulo. Selvästi F_y on lineaarinen funktionaali. Edelleen, Cauchy-Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|F_y(x)| = |(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\| \text{ kaikilla } x \in H,$$

joten F_y on jatkuva, eli $F_y \in H^*$. Lisäksi $\|F_y\| \leq \|y\|$.

Toisaalta, jos $y \neq 0$, niin saadaan

$$\|F_y\| \geq |F_y(\frac{y}{\|y\|})| = \frac{1}{\|y\|}|(y \mid y)| = \|y\|.$$

Näin ollen

$$\|F_y\| = \|y\| \text{ jokaiselle } y \in H.$$

Jokainen vektori $y \in H$ siis määrää alkion $F_y \in H^*$.

Nyt herää kysymys, että ovatko kaikki avaruuden H^* alkiot tätä tyyppiä? Myönteisen vastauksen antaa seuraava ns. *Fréchet-Rieszin lause*.

Lause 8.3. Olkoot H Hilbertin avaruus ja $F \in H^*$, ts. F on jatkuva lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori $y \in H$, että $F_y = F$, ts.

$$F(x) = (x \mid y) \text{ kaikilla } x \in H.$$

Todistus. Jos tällainen $y \in H$ on olemassa, se on yksikäsitteinen. Jos

$$(x \mid y) = F(x) = (x \mid z) \text{ kaikilla } x \in H,$$

niin $(x \mid y - z) = 0$ kaikilla $x \in H$. Valitsemalla $x = y - z$, saadaan $y = z$.

Todistamme nyt vektorin y olemassaolon. Jos $F = \theta$, niin ilmeisesti kelpaa $y = 0$. Voidaan siis olettaa, että $F \neq \theta$. Tällöin funktionaalin F nollajoukko

$$M := \text{Ker } F = \{x \in H : F(x) = 0\}$$

on avaruuden H aito vektorialiavaruus. On helppo nähdä, että kuvauksen F jatkuvuuden nojalla M on suljettu. Seuraksen 4.13 nojalla $H = M \oplus M^\perp$, missä $M^\perp \neq \{0\}$. Valitaan $0 \neq z_0 \in M^\perp$, jolloin $z_0 \notin M$, ja merkitään $z := z_0/F(z_0)$, jolloin $F(z) = 1$. Jos nyt $z_1 \in M^\perp$, niin

$$F(z_1 - F(z_1)z) = F(z_1) - F(z_1)F(z) = 0,$$

joten $z_1 - F(z_1)z \in M \cap M^\perp = \{0\}$, ja $z_1 = F(z_1)z$. Täten $M^\perp = \text{span}\,\{z\}$, joka on 1-ulotteinen. Valitaan mielivaltainen $x \in H$. Se voidaan esittää muodossa ($H = M \oplus M^\perp$)

$$x = x_0 + \lambda z, \text{ missä } x_0 \in M \text{ ja } \lambda z \in M^\perp.$$

Kun merkitään

$$y = \frac{z}{\|z\|^2} \in M^\perp,$$

saadaan

$$(x \mid y) = (x_0 + \lambda z \mid \frac{z}{\|z\|^2}) = \frac{\lambda}{\|z\|^2}(z \mid z) = \lambda.$$

Koska $F(x) = F(x_0) + \lambda F(z) = \lambda$, saadaan $(x \mid y) = F(x)$. Siis vaaditunlainen vektori $y \in H$ on löytetty. □

Todetaan nyt, että kuvaus $y \mapsto F_y$ on bijektio $H \to H^*$ ja lisäksi isometria, eli $\|y\| = \|F_y\|$ jokaiselle $y \in H$. Aivan lineaarinen se ei kuitenkaan ole, vaan *konjugaattilineaarinen*, eli

$$F_{\alpha y + \beta z} = (\cdot \mid \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(\cdot \mid y) + \overline{\beta}(\cdot \mid z) = \overline{\alpha} F_y + \overline{\beta} F_z.$$

Hahn-Banachin Lause

Olkoot H Hilbertin avaruus, $M \subseteq H$ avaruuden H suljettu aliavaruus, Y normiavaruus ja $T \in L(M, Y)$.

Väite: Löytyy sellainen $T_1 \in L(H, Y)$ jolle $T_1 x = Tx$ aina, kun $x \in M$, ja lisäksi $\|T_1\| = \|T\|$.

Todistus. Lauseen 4.11 mukaan jokaisella $x \in H$ on olemassa yksikäsitteinen esitys $x = y + z$, missä $y \in M$ ja $z \in M^\perp$. Näin ollen voidaan määritellä lineaarinen kuvaus $P_M : H \to M$ kaavalla $P_M x = y$. Nyt $(y \mid z) = 0$, joten $\|x\| \geq \|y\| = \|P_M x\|$ kaikilla $x \in H$. Näin ollen P_M on rajoitettu ja $\|P_M\| = 1$. Operaattorin T jatko saadaan määrittelemällä $T_1 := TP_M$. Selvästi $T_1 x = TP_M x = Tx$ kun $x \in M$. Edelleen,

$$\|T_1\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} \|T_1 x\| \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in M}} \|Tx\| = \|T\|$$

ja toisaalta

$$\|T_1\| = \|TP_M\| \leq \|T\|\|P_M\| \leq \|T\|.$$

Näin ollen $\|T_1\| = \|T\|$. □

Jos X on Banachin avaruus, niin silloin jatkamisongelmalla ei aina ole ratkaisua.

Esimerkki. Olkoot $M = c_0$ ja $X = \ell^\infty$, jolloin M on avaruuden X suljettu aliavaruus. Valitaan $Y = c_0$ ja $T \in L(M, Y)$ siten, että $T = \mathrm{id}_{c_0}$. Tällöin ei ole olemassa $T_1 \in L(X, Y)$ siten, että $T_1 x = Tx$ kaikilla $x \in M$.

(Katso esim. D. Werner: Funktionalanalysis, Springer, s.147)

Hahn-Banachin Lause liittyy tähän jatkamisongelmaan kun tarkastellaan lineaarisia funktionaaleja.

Lemma 8.4. Olkoon X vektoriavaruus, jonka skalaarikunta on $\mathbb{R}$. Olkoot $M \subsetneq X$ aito aliavaruus, p seminormi avaruudessa X ja $l : M \to \mathbb{R}$ lineaarinen funktionaali siten, että

$$|l(x)| \leq p(x) \text{ kaikilla } x \in M.$$

Jos $z \in X \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus \operatorname{span}\{z\}$, niin on olemassa lineaarinen funktionaali $l_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ siten, että $l_1(u) = l(u)$ kaikilla $u \in M$ ja $|l_1(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in M_1$.

Todistus. Jos $x, y \in M$, niin pätee

$$\begin{aligned} l(x) - l(y) &= l(x - y) \\ &\leq p(x - y) \\ &\leq p(x + z) + p(-y - z) \\ &= p(x + z) + p(y + z). \end{aligned}$$

Siispä

$$-p(y + z) - l(y) \leq p(x + z) - l(x) \text{ kaikilla } x, y \in M,$$

joten

$$\sup_{y \in M} \{-p(y + z) - l(y)\} \leq p(x + z) - l(x).$$

Edelleen,

$$\sup_{y \in M} \{-p(y + z) - l(y)\} \leq \inf_{x \in M} \{p(x + z) - l(x)\}$$

mistä seuraa, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$-p(y + z) - l(y) \leq c \leq p(x + z) - l(x) \text{ kaikilla } x, y \in M. \qquad (*)$$

Jos $w \in M_1 = M \oplus \operatorname{span}\{z\}$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset. Määritellään $l_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ asettamalla $l_1(w) = l_1(u + \lambda z) := l(u) + \lambda c$. Tällöin $l_1 \in M_1^\dagger$ ja $l_1(u) = l(u)$ jokaisella $u \in M$.

Väite: $|l_1(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in M_1$.

Tapaus $\lambda = 0$ on selvä, koska $|l(u)| \leq p(u)$ kaikilla $u \in M$. Olkoon $\lambda \neq 0$. Epäyhtälöparista $(*)$ seuraa valitsemalla $x = \lambda^{-1}u = y \in M$, että

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - l(\lambda^{-1}u) \leq c \leq p(\lambda^{-1}u + z) - l(\lambda^{-1}u), \text{ kun } u \in M.$$

Siten

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda}l(u) \leq c \leq \frac{1}{|\lambda|}p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda}l(u)$$

mikä on yhtäpitävää

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \leq c + \frac{1}{\lambda}l(u) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(w)$$

kanssa. Edelleen, pätee

$$c + \frac{1}{\lambda}l(u) = \frac{1}{\lambda}(l(u) + \lambda c) = \frac{1}{\lambda}l_1(w),$$

joten

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \leq \frac{1}{\lambda}l_1(w) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(w).$$

Siis $|l_1(w)| \leq p(w)$. □

Todistamme seuraavaksi yhden funktionaalianalyysin peruspilareista: Hahn-Banachin Lauseen. Todistus käyttää hyväksi Zornin lemmaa. Tätä lemmaa ei varsinaisesti tarvitse todistaa, sillä se on yhtäpitävä valinta-aksiooman kanssa. Valinta-aksiooma puolestaan on riippumaton joukko-opin muista aksioomeista, joten se on otettava aksioomana mukaan.

Zornin Lemma. Olkoon $M \neq \emptyset$ osittain järjestetty joukko. Oletetaan, että jokaisella joukon M täysin järjestetyllä osajoukolla on yläraja. Tällöin joukossa M on ainakin yksi maksimaalinen alkio.

Lause 8.5 (Hahn-Banach)**.** Olkoon X $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, olkoon M avaruuden X vektorialiavaruus, olkoon p seminormi avaruudessa X ja olkoon l sellainen lineaarinen funktionaali $M \to \mathbb{R}$, että $|l(u)| \leq p(u)$ kaikilla $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen funktionaali $l_1 : X \to \mathbb{R}$, että $l(u) = l_1(u)$ jokaiselle $u \in M$ ja $l_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in X$.

Todistus. Jos h on jokin funktio, joka on määritelty jossakin avaruuden X osajoukossa, niin merkitään sen määrittelyjoukkoa symbolilla $\mathcal{D}(h)$. Olkoon

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \{h : \mathcal{D}(h) &\text{ on avaruuden } X \text{ lineaarinen aliavaruus, } M \subseteq \mathcal{D}(h),\\ &h : \mathcal{D}(h) \to \mathbb{R} \text{ on lineaarinen , } h \text{ on funktion } l \text{ jatko ja}\\ &|h(x)| \leq p(x) \text{ kaikilla } x \in \mathcal{D}(h)\}.\end{aligned}$$

Selvästi $\mathcal{E} \neq \emptyset$, sillä $l \in \mathcal{E}$. Jos $h_1, h_2 \in \mathcal{E}$, niin merkitään

$$h_1 \propto h_2 \text{ jos ja vain jos } \mathcal{D}(h_1) \subseteq \mathcal{D}(h_2) \text{ ja } h_2|_{\mathcal{D}(h_1)} = h_1.$$

Merkintä $h_2|_{\mathcal{D}(h_1)}$ tarkoittaa funktion h_2 rajoittumaa joukkoon $\mathcal{D}(h_1)$. Nyt $(\mathcal{E}, \propto)$ muodostaa *osittain järjestetyn joukon*, eli

1. $h \propto h$ kaikilla $h \in \mathcal{E}$,
2. Jos $h_1 \propto h_2$ ja $h_2 \propto h_1$ joillekin $h_1, h_2 \in \mathcal{E}$, niin $h_1 = h_2$.
3. Jos $h_1 \propto h_2$ ja $h_2 \propto h_3$ joillekin $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{E}$, niin $h_1 \propto h_3$.

Olkoon nyt $\mathcal{G} = \{h_i : i \in I\}$ jokin joukon $\mathcal{E}$ *täysin järjestetty osajoukko*, eli jos $h, g \in \mathcal{G}$, niin joko $h \propto g$ tai $g \propto h$. Asetetaan

$$\mathcal{D}(h) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}(h_i) \text{ ja } h(x) = h_i(x) \text{ jos } x \in \mathcal{D}(h_i).$$

Koska $\mathcal{G}$ on täysin järjestetty, seuraa, että $\mathcal{D}(h)$ on avaruuden X vektorialiavaruus. Lisäksi h on hyvin määritelty: jos $x \in \mathcal{D}(h_i) \cap \mathcal{D}(h_j)$, niin $h(x) = h_i(x)$ ja $h(x) = h_j(x)$. Koska $\mathcal{G}$ on täysin järjestetty, niin h_i on funktion h_j jatko, tai kääntäen. Kummassakin tapauksessa $h_i(x) = h_j(x)$. Edelleen on selvää, että h on lineaarisen funktion l jatko ja $|h(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{D}(h)$. Täten $h_i \propto h$ kaikilla $i \in I$, joten $h \in \mathcal{E}$ on joukon $\mathcal{G}$ yläraja.

Nyt Zornin Lemmasta seuraa, että joukossa $\mathcal{E}$ on ainakin yksi maksimaalinen alkio $l : \mathcal{D}(l) \to \mathbb{R}$. Jos $\mathcal{D}(l) \neq X$, niin on olemassa $z \in X \setminus \mathcal{D}(l)$. Lemman 8.4 nojalla on olemassa lineaarinen $\tilde{l} : \mathcal{D}(l) \oplus \text{span}\,\{z\} := \mathcal{D}(\tilde{l}) \to \mathbb{R}$ siten, että $\tilde{l}(x) = l(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{D}(l)$ ja $|\tilde{l}(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{D}(\tilde{l})$. Näin ollen $\tilde{l} \in \mathcal{E}$ ja $l \propto \tilde{l}$. Mutta $l \neq \tilde{l}$, joten l ei ole joukon $\mathcal{E}$ maksimaalinen alkio. Tämä on ristiriita, joten $\mathcal{D}(l) = X$ ja l on etsitty lineaarinen funktionaali $X \to \mathbb{R}$. □

Huomautus Lause 8.5 pätee myös kun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ palautetaan reaaliselle versiolle.

Seuraus 8.6. Olkoon X normiavaruus, $M \subseteq X$ vektorialiavaruus ja $h \in M^*$. Tällöin on olemassa $l \in X^*$ siten, että $\langle u, h \rangle = \langle u, l \rangle$ kaikilla $u \in M$ ja $\|h\| = \|l\|$.

Todistus. Määritellään seminormi p avaruudessa X asettamalla $p(x) = \|x\|\|h\|$ kun $x \in X$. Tällöin

$$|\langle u, h \rangle| \leq \|u\|\|h\| = p(u) \text{ kun } u \in M.$$

Lauseen 8.5 nojalla on olemassa $l \in X^\dagger$ siten, että $\langle u, h \rangle = \langle u, l \rangle$ kaikilla $u \in M$ ja $\langle x, l \rangle| \leq p(x) = \|x\|\|h\|$ kaikilla $x \in X$. Siten l on jatkuva, joten $l \in X^*$ ja $\|l\| \leq \|h\|$. Toisaalta,

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ u \in M}} |\langle u, h \rangle| = \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ u \in M}} |\langle u, l \rangle| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |\langle x, l \rangle| = \|l\|,$$

joten itse asiassa $\|h\| = \|l\|$. □

Lause 8.7. Olkoot X normiavaruus ja $M \subsetneq X$ aito vektorialiavaruus. Edelleen, olkoon $x_0 \in X$ siten, että $d = \inf\{\|x_0 - u\| : u \in M\} > 0$. Tällöin on olemassa $l \in X^*$ siten, että $l(M) = \{0\}$, $l(x_0) = d$ ja $\|l\| = 1$.

Todistus. Selvästi $Y := M \oplus \text{span}\,\{x_0\}$ on avaruuden X vektorialiavaruus ja $M \subseteq Y$. Jos $z \in Y$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteisiä. Määritellään lineaarinen funktionaali $h : Y \to \mathbb{K}$ kaavalla $h(z) = \lambda d$. Koska $\lambda = 0$ jos ja vain jos $z \in M$, ja tällöin $h(z) = 0$, niin $h(M) = \{0\}$. Olkoon $\lambda \neq 0$. Tällöin pätee

$$|\langle z, h\rangle| = |\lambda d| \leq |\lambda| \|\frac{u}{\lambda} + x_0\| = \|u + \lambda x_0\| = \|z\|,$$

joten $\|h\| \leq 1$.

Todistetaan, että $\|h\| = 1$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $d = \inf\{\|x_0 - u\| : u \in M\}$, niin on olemassa sellainen $u \in M$, että $\|x_0 - u\| < d + \varepsilon$. Nyt pätee

$$|\langle x_0 - u, h\rangle| = |\langle x_0, h\rangle| = d,$$

joten

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|z\| \leq 1 \\ z \in Y}} |\langle z, h\rangle| \geq |\langle \frac{x_0 - u}{\|x_0 - u\|}, h\rangle| = \frac{d}{\|x_0 - u\|} > \frac{d}{d + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon},$$

joten $\|h\| \geq 1$. Nyt voimme soveltaa Seurausta 8.6, josta seuraa että on olemassa $l \in X^*$, jolle $\langle x, l\rangle = \langle x, h\rangle$ kaikille $x \in Y$ ja $\|l\| = \|h\|$. Tällöin siis $l(M) = \{0\}$, $\langle x_0, l\rangle = \langle x_0, h\rangle = d$ ja $\|l\| = 1$. □

Seuraus 8.8. Olkoon X normiavaruus ja $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Tällöin on olemassa $l \in X^*$ siten, että $\langle x_0, l\rangle = \|x_0\|$ ja $\|l\| = 1$.

Todistus. Olkoon $M = \{0\}$, jolloin $\|x_0\| = \|x_0 - 0\| := d > 0$ ja väite seuraa Lauseesta 8.7. □

Seuraus 8.9. Olkoon X normiavaruus ja $x \in X$. Tällöin

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, l\rangle| : l \in X^*,\ \|l\| \leq 1\}.$$

Todistus. Jos $l \in X^*$ ja $\|l\| \leq 1$, niin

$$|\langle x, l\rangle| \leq \|x\|\|l\| \leq \|x\|,$$

joten

$$\sup_{\substack{\|l\| \leq 1 \\ l \in X^*}} |\langle x, l\rangle| \leq \|x\|.$$

Jos $x = 0$, niin

$$\|x\| = 0 = \sup_{\substack{\|l\| \leq 1 \\ l \in X^*}} |\langle x, l\rangle|,$$

joten voimme olettaa, että $x \neq 0$. Seurauksen 8.8 nojalla on olemassa $l \in X^*$ siten, että $|\langle x, l\rangle| = \|x\|$ ja $\|l\| = 1$, joten

$$\|x\| \leq \sup_{\substack{\|l\| \leq 1 \\ l \in X^*}} |\langle x, l\rangle|.$$

□

Seuraus 8.10. Jos X on normiavaruus ja $x \in X$ on sellainen, että $\langle x, l \rangle = 0$ kaikilla $l \in X^*$, niin $x = 0$.

Todistus. Edellisen seurauksen nojalla

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|l\| \leq 1 \\ l \in X^*}} |\langle x, l \rangle| = 0,$$

joten $x = 0$. □

Esimerkki. On olemassa sellainen jatkuva lineaarinen $l : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, että $\|l\| = 1$ ja $l(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ kaikilla $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in c$, missä

$$c = \{x = (x_k)_{k=1}^\infty : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ on olemassa } \}$$

on suppenevien jonojen avaruus varustettuna sup-normilla.

Olkoon $h(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$ kun $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in c$. Selvästi $h : c \to \mathbb{R}$ on lineaarinen. Lisäksi

$$|h(x)| = |\lim_{k\to\infty} x_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|$$

kaikilla $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in c$, joten h on jatkuva ja $\|h\| \leq 1$. Lisäksi $|h(1, 1, 1, \ldots)| = 1$, joten $\|h\| = 1$. Hahn-Banachin Lauseen nojalla on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali $l : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ siten, että $\|l\| = \|h\| = 1$ ja $l(x) = h(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$, kun $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in c$.

Luku 9

Operaattorin transpoosi ja adjungaatti

Olkoot X ja Y normiavaruuksia, joilla on skalaarikunta $\mathbb{K}$.

Olkoon $T \in L(X, Y)$, eli T on jatkuva lineaarinen operaattori. Jos $l \in Y^*$, niin yhdistetty kuvaus $l \circ T : X \to \mathbb{K}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, eli $l \circ T \in X^*$. Merkitään

$$T'l := l \circ T.$$

Nyt siis

$$T'l(x) = (l \circ T)(x) = l(Tx), \text{ eli } \langle x, T'l \rangle = \langle Tx, l \rangle$$

kun $x \in X$ ja $l \in Y^*$. Diagrammina saamme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T'l"'] & & Y \arrow[dl, "l"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Pitäen vektoria $l \in Y^*$ muuttujana toteamme, että ehto $l \mapsto T'l$ määrittelee kuvauksen $T' : Y^* \to X^*$.

Määritelmä 9.1. Edellä konstruoitua kuvausta $T' : Y^* \to X^*$ sanotaan operaattorin T *transpoosiksi*.

Lause 9.2. Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $T \in L(X, Y)$. Tällöin transpoosi $T' \in L(Y^*, X^*)$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja $\|T'\| = \|T\|$.

Todistus. T on lineaarinen: Olkoon $l, u \in Y^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sekä $x \in X$. Tällöin

$$\begin{aligned} \langle x, T'(\alpha l + \beta u) > &=< Tx, \alpha l + \beta u \rangle \\ &= \alpha \langle Tx, l \rangle + \beta \langle Tx, u \rangle \\ &= \alpha \langle x, T'l \rangle + \beta \langle x, T'u \rangle \\ &= \langle x, \alpha T'l + \beta T'u \rangle, \end{aligned}$$

joten $T'(\alpha l + \beta u) = \alpha T'l + \beta T'u$.

T on jatkuva: Olkoot $l \in Y^*$ ja $x \in X$. Tällöin

$$|\langle x, T'l\rangle| = |\langle Tx, l\rangle| \leq \|l\|\|Tx\| \leq \|l\|\|T\|\|x\|,$$

joten

$$\|T'l\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} |\langle x, T'l\rangle| \leq \|T\|\|l\|$$

kun $l \in Y^*$. Näin ollen $T' : Y^* \to X^*$ on jatkuva lineaarinen operaattori. Tästä seuraa, että

$$\|T'\| = \sup_{\substack{\|l\|\leq 1\\ l\in Y^*}} \|T'l\| \leq \|T\|.$$

Toisaalta, Seurauksen 8.9 mukaan

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \sup_{\substack{\|l\|\leq 1\\ l\in Y^*}} |\langle Tx, l\rangle| \\
&= \sup_{\substack{\|l\|\leq 1\\ l\in Y^*}} |\langle x, T'l\rangle| \\
&\leq \sup_{\substack{\|l\|\leq 1\\ l\in Y^*}} \|T'l\|\|x\| \\
&= \|T'\|\|x\|
\end{aligned}$$

jokaiselle $x \in X$. Näin ollen $\|T\| \leq \|T'\|$, ja siten $\|T\| = \|T'\|$. □

Tarkastelemme nyt Hilbertin avaruuden H rajoitettua operaattoria $T \in L(H)$. Jos $y \in H$ on kiinnitetty vektori, niin kuvaus $x \mapsto (Tx \mid y)$, missä $(\cdot \mid \cdot)$ on avaruuden H sisätulo, määrittelee duaalin H^* alkion. Frechet-Rieszin Lauseen nojalla on siis olemassa yksikäsitteinen $z \in H$, jolle

$$(Tx \mid y) = (x \mid z) \text{ kaikilla } x \in H.$$

Määrittelemme nyt kuvauksen $T^* : H \to H$, jota nimitämme operaattorin T *adjungaatiksi*, asettamalla $T^*y = z$, eli

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^*y) \text{ kaikilla } x, y \in H.$$

Jos nyt korvataan y lineaarikombinaatiolla $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, saadaan kaikille $x \in H$, että

$$\begin{aligned}
(x \mid T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Tx \mid \alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2) \\
&= \overline{\alpha_1}(Tx \mid y_1) + \overline{\alpha_2}(Tx \mid y_2) \\
&= \overline{\alpha_1}(x \mid T^*y_1) + \overline{\alpha_2}(x \mid T^*y_2) \\
&= (x \mid \alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2).
\end{aligned}$$

Siis $T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2$, joten T^* on lineaarinen. Käyttämällä tuttua kaavaa

$$\|y\| = \|(\cdot \mid y)\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} |(x \mid y)|$$

saamme edelleen

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} \|T^* x\| &= \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in H}} |(y \mid T^* x)| \\
&= \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in H}} \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} |(x \mid Ty)| \\
&= \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in H}} \|Ty\| \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että T^* on rajoitettu operaattori, eli $T^* \in L(H)$, ja

$$\|T^*\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in H}} \|T^* x\| = \|T\|.$$

Olemme todistaneet:

Lause 9.3. Jos H on Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$, niin $T^* \in L(H)$ ja $\|T^*\| = \|T\|$.

Jos $T, S \in L(H)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin nähdään helposti, että

$$(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*.$$

Siis kuvaus $T \mapsto T^*$ on konjugaattilineaarinen isometrinen kuvaus $L(H) \to L(H)$.

Edelleen, kaikille $x, y \in H$ pätee

$$\begin{aligned}
((TS)^* x \mid y) &= \overline{(y \mid (TS)^* x)} \\
&= \overline{(TSy \mid x)} = \overline{(Sy \mid T^* x)} \\
&= \overline{(y \mid S^* T^* x)} \\
&= (S^* T^* x \mid y),
\end{aligned}$$

joten saamme

$$(TS)^* = S^* T^*.$$

Jos merkitsemme $(T^*)^* := T^{**}$, niin kaikille $x, y \in H$ pätee

$$(T^{**} x \mid y) = \overline{(y \mid T^{**} x)} = \overline{(T^* y \mid x)} = (x \mid T^* y) = (Tx \mid y).$$

Tästä seuraa, että

$$T^{**} = T.$$

On helppo todeta, että

$$I^* = I \text{ ja } 0^* = 0.$$

Lause 9.4. Hilbertin avaruuden H operaattori T on kääntyvä avaruudessa $L(H)$ jos ja vain jos T^* on kääntyvä avaruudessa $L(H)$. Tällöin $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Todistus. Jos operaattorilla T on rajoitettu inverssi T^{-1}, niin $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, joten $(T^{-1})^*T^* = (TT^{-1})^* = I^* = I$ ja $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = I$. Tämä osoittaa, että operaattorilla T^* on rajoitettu inverssi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Kääntäen, jos operaattorilla T^* on rajoitettu inverssi, on sellainen myös operaattorilla $T = (T^*)^*$. □

Sanomme, että operaattori $T \in L(H)$ on *itseadjungoitu*, jos $T^* = T$; unitaari, jos $TT^* = T^*T = I$, ts. $T^* = T^{-1}$; *normaali*, jos $TT^* = T^*T$.

Jos $T \in L(H)$ on unitaari, niin kaikille $x, y \in H$ pätee

$$(Tx \mid Ty) = (T^*Tx \mid y) = (x \mid y).$$

Erityisesti $(Tx \mid Tx) = (x \mid x)$, eli $\|Tx\| = \|x\|$ kaikilla $x \in H$. Täten $\|T\| = 1$. Kaikki itseadjungoidut ja unitaarit operaattorit ovat normaaleja.

Edelleen, jokainen operaattori $T \in L(H)$ voidaan esittää muodossa

$$T = T_1 + iT_2,$$

missä

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ ja } T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

ovat itseadjungoituja. On helppo todeta, että T on normaali jos ja vain jos T_1 ja T_2 kommutoivat, eli $T_1T_2 = T_2T_1$.

Adjungaatin ja transpoosin yhteys

Olkoot H_1 ja H_2 Hilbertin avaruuksia ja $T \in L(H_1, H_2)$. Tällöin

$$T' : H_2^* \to H_1^*$$

on määritelty kaavalla

$$T'(l) = u \text{ ja } l(Tx) = u(x),$$

missä $l \in H_2^*$, $u \in H_1^*$ ja $x \in H_1$.

Saamme nyt Frechet-Rieszin Lauseen nojalla, että

$$u(x) = (x \mid x_0),\ x_0 \in H_1,$$
$$l(y) = (y \mid y_0),\ y_0 \in H_2,$$

missä x_0 ja y_0 ovat yksikäsitteisesti määriteltyjä. Näin ollen voimme määritellä seuraavat operaattorit:

$$\begin{aligned} A_1 :& H_1^* \to H_1 \\ & u \mapsto x_0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} A_2 :& H_2^* \to H_2 \\ & l \mapsto y_0. \end{aligned}$$

Olemme aikaisemmin todistaneet, että A_1 on isometrinen konjugaattilineaarinen bijektio, kuten on myös A_2.

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, bend left, "T"] & H_2 \arrow[l, bend left, "S"] \\ H_1^* \arrow[u, "A_1"] & H_2^* \arrow[u, "A_2"'] \arrow[l, "T'"'] \end{tikzcd}$$

Yhdistetty operaattori

$$S := A_1 T' A_2^{-1} : H_2 \to H_1 \text{ toteuttaa } Sy_0 = x_0.$$

Tässä S on lineaarinen, koska se sisältää kaksi konjugaattilineaarista kuvausta sekä lineaarisen kuvauksen T'. Edelleen,

$$(Tx \mid y_0) = l(Tx) = u(x) = (x \mid x_0) = (x \mid Sy_0)$$

kaikilla $x \in H_1$ ja $y_0 \in H_2$.

Oletetaan nyt, että $H_1 = H_2 = H$ ja $T \in L(H)$. Tällöin saadaan

$$T^* = AT'A^{-1}$$

ja

$$\|T^*\| = \|AT'A^{-1}\| = \|T'\| = \|T\|$$

koska $A = A_1 = A_2$ on isometrinen.

Huomaa erot operaattoreiden T^* ja T' välillä:

$$(\alpha T)' = \alpha T' \text{ mutta } (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$$

sekä tietysti $T^* : H \to H$ ja $T' : H^* \to H^*$.

Esimerkki. a) Olkoon $f \in C[0,1]$. Määritellään $M_f \in L(L^2[0,1])$ kaavalla

$$(M_f g)(t) = f(t)g(t).$$

Tällöin $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

Todistus. Olkoot $g, h \in L^2[0,1]$ ja $k = (M_f)^* h$. Tällöin

$$(M_f g \mid h) = (g \mid k),$$

eli

$$\int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 g(t)\overline{k(t)}dt.$$

Tämä pätee, kun $f(t)\overline{h(t)} = \overline{k(t)}$, eli $k(t) = \overline{f(t)}h(t)$. Täten $(M_f)^* h = k = \overline{f}h$, joten $M_f^* = M_{\overline{f}}$. □

b) Jatkuva lineaarikuvaus $T : X \to Y$ on *äärellisasteinen*, jos on olemassa sellaiset funktionaalit $l_1, \ldots, l_n \in X^*$ ja vektorit $y_1, \ldots y_n \in Y$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, että

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x, l_k \rangle y_k$$

kun $x \in X$. Määrätään tällaisen kuvauksen T transpoosi T': Jos $u \in Y^*$ ja $x \in X$, niin

$$\begin{aligned}
\langle Tx, u \rangle &= < \sum_{k=1}^{n} \langle x, l_k \rangle y_k, u > \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x, l_k \rangle \langle y_k, u \rangle \\
&= \langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, u \rangle l_k \rangle \\
&= \langle x, T'u \rangle.
\end{aligned}$$

Koska tämä on voimassa kaikilla $x \in X$, niin

$$T'u = \sum_{k=1}^{n} \langle y_k, u \rangle l_k.$$

Siispä transpoosi $T' : Y^* \to X^*$ on myös äärellisulotteinen.

Refleksiiviset normiavaruudet

Olkoon X normiavaruus ja X^* sen duaali. Edelleen olkoon $(X^*)^* := X^{**}$ normiavaruuden X *biduaali*.

Jos $x \in X$, voimme määritellä *upotuskuvauksen*

$$i_X : X \to X^{**},\ x \mapsto i_X(x),$$

missä $i_X(x)l = l(x)$, kun $l \in X^*$.

Kuvaus $i_X(x)$ on lineaarinen funktionaali. Se on myöskin jatkuva, koska

$$|i_X(x)l| = |l(x)| \leq \|l\|\|x\| \text{ kaikilla } l \in X^*.$$

Siten $i_X(x) \in X^{**}$ kaikilla $x \in X$. Kuvaus i_X on myöskin lineaarinen. Seurauksen 8.9 nojalla saadaan

$$\|i_X(x)\| = \sup_{\substack{\|l\|\leq 1 \\ l\in X^*}} \|i_X(x)l\| = \sup_{\substack{\|l\|\leq 1 \\ l\in X^*}} |\langle x, l\rangle| = \|x\| \text{ kaikilla } x \in X.$$

Näin ollen olemme todistaneet:

Lause 9.5. Olkoon X normiavaruus. Upotuskuvaus $i_X : X \to X^{**}$, $x \mapsto i_X(x)$, on isometrinen lineaarikuvaus.

Huomautus Tämän vuoksi on tapana samaistaa avaruudet X ja $i_X(X)$ ja siis tulkita X biduaalinsa aliavaruudeksi, eli $X \subseteq X^{**}$.

Määritelmä 9.6. Olkoon X normiavaruus. Jos upotuskuvaus $i_X : X \to X^{**}$ on surjektio (eli bijektio), niin X on *refleksiivinen*.

Refleksiivisyys merkitsee sitä, että $X = X^{**}$. Erityisesti refleksiivinen avaruus on täydellinen.

Huomautus Normiavaruus X on refleksiivinen jos ja vain jos jokaisella $u \in X^{**}$ on olemassa $x \in X$ siten, että $u(l) = l(x)$ kaikilla $l \in X^*$.

Lause 9.7. a) Refleksiivisen avaruuden suljettu aliavaruus on refleksiivinen.

b) Banachin avaruus X on refleksiivinen jos ja vain jos X^* on refleksiivinen.

Todistus. a) Olkoon X refleksiivinen ja olkoon $M \subseteq X$ suljettu aliavaruus. Tiedetään, että upotuskuvaus $i_X : X \to X^{**}$ on surjektio. Pitää siis todistaa, että $i_M : M \to M^{**}$ on surjektio.

Tarkastelemme inkluusiokuvausta $j : M \to X$, sen transpoosia $j' : X^* \to M^*$, ja vielä tämän transpoosia $j'' : M^{**} \to X^{**}$. Kuvaukset muodostavat diagrammin

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "j"'] & M^{**} \arrow[d, "j''"] \\ X \arrow[r, "i_X"'] & X^{**} \end{tikzcd}$$

Huomataan, että kaikilla $l \in X^*$ yhdistetty kuvaus $l \circ j$ on kuvauksen l rajoittuma aliavaruuteen M. Näin ollen

$$\langle l, j''(u)\rangle = \langle l, u \circ j'\rangle = \langle j'(l), u\rangle = \langle l \circ j, u\rangle = \langle l|_M, u\rangle$$

jokaiselle $u \in M^{**}$, joten j^{**} on kuvaus $M^{**} \to X^{**} : u \mapsto \lfloor l \mapsto u(l|_M) \rfloor$. Olkoon $u \in M^{**}$. Koska X on refleksiivinen, on olemassa $x \in X$ siten, että

$$l(x) = j''(u)l = u(l|_M) \text{ kaikilla } l \in X^*.$$

Jos $x \notin M = \overline{M}$, niin Lauseen 8.7 (katso Lause 2.26) nojalla on olemassa $l \in X^*$ siten, että

$$l|_M = 0 \text{ ja } l(x) = 1.$$

Tällöin olisi $1 = l(x) = u(l|_M) = 0$. Täytyy siis olla $x \in M$. Alkiolle x pätee

$$i_M(x) = u, \text{ eli } \langle v, i_M(x) \rangle = \langle v, u \rangle \text{ kaikilla } v \in M^*,$$

joten i_M on surjektio. Nimittäin, jos $v \in M^*$, niin Hahn-Banachin Lauseen nojalla on olemassa $l \in X^*$ siten, että $l|_M = v$. Täten

$$u(v) = u(l|_M) = l(x) = v(x).$$

b) Jos X on refleksiivinen, niin $X = X^{**}$ ja $X^* = (X^{**})^* = ((X^*)^*)^* = (X^*)^{**}$. Jos X on Banachin avaruus ja X^* on refleksiivinen, niin myöskin X^{**} on refleksiivinen. Koska $X = i_X(X)$ on avaruuden X^{**} suljettu aliavaruus, saadaan a)-kohdan nojalla että X on refleksiivinen. □

Huomautuksia a) Refleksiivisyyden määritelmässä kanonisen upotuksen i_X rooli on keskeinen: on nimittäin olemassa ei-refleksiivinen Banachin avaruus X jolle X ja X^{**} ovat lineaarisesti isomorfisia (eli on olemassa lineaarinen isomorfismi $\alpha : X \to X^{**}$).

b) Esimerkiksi kaikki Hilbertin avaruuden ja kaikki äärellisulotteuiset normiavaruudet ovat refleksiivisiä.

c) Jos $1 < p < \infty$, niin ℓ^p on refleksiivinen: $(\ell^p)^* = \ell^q$, missä $1/p + 1/q = 1$, ja

$$\langle x, l \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

kun $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$, $l = (l_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^q$. Siis $i_{\ell^p} : \ell^p \to (\ell^p)^{**} = \ell^p$ on identtinen kuvaus.

d) Sen sijaan esimerkiksi avaruus c_0 ei ole refleksiivinen.

Lemma 9.8. Olkoon $T \in L(X, Y)$, missä X ja Y ovat normiavaruuksia. Tällöin

$$T'' \circ i_X = i_Y \circ T.$$

Todistus. Kaikilla $x \in X$ ja $l \in Y^*$ pätee

$$T''(i_X(x))l = (i_X(x) \circ T')l = i_X(x)(l \circ T) = l(T(x)) = i_Y(T(x))l,$$

joten diagrammi

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X^{**} \arrow[r, "T''"'] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

kommutoi. $\square$

Luku 10

Kompaktit operaattorit ja niiden spektri

Spektri

Olkoon X Banachin avaruus. Luku $\lambda \in \mathbb{K}$ on jatkuvan operaattorin $T \in L(X)$ *spektraaliarvo* jos $\lambda I - T$ ei ole kääntyvä avaruudessa $L(X)$, ts. operaattorilla $\lambda I - T : X \to X$ ei ole jatkuvaa käänteiskuvausta. Operaattorin $T \in L(X)$ spektraaliarvojen muodostama joukko on operaattorin T *spektri* ja sitä merkitään $\sigma(T)$. Edelleen, käytämme merkintää

$$\mathrm{Inv}L(X) = \{T \in L(X) : T \text{ on kääntyvä avaruudessa } L(X)\},$$

ja näin ollen

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \notin \mathrm{Inv}L(X)\}.$$

Luvut $\lambda \in \mathbb{K}$, joille $\lambda I - T$ on kääntyvä, ovat operaattorin T *säännöllisiä* arvoja. Niiden muodostamaa joukkoa kutsutaan operaattorin T *resolventtijoukoksi* ja merkitään $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$.

Avoimen kuvauksen lauseen perusteella $\lambda I - T$ on kääntyvä jos ja vain jos se on bijektio, joten

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda I - T \text{ ei ole injektio tai ei ole surjektio.}$$

Operaattori $\lambda I - T$ ei ole injektio, jos ja vain jos on olemassa $x \neq 0$ siten, että $(\lambda I - T)x = 0$, ts. $Tx = \lambda x$. Tällaisia vektoreita x kutsutaan operaattorin $T \in L(X)$ *ominaisvektoreiksi* ja vastaavia lukuja λ operaattorin $T \in L(X)$ *ominaisarvoiksi*.

Esimerkki. a) Jos $\dim X < \infty$, niin $\lambda I - T : X \to X$ on bijektio jos ja vain jos $\lambda I - T$ on injektio. Täten $\lambda \in \sigma(T)$ jos ja vain jos λ on operaattorin T ominaisarvo.

b) Jos $X = \mathbb{R}^2$ ja $T = T_A$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

niin $\sigma(T) = \emptyset$.

c) Olkoon $\varphi \in C[0,1]$ ja olkoon $M_\varphi : C[0,1] \to C[0,1]$ määritelty $f \mapsto \varphi f$. Tällöin

$$\|M_\varphi\| = \sup_{\substack{\|f\|_\infty \leq 1 \\ f \in C[0,1]}} \|\varphi f\|_\infty = \|\varphi\|_\infty,$$

joten M_φ on jatkuva. Olkoon $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \varphi([0,1])$. Tällöin

$$\psi(t) := \frac{1}{\lambda - \varphi(t)}, \; t \in [0,1],$$

on hyvin määritelty jatkuva funktio välillä $[0,1]$, joten $\psi \in C[0,1]$. Edelleen,

$$M_\psi(\lambda I - M_\varphi)f = (\lambda M_\psi - \frac{\varphi}{\lambda - \varphi})f = \frac{\lambda - \varphi}{\lambda - \varphi} f = f,$$

kun $f \in C[0,1]$, joten $M_\psi = (\lambda I - M_\varphi)^{-1}$ ja $\lambda \notin \sigma(M_\varphi)$. Täten

$$\sigma(M_\varphi) \subseteq \varphi([0,1]).$$

Kääntäen, oletetaan, että $\lambda \in \varphi([0,1])$, mutta $\lambda \notin \sigma(M_\varphi)$. Olkoon $f_0(t) \equiv 1$ ja $\psi := (\lambda I - M_\varphi)f_0$. Tällöin

$$(\lambda - \varphi)\psi = (\lambda I - M_\varphi)\psi = f_0 \equiv 1.$$

Tämä on ristiriita, koska $\lambda \in \varphi([0,1])$. Siis

$$\sigma(M_\varphi) = \varphi([0,1]).$$

Seuraava lause ei päde reaalisille Banachin avaruuksille, ei edes äärellisulotteisille. Esimerkiksi tason kierrolla ei välttämättä ole lainkaan ominaisarvoja. Katso esimerkki (b).

Lause 10.1. Olkoon $X \neq \{0\}$ kompleksinen Banachin avaruus. Jatkuvan operaattorin $T \in L(X)$ spektri on epätyhjä ja kompakti kompleksitason osajoukko.

Todistusta varten tarvitsemme aputuloksia.

Lemma 10.2. Olkoot X Banachin avaruus ja $T \in L(X)$. Tällöin

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Todistus. Olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$ sellainen, että $|\lambda| > \|T\|$. Tällöin

$$\|I - (I - \frac{1}{\lambda}T)\| = \|\frac{1}{\lambda}T\| < 1,$$

joten Lauseen 5.8 nojalla

$$\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda}) \in \mathrm{Inv}L(X).$$

Siis $\lambda \in \rho(T)$, eli jos $\lambda \in \sigma(T)$, niin $|\lambda| \leq \|T\|$. □

Lemma 10.3. Olkoon X Banachin avaruus. Tällöin $\mathrm{Inv}L(X)$ on avaruuden $L(X)$ avoin osajoukko.

Todistus. Olkoot $T \in \mathrm{Inv}L(X)$ ja $S \in L(X)$ sellaisia, että

$$\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Tällöin $\|I - T^{-1}S\| = \|T^{-1}(T - S)\| < 1$, joten $T^{-1}S \in \mathrm{Inv}L(X)$, taas Lauseen 5.8 nojalla. Täten $S = TT^{-1}S \in \mathrm{Inv}L(X)$. □

Lemma 10.4. Olkoot X Banachin avaruus ja $T \in L(X)$. Tällöin $\sigma(T)$ on avaruuden $\mathbb{K}$ suljettu osajoukko.

Todistus. Olkoon $\lambda \in \rho(T)$, ts. $\lambda I - T \in \mathrm{Inv}L(X)$. Lemman 10.3 nojalla on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $S \in \mathrm{Inv}L(X)$ aina, kun $\|\lambda I - T - S\| < \varepsilon$. Olkoon nyt $\mu \in \mathbb{K}$ sellainen, että $|\lambda - \mu| < \varepsilon$. Tällöin

$$\|(\lambda I - T) - (\mu I - T)\| = |\lambda - \mu| < \varepsilon,$$

joten $\mu I - T \in \mathrm{Inv}L(X)$ ja $\mu \in \rho(T)$. Täten $\rho(T)$ on avaruuden $\mathbb{K}$ avoin osajoukko, mistä seuraa, että $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ on suljettu. □

Lemma 10.5. Olkoot X Banachin avaruus ja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ jono avaruudessa $\mathrm{Inv}L(X)$ joka suppenee kohti operaattoria $T \in \mathrm{Inv}L(X)$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} T_n^{-1} = T^{-1}$ Banachin avaruudessa $L(X)$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n^{-1}\| < \infty$. Koska $T_nT^{-1} \to I$ avaruudessa $L(X)$ kun $n \to \infty$, niin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|I - T_nT^{-1}\| < 1/2 \text{ kun } n \geq N.$$

Lauseen 5.8 mukaan

$$(T_nT^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I - T_nT^{-1})^k \text{ kun } n \geq N,$$

joten

$$\|TT_n^{-1}\| = \|(T_nT^{-1})^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|I - T_nT^{-1}\|^k \leq 2$$

kaikille $n \geq N$. Näin ollen

$$\|T_n^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|\|TT_n^{-1}\| \leq 2\|T^{-1}\| \text{ kun } n \geq N.$$

Koska

$$\|T_n^{-1} - T^{-1}\| = \|T_n^{-1}(T - T_n)T^{-1}\| \leq \|T_n^{-1}\|\|T - T_n\|\|T^{-1}\|$$

kaikille $n \geq N$, saadaan, että $\lim_{n\to\infty} T_n = T^{-1}$ avaruudessa $L(X)$. □

Lauseen 10.1 *todistus*: Lemmojen 10.2 ja 10.4 nojalla on selvä, että $\sigma(T)$ on kompakti (avaruuden X *ei* tarvitse olla kompleksinen). Spektrin osoittaminen epätyhjäksi on todistuksen hankalin osa.

Tehdään antiteesi: $\sigma(T) = \emptyset$, eli $\lambda I - T \in \mathrm{Inv}L(X)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{C}$.

Olkoon $l \in L(X)^*$ ja määritellään

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto l((\lambda I - T)^{-1}).$$

Olkoon $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h} &= \frac{1}{h} l((\lambda I + hI - T)^{-1} - (\lambda I - T)^{-1}) \\ &= \frac{1}{h} l((\lambda I + hI - T)^{-1} \underbrace{[(\lambda I - T) - (\lambda I + hI - T)]}_{-hI}(\lambda I - T)^{-1}) \\ &= -l((\lambda I + hI - T)^{-1}(\lambda I - T)^{-1}).\end{aligned}$$

Lemman 10.5 nojalla $(\lambda I + hI - T)^{-1} \to (\lambda I - T)^{-1}$ avaruudessa $L(X)$ kun $h \to 0$. Näin ollen

$$\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h} \to -l((\lambda I - T)^{-2}) \text{ kun } h \to 0.$$

Kuvaus f on siis koko kompleksitasossa määritelty analyyttinen funktio. Koska $I - \lambda^{-1}T \to I$ avaruudessa $L(X)$ kun $|\lambda| \to \infty$, saadaan Lemman 10.5 nojalla, että $(I - \lambda^{-1}T)^{-1} \to I$ avaruudessa $L(X)$ kun $|\lambda| \to \infty$. Täten

$$f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} l((I - \lambda^{-1}T)^{-1}) \to 0 \text{ kun } |\lambda| \to \infty. \qquad (*)$$

Koska f on myös jatkuva, seuraa tästä, että f on rajoitettu. Kompleksianalyysistä tunnetun Liouvillen Lauseen nojalla koko kompleksitasossa määritelty rajoitettu analyyttinen funktio on vakio. Tämä tarkoittaa $(*)$ nojalla, että $f \equiv 0$. Erityisesti

$$0 = f(0) = l(T^{-1}).$$

Koska $l \in L(X)^*$ oli mielivaltainen, saamme Seurauksen 8.10 mukaan, että $T^{-1} = \theta$, mikä on mahdotonta. Siis operaattorin T spektri ei voi olla tyhjä. □

Enempää ei voi yleisesti sanoa jatkuvan lineaarisen operaattorin spektristä.

Hilbertin avaruuden lineaariset operaattorit

Lause 10.6. Olkoot H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$. Tällöin T on itseadjungoitu jos ja vain jos $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in H$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $T^* = T$. Tällöin

$$(Tx \mid x) = (x \mid Tx) = \overline{(Tx \mid x)} \text{ kaikilla } x \in H.$$

Näin ollen $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in H$.

Oletetaan sitten, että $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in H$. Olkoot $x, y \in H$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$(T(\lambda x + y) \mid \lambda x + y) = (Tx \mid x) + \overline{\lambda}(Tx \mid y) + \lambda(Ty \mid x) + |\lambda|^2(Ty \mid y)$$

on reaalinen. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\lambda(Ty \mid x) + \overline{\lambda}(Tx \mid y) &= \overline{\lambda}(x \mid Ty) + \lambda(y \mid Tx)\\ &= \overline{\lambda}(T^*x \mid y) + \lambda(T^*y \mid x).\end{aligned}$$

Kun $\lambda = 1$ ja $\lambda = i$, saadaan

$$(Ty \mid x) + (Tx \mid y) = (T^*x \mid y) + (T^*y \mid x)$$

ja

$$i(Ty \mid x) - i(Tx \mid y) = -i(T^*x \mid y) + i(T^*y \mid x).$$

Edelleen, tästä seuraa

$$\begin{cases}(Ty \mid x) + (Tx \mid y) = (T^*x \mid y) + (T^*y \mid x),\\ (Ty \mid x) - (Tx \mid y) = -(T^*x \mid y) + (T^*y \mid x),\end{cases}$$

joten $2(Ty \mid x) = 2(T^*y \mid x)$ kaikilla $x, y \in H$. Näin ollen $((T - T^*)y \mid x) = 0$ kaikilla $x, y \in H$, joten $T = T^*$. □

Lause 10.7. Olkoon H Hilbertin avaruus ja olkoon $T \in L(H)$ itseadjungoitu. Tällöin

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\| \le 1\\ x \in H}} |(Tx \mid x)|.$$

Todistus. Olkoon

$$M := \sup_{\substack{\|x\| \le 1\\ x \in H}} |(Tx \mid x)|.$$

Selvästi $M \le \|T\|$. Olkoot $x, y \in H$ siten, että $\|x\| \le 1$ ja $\|y\| \le 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}(T(x \pm y) \mid x \pm y) &= (Tx \mid x) \pm (Tx \mid y) \pm (Ty \mid x) + (Ty \mid y)\\ &= (Tx \mid x) \pm (Tx \mid y) \pm (y \mid T^*x) + (Ty \mid y)\\ &= (Tx \mid x) \pm 2\mathrm{Re}(Tx \mid y) + (Ty \mid y)\end{aligned}$$

joten

$$(T(x + y) \mid x + y) - (T(x - y) \mid x - y) = 4\mathrm{Re}(Tx \mid y).$$

Edelleen,

$$4\mathrm{Re}(Tx \mid y) \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4M$$

Olkoon $\lambda \in \mathbb{K}$ siten, että $|\lambda| = 1$ ja $(Tx \mid y) = \lambda|(Tx \mid y)|$. Korvataan vektori x vektorilla $\overline{\lambda}x$ yllä olevassa epäyhtälössä, jolloin saadaan

$$|(Tx \mid y)| = \overline{\lambda}(Tx \mid y) = (T(\overline{\lambda}x) \mid y) \leq M.$$

Jokaiselle $x \in H$, jolle $\|x\| \leq 1$, saadaan nyt Fréchet-Rieszin Lauseen nojalla, että

$$\|Tx\| = \sup_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in H}} |(Tx \mid y)| \leq M.$$

Täten $\|T\| \leq M$. □

Seuraus 10.8. Oletetaan, että H on kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$. Jos $(Tx \mid x) = 0$ kaikilla $x \in H$, niin $T = \theta$.

Todistus. Koska $(Tx \mid x) = 0 \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in H$, niin T on itseadjungoitu Lauseen 10.6 nojalla. Lauseen 10.7 nojalla $\|T\| = 0$, eli $T = \theta$. □

Kompaktit operaattorit

Määritelmä 10.9. Olkoon X Banachin avaruus,. Operaattori $T \in L(X)$ on *kompakti*, jos jokaisen rajoitetun jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ kuvajonolla $(Tx_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ on suppeneva osajono.

Lauseen 1.21 mukaan operaattorin $T \in L(X)$ kompaktiudelle yhtäpitäviä ehtoja ovat lisäksi:

(1) Yksikköpallon $B_X = \overline{B}(0,1)$ kuva $T(B_X)$ on relatiivikompakti, ts. $\overline{T(B_X)} \subseteq X$ on kompakti.

(2) Yksikköpallon B_X kuva $T(B_X)$ on prekompakti, ts. jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa äärellinen joukko $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq T(B_X)$ siten, että

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon).$$

Huomautus Jos $T \in L(X)$ on kompakti, niin $T(X)$ ja $\overline{T(X)}$ ovat separoituvia.

Todistus. Jos $r \in \mathbb{N}$, niin $\overline{T(\overline{B}(0,r))} \subseteq X$ on kompakti. Tällöin Lauseen 1.20 nojalla $\overline{T(\overline{B}(0,r))}$ on separoituva. Koska $T(X) = \cup_{r=1}^{\infty} T(\overline{B}(0,r))$ on numeroituva yhdiste separoituvia joukkoja ja $T(\overline{B}(0,r)) \subseteq \overline{T(\overline{B}(0,r))}$, seuraa, että $T(X)$ ja $\overline{T(X)}$ ovat separoituvia. □

Esimerkki. 1. Operaattori on äärellisasteinen jos kuvajoukko $T(X)$ on äärellisulotteinen. Selvästi jokainen äärellisasteinen operaattori on kompakti.

2. Olkoon H Hilbertin avaruus siten, että $\dim H = \infty$. Tällöin $I \in L(H)$ ei ole kompakti. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ ortonormaali jono. Tällöin kaikille $m \neq n$,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 - (x_n \mid x_m) - (x_m \mid x_n) + \|x_m\|^2 = 2$$

joten $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ kun $m \neq n$. Täten jonolla $(Ix_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole Cauchyn osajonoa, eikä siten suppenevaa osajonoa.

Lause 10.10. Olkoon X Banachin avaruus.

(a) Jos $T, S \in L(X)$ ovat kompakteja, niin summa $T + S$ on kompakti.

(b) Jos edes toinen operaattoreista $T, S \in L(X)$ on kompakti, niin TS on kompakti

(c) Kompaktit operaattorit muodostavat avaruuden $L(X)$ suljetun osajoukon operaattorinormin suhteen.

Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi viimeistä kohtaa lukuunottamatta.

Todistus. (c) Olkoon $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L(X)$ jono kompakteja operaattoreita siten, että $\|T_n - T\| \to 0$ kun $n \to \infty$ jollekin $T \in L(X)$. Olkoon $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ rajoitettu jono avaruudessa X, eli on olemassa $M > 0$ siten, että $\|x_j\| \leq M$ kaikille $j \in \mathbb{N}$. Koska T_1 on kompakti, jonolla $(T_1 x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ on suppeneva osajono. Merkitään kyseistä jonon $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ osajonoa $(x_{1,j})_{j=1}^{\infty}$. Koska T_2 on kompakti, jonolla $(T_2 x_{1,j})_{j=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono. Merkitään tätä osajonoa $(x_{2,j})_{j=1}^{\infty}$. Näin jatkamalla saadaan jokaiselle $m \in \mathbb{N}$ jono $(x_{m,j})_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ siten, että jono $(T_m x_{m,j})_{j=1}^{\infty}$ suppenee. Asetetaan $y_j := x_{j,j}$ kun $j \in \mathbb{N}$. Tällöin jono $(T_m y_j)_{j=1}^{\infty}$ suppenee kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\|Ty_j - Ty_k\| &\leq \|Ty_j - T_m y_j\| + \|T_m y_j - T_m y_k\| + \|T_m y_k - Ty_k| \\
&\leq \|T - T_m\| \|y_j\| + \|T_m y_j - T_m y_k\| + \|T_m - T\| \|y_k\| \\
&\leq 2M \|T - T_m\| + \|T_m y_j - T_m y_k\|.
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\|T - T_m\| \leq \varepsilon/4M$. Sitten valitaan $N \in \mathbb{N}$, $N \geq m$, siten, että $\|T_m y_j - T_m y_k\| < \varepsilon/2$ kun $j, k \geq N$. Tällöin $\|Ty_j - Ty_k\| \leq \varepsilon$ aina, kun $j, k \geq N$. Siis $(Ty_j)_{j=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono ja siten se suppenee. □

Seuraus 10.11. Olkoot $T \in L(X)$ ja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ jono äärellisasteisia operaattoreita siten, että $\|T_n - T\| \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin T on kompakti.

Jos X on Hilbertin avaruus, niin tämä seuraus voidaan kääntää.

Lause 10.12. Olkoot H Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$ kompakti. Tällöin on olemassa jono $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L(H)$ äärellisasteisia operaattoreita siten, että $\|T_n - T\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska yksikköpallon B_H kuvajoukon $T(B_H)$ sulkeuma on kompakti, seuraa Lauseesta 1.21, että on olemassa $\{y_1, \dots y_n\} \subseteq T(B_H)$ siten, että jokaiselle $y \in T(B_H)$ on olemassa $j \in \{1, \dots, n\}$ jolle $\|y - y_j\| < \varepsilon$. Olkoon $M = \text{span}\,\{y_1, \dots, y_n\}$. Tällöin $H = M \oplus M^{\perp}$ ja jokaiselle $x \in H$ on olemassa yksikäsitteinen esitys $x = y + z$ missä $y \in M$ ja $z \in M^{\perp}$. Olkoon $P_\varepsilon : H \to M$ projektio $P_\varepsilon x = y$. Tällöin $P_\varepsilon \in L(H)$ ja $\|P_\varepsilon\| = 1$. Olkoon $T_\varepsilon := P_\varepsilon T$. Tällöin T_ε on äärellisasteinen. Koska $T_x - T_\varepsilon x \in M^{\perp}$ kaikille $x \in H$, saadaaan Lemman 4.10 nojalla, että

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \|Tx - T_\varepsilon x - u\| \text{ kaikilla } u \in M.$$

Erityisesti, $u = y_j - T_\varepsilon x \in M$ jokaiselle $1 \leq i \leq n$, joten kaikille $x \in B_H$ on voimassa

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \min\{\|Tx - y_j\| : j \in \{1, \dots, n\}\} \leq \varepsilon.$$

Siis $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. □

Huomautus Lausetta 10.12 vastaava väite ei päde yleiselle Banachin avaruudelle. (Per Enflo, 1973, on olemassa separoituva, refleksiivinen Banachin avaruus jolla ei ole edellä mainittua approksimaatio-ominaisuutta.)

Lemma 10.13. Olkoot H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$ itseadjungoitu. Tällöin operaattorin T ominaisarvot ovat reaalisia ja eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat ortogonaalisia sekä lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. Olkoon $Tx = \lambda x$, missä $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $x \in H$, $x \neq 0$. Koska $T = T^*$, saadaan

$$0 = (Tx \mid x) - (x \mid Tx) = (\lambda x \mid x) - (x \mid \lambda x) = (\lambda - \overline{\lambda})\|x\|^2.$$

Koska $x \neq 0$, seuraa tästä, että $\lambda = \overline{\lambda}$, eli $\lambda \in \mathbb{R}$.

Jos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ovat operaattorin T erisuuria ominaisarvoja ja $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$, missä $x, y \in H$, $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, niin

$$0 = (Tx \mid y) - (x \mid Ty) = (\lambda x \mid y) - (x \mid \mu y) = (\lambda - \overline{\mu})(x \mid y).$$

Koska $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\lambda \neq \mu$, niin $\lambda - \overline{\mu} = \lambda - \mu \neq 0$, joten $(x \mid y) = 0$. Jos $\alpha x + \beta y = 0$, niin $(\alpha x + \beta y \mid x) = \alpha\|x\|^2 = 0$. Tästä saadaan, että $\alpha = 0$ ja vastaavasti $\beta = 0$, joten x ja y ovat lineaarisesti riippumattomia. □

Lause 10.14. Olkoot H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$ kompakti ja itseadjungoitu. Tällöin operaattorin T ominaisarvot muodostavat reaalisen joukon joka on äärellinen tai numeroituva. Jälkimmäisessä tapauksessa ominaisarvojen muodostama jono suppenee kohti nollaa.

Todistus. Edellisen lemman nojalla kaikki ominaisarvot ovat reaalisia. Riittää osoittaa, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ joukko

$$\{\lambda : \lambda \text{ on operaattorin } T \text{ ominaisarvo ja } |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

on äärellinen. Tehdään antiteesi: Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ sekä jonot $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ ja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq H$ siten, että $\lambda_i \neq \lambda_j$ kun $i \neq j$, $\|x_j\| = 1$, $Tx_j = \lambda_j x_j$ ja $|\lambda_j| \geq \varepsilon$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Lemman 10.13 mukaan $(x_i \mid x_j) = 0$ kun $i \neq j$. Täten Pythagoraan Lauseen mukaan

$$\|Tx_i - Tx_j\|^2 = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

Jonolla $(Tx_j)_{j=1}^{\infty}$ ei siten voi olla suppenevaa osajonoa. Tämä on ristiriita, koska T on kompakti □

Lemma 10.15. Olkoot X Banachin avaruus ja Y sen suljettu aliavaruus. Edelleen, olkoot $T \in L(X)$ kompakti operaattori ja $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sellainen, että

$$\inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in Y}} \|(\lambda I - T)x\| = 0$$

Tällöin $Y \cap \{x \in X : Tx = \lambda x\} \neq \{0\}$.

Todistus. On olemassa jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ siten, että $\|x_n\| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

Koska T on kompakti, on olemassa osajono $(Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, joka suppenee. Tällöin myös $(\lambda x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee, ja koska $\lambda \neq 0$, myös jono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee. Olkoon $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Tällöin $x \in Y$, $\|x\| = 1$ ja

$$Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = \lambda \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lambda x.$$

□

Lause 10.16. Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$ itseadjungoitu ja kompakti. Tällöin $\|T\|$ tai $-\|T\|$ on operaattorin T ominaisarvo.

Todistus. Voimme olettaa, että $T \neq \theta$. Lauseen 10.7 nojalla avaruudessa H on olemassa jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että $\|x_n\| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $|(Tx_n \mid x_n)| \to \|T\|$ kun $n \to \infty$. Voimme olettaa, siirtymällä osajonoon, että $((Tx_n \mid x_n))_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti $\lambda \in \mathbb{R}$ (Lause 10.6). Näin ollen $|\lambda| = \|T\| \neq 0$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - T)x_n\|^2 &= (\lambda x_n - Tx_n \mid \lambda x_n - Tx_n) \\
&= \underbrace{\|\lambda x_n\|^2}_{=|\lambda|^2\|x_n\|^2} - 2\underbrace{\lambda(Tx_n \mid x_n)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\|Tx_n\|^2}_{\leq\|T\|^2\|x_n\|^2} \\
&\leq 2\lambda^2 - 2\lambda(Tx_n \mid x_n) \to 0
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, Lemman 10.15 nojalla, että λ on operaattorin T ominaisarvo. □

Seuraus 10.17. Olkoot H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$ itseadjungoitu ja kompakti siten, että $\sigma(T) = \{0\}$. Tällöin $T = \theta$.

Lause 10.18 (Spektraalilause kompaktille itseadjungoidulle operaattorille)**.** Olkoot H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in L(H)$ kompakti ja itseadjungoitu operaattori. Tällöin on olemassa äärellinen tai ääretön operaattorin T ominaisvektoreista koostuva ortonormaali jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ ja näihin ominaisvektoreihin liittyvät ominaisarvot λ_n, joille pätee

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid x_n) x_n \text{ kaikilla } x \in H.$$

Jos jono $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ on ääretön, niin $\lambda_n \to 0$ kun $n \to \infty$.

Tämän todistamiseen tarvitsemme seuraavan aputuloksen.

Lemma 10.19. Olkoot H Hilbertin avaruus ja M avaruuden H suljettu aliavaruus. Jos $T \in L(H)$ ja $T(M) \subseteq M$, niin $T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

Todistus. Olkoot $x \in M^\perp$ ja $y \in M$. Tällöin $Ty \in M$, joten $(Ty \mid x) = 0$. Siten $(y \mid T^*x) = 0$ kaikilla $y \in M$, joten $T^*x \in M^\perp$ kaikilla $x \in M^\perp$. □

Lauseen 10.18 *todistus*: Lauseen 10.14 nojalla $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_n \to 0$ kun $n \to \infty$. Konstruoimme ominaisvektorit x_n induktiivisesti:

Lauseen 10.16 nojalla tiedämme, että on olemassa ominaisarvo $\lambda_1 = \pm\|T\|$. Olkoon x_1 vastaava ominaivektori jolle $\|x_1\| = 1$. Olkoon $H_1 = \text{span}\{x_1\}$. Tällöin $T(H_1) \subseteq H_1$, joten Lemman 10.19 nojalla $T(H_2) = T^*(H_2) \subseteq H_2$, missä $H_2 = H_1^\perp$. Määritellään $T_2 := T|_{H_2} \colon H_2 \to H_2$. Selvästi T_2 on kompakti ja jos $x, y \in H_2$, niin

$$(T_2^* x \mid y) = (x \mid T_2 y) = (x \mid Ty) = (T^* x \mid y) = (Tx \mid y).$$

Koska $Tx \in H_2$, tästä seuraa, että $Tx = T_2 x$ kaikilla $x \in H_2$. Näin ollen operaattorin T_2^* on operaattorin T rajoittuma aliavaruuteen H_2, joten $T_2^* = T_2$. Siksi T_2 on kompakti ja itseadjungoitu operaattori $H_2 \to H_2$. Taas Lauseen 10.16 nojalla on olemassa operaattorin T_2 ominaisarvo $\lambda_2 = \pm\|T_2\|$, joka on myös operaattorin T ominaisarvo. Olkoot x_2 sellainen ominaisarvoa λ_2 vastaaja ominaisvektori, jolle $\|x_2\| = 1$.

Oletetaan, että olemme konstruoineet operaattorin T ortonormaalit ominaisvektorit $x_1, \ldots, x_n$ ja vastaavat ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ siten, että $|\lambda_j| = \|T_j\|$ kaikille $1 \leq j \leq n$, missä $T_j = T|_{H_j}$ ja $H_j = \{x_1, \ldots, x_{j-1}\}^\perp$ kun $2 \leq j \leq n$. Nyt olkoot $H_{n+1} = \{x_1, \ldots, x_n\}^\perp$ ja $T_{n+1} = T|_{H_{n+1}}$. Tämä onnistuu, koska Lemman 10.19 nojalla saadaan $T(H_{n+1}) \subseteq H_{n+1}$. Edelleen, $T_{n+1} : H_{n+1} \to H_{n+1}$ on kompakti ja itseadjungoitu, joten Lauseen 10.16 nojalla on olemassa operaattorin

T_{n+1} ominaisarvo λ_{n+1}, jolle $|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\|$, ja vastaava normeerattu ominaisvektori $x_{n+1} \in H_{n+1}$ ja $\|x_{n+1}\| = 1$. Täten ominaisvektorit $x_1, \ldots x_{n+1}$ ovat ortonormaaleja ja vastaavat ominaisarvot $\lambda_1 \ldots, \lambda_{n+1}$ toteuttavat $|\lambda_j| = \|T_j\|$ kaikille $1 \leq j \leq n+1$.

Tämä induktiivinen konstruktio jatkuu niin kauan kuin $T_n \neq \theta$. Oletetaan, että $T_m = \theta$ jollekin $m \in \mathbb{N}$. Jos $x \in H$, niin olkoon

$$y := x - \sum_{j=1}^{m-1} (x \mid x_j) x_j.$$

Nyt

$$(y \mid x_i) = (x \mid x_i) - \sum_{j=1}^{m-1} (x \mid x_j)(x_j \mid x_i) = 0 \text{ kun } i = 1, \ldots, m-1,$$

joten $x - \sum_{j=1}^{m-1} (x \mid x_j) x_j \in H_m$. Tästä seuraa, että

$$0 = T_m y = Ty = Tx - \sum_{j=1}^{m-1} (x \mid x_j) T x_j,$$

joten jokaiselle $x \in H$ pätee

$$Tx = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (x \mid x_j) x_j,$$

ja tulos pätee, kun summa on äärellinen.

Oletetaan sitten, että $T_n \neq \theta$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $x \in H$ mielivaltainen ja olkoon

$$y_n := x - \sum_{j=1}^{n-1} (x \mid x_j) x_j.$$

Tällöin $y_n \in H_n$ ja Pythagoraan Lauseen nojalla

$$\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |(x \mid x_j)|^2,$$

joten $\|y_n\| \leq \|x\|$. Nyt

$$\|Ty_n\| = \|T_n y_n\| \leq \|T_n\| \|y_n\| \leq |\lambda_n| \|x\|$$

joten

$$\|Tx - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (x \mid x_j) x_j\| = \|Ty_n\| \leq |\lambda_n| \|x\|.$$

Lauseen 10.14 nojalla $\lambda_n \to 0$ kun $n \to \infty$, joten

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x \mid x_j) x_j \text{ kaikilla } x \in H. \qquad \square$$

Huomautus Olkoon $T \in L(H)$ äärellisasteinen. Olkoon $\{x_1, \dots x_n\}$ kuvajoukon $T(H)$ kanta. Tällöin on olemassa $l_j \in H^*$, $1 \leq j \leq n$, siten, että

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} l_j(x)x_j \text{ kaikilla } x \in H.$$

Fréchet-Rieszin Lauseen nojalla on olemassa $y_1, \dots y_n \in H$ siten, että

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} (x \mid y_j)x_j \text{ kaikilla } x \in H.$$

Arzela-Ascolin Lause

Määritelmä 10.20. Olkoon X metrinen avaruus. Olkoon $\mathcal{F}$ funktioperhe avaruudesta X skalaariavaruuteen $\mathbb{K}$ sekä $x_0 \in X$. Sanotaan, että perheen $\mathcal{F}$ funktiot ovat *yhtäjatkuvia pisteessä* x_0, eli että perhe $\mathcal{F}$ on *yhtäjatkuva pisteessä* x_0, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa pisteen x_0 ympäristö U siten, että $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kaikilla $x \in U$ ja kaikilla $f \in \mathcal{F}$. Perhe $\mathcal{F}$ on *yhtäjatkuva*, jos $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in X$.

Huomautus Jos $\mathcal{F} = \{f\}$, niin yhtäjatkuvuus tarkoittaa sitä, että f on jatkuva.

Olkoon nyt K kompakti metrinen avaruus. Tällöin $C(K)$ on Banachin avaruus varustettuna normilla

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Lause 10.21 (Arzela-Ascoli)**.** Joukko $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ on prekompakti jos ja vain jos $\mathcal{F}$ on rajoitettu ja yhtäjatkuva.

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{F}$ on prekompakti avaruudessa $C(K)$. Tällöin $\mathcal{F}$ on relatiivikompakti ja siten rajoitettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa avaruuden $C(K)$ äärellinen osajoukko $\{f_1, \dots, f_n\}$ siten, että

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{f \in C(K) : \|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3\}.$$

Koska jokainen f_i, $1 \leq i \leq n$, on jatkuva, jokaiselle $1 \leq i \leq n$ ja jokaiselle $x_0 \in K$ on olemassa avoin pisteen x_0 ympäristö V_i siten, että

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3 \text{ kaikilla } x \in V_i.$$

Olkoon $V = \cap_{i=1}^{n} V_i$. Tällöin V on pisteen $x_0 \in K$ ympäristö ja

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3 \text{ kaikilla } x \in V \text{ ja kaikilla } i = 1, \dots, n.$$

Olkoot $f \in \mathcal{F}$ mielivaltainen ja olkoon f_i, $1 \leq i \leq n$, sellainen, että $\|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3$. Kaikille $x \in V$ pätee

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

joten $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva ja rajoitettu. Koska $\mathcal{F}$ on rajoitettu avaruudessa $C(K)$, voimme olettaa, että $\mathcal{F} \subseteq \{f \in C(K) : \|f\|_\infty \leq 1\}$. Olkoot $\varepsilon > 0$ ja $x \in K$. Yhtäjatkuvuusoletuksen mukaan on olemassa avoin pisteen $x \in K$ ympäristö V_x siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 \text{ kaikilla } y \in V_x \text{ ja kaikilla } f \in \mathcal{F}.$$

Koska K on kompakti, niin on olemassa $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ siten, että

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Joukko $A = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq 1\}$ on avaruuden $\mathbb{K}$ kompakti osajoukko, joten on olemassa $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq A$ siten, että

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha - \alpha_j| < \varepsilon/6\}.$$

On olemassa m^n eri funktiota äärellisestä joukosta $\{x_1, \ldots x_n\}$ äärelliseen joukkoon $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Olkoon Φ kaikkien näiden funktioiden joukko, eli

$$\Phi = \mathcal{F}(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{\alpha_1, \ldots \alpha_m\}).$$

Jokaiselle $\varphi \in \Phi$ merkitään

$$\mathcal{F}_\varphi = \{f \in \mathcal{F} : |f(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon/6 \text{ kaikilla } x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}\}.$$

Tällöin ainakin yksi $\mathcal{F}_\varphi \neq \emptyset$, sillä jokaiselle $f \in \mathcal{F}$ pätee $f(x) \in A$ kaikilla $x \in K$. Näin ollen jokaiselle $f \in \mathcal{F}$ on olemassa $\varphi \in \Phi$ siten, että $f \in \mathcal{F}_\varphi$, joten

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{F}_\varphi.$$

Lause on todistettu, jos onnistumme näyttämään että jokainen joukko $\mathcal{F}_\varphi$ mahtuu johonkin ε-säteiseen palloon avaruudessa $C(K)$. Tämäkin on melko ilmeistä, sillä keskipisteeksi käy mikä tahansa joukon $\mathcal{F}_\varphi$ alkio. Nimittäin, jos $f, g \in \mathcal{F}_\varphi$ ja $x \in K$, niin $x \in V_{x_i}$ jollekin $1 \leq i \leq n$. Tällöin

$$f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/3 \text{ ja } |g(x) - g(x_i)| < \varepsilon/3.$$

Koska $f, g \in \mathcal{F}_\varphi$, niin

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| < \varepsilon,$$

joten

$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)-g(x)| = \max_{x\in K}|f(x)-g(x)| \le \varepsilon.$$

□

Seuraus 10.22. Olkoot K kompakti metrinen avaruus ja $\mathcal{F} \subseteq C(K)$. Tällöin $\mathcal{F}$ on relatiivikompakti avaruudessa $C(K)$ jos ja vain jos $\mathcal{F}$ on rajoitettu ja yhtäjatkuva.

Todistus. Koska avaruus $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ on täydellinen, ovat sen prekompaktit ja relatiivikompaktit joukot samoja. □

Lause 10.23 (Schauder)**.** Olkoot X Banachin avaruus ja $T \in L(X)$. Tällöin T on kompakti jos ja vain jos $T' \in L(X^*)$ on kompakti.

Todistus. Oletetaan ensin, että T on kompakti. Tällöin $\overline{T(B_X)}$ on kompakti avaruudessa X, missä $B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$. Nyt

$$M := \{l|_{\overline{T(B_X)}} : l \in X^*,\ \|l\| \le 1\} \subseteq C(\overline{T(B_X)})$$

on rajoitettu ja koska $l \in X^*$ on lineaarinen, M on myös yhtäjatkuva. Arzela-Ascolin Lauseen nojalla M on relatiivikompakti. Oletetaan, että $l, u \in X^*$ toteuttavat yhtälön $T'l = T'u$. Tällöin

$$l(Tx) = (T'l)x = (T'u)x = u(Tx) \text{ kaikilla } x \in X.$$

Näin ollen voimme määritellä lineaarisen kuvauksen

$$\begin{aligned} R :& T'(X^*) \to C(\overline{T(B_X)}), \\ & T'(l) \mapsto l|_{\overline{T(B_X)}}\,. \end{aligned}$$

Tällöin R on isometrinen, sillä kaikilla $l \in X^*$ pätee

$$\|T'(l)\|_\infty = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\in X}} |l(Tx)| = \sup_{z\in T(B_X)} |l(z)| = \sup_{z\in\overline{T(B_X)}} |l(z)| = \|R(T'(l))\|.$$

Jos nyt $B_{X^*} = \{l \in X^* : \|l\| \le 1\}$, niin $R(T'(B_{X^*})) = M$. Koska M on relatiivikompakti ja R on isometria, niin $T'(B_{X^*})$ on relatiivikompakti, eli T' on kompakti.

Oletetaan sitten, että T' on kompakti. Tällöin $T'' : X^{**} \to X^{**}$ on juuri todistetun nojalla kompakti. Siten $T'' \circ i_X = i_X \circ T$ on kompakti Lemman 9.8 nojalla. Koska upotuskuvaus $i_X : X \to X^{**}$ on isometrinen, seuraa tästä, että T on kompakti. □

Seuraus 10.24. Hilbertin avaruuden H operaattori $T \in L(H)$ on kompakti jos ja vain jos $T^* \in L(H)$ on kompakti.

Todistus. Nyt $T^* = AT'A^{-1}$, missä $A : H \to H^*$, $y \mapsto (\cdot \mid y)$, on isometria. Jos T on kompakti, niin T' on kompakti (Lause 10.23), mistä seuraa, että T^* on kompakti. Jos T^* on kompakti, niin $T = T^{**}$ on kompakti. □

Esimerkki. Jos ydin $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ on jatkuva, niin integraalioperaattori $T : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Tf(t) = \int_0^1 K(s,t)f(s)ds,$$

on kompakti operaattori, ts. avaruuden $C[0,1]$ yksikköpallon kuva

$$\{Tf : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

on relatiivikompakti, eli prekompakti, avaruudessa $C[0,1]$, kun $C[0,1]$ varustetaan normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

Kompaktissa joukossa jatkuva funktio K on rajoitettu, joten

$$M = \sup_{s,t\in[0,1]} |K(s,t)| < \infty.$$

Siksi jokaisella $f \in C[0,1]$, $\|f\|_\infty \leq 1$ ja $t \in [0,1]$ pätee

$$|Tf(t)| \leq \int_0^1 |K(s,t)||f(s)|ds \leq M\|f\|_\infty \leq M,$$

joten

$$\sup_{\substack{\|f\|_\infty \leq 1 \\ f\in C[0,1]}} \sup_{t\in[0,1]} |Tf(t)| \leq M.$$

Siis $\{Tf : \|f\|_\infty \leq 1\}$ on rajoitettu avaruudessa $C[0,1]$.

Joukon $\{Tf : \|f\|_\infty \leq 1\}$ yhtäjatkuvuuden todistamiseksi valitaan luku $\varepsilon > 0$ ja käytetään tietoa, että kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva, ts. on olemassa $\delta > 0$ jolle

$$|K(s,t) - K(s_0,t_0)| < \varepsilon \text{ kun } |s - s_0| + |t - t_0| < \delta.$$

Siis

$$|Tf(t) - Tf(t_0)| \leq \int_0^1 |K(s,t) - K(s,t_0)||f(s)|ds \leq \varepsilon\|f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

kun $|t - t_0| < \delta$ ja kaikilla $f \in C[0,1]$, $\|f\|_\infty \leq 1$. Nyt Arzela-Ascolin Lauseen nojalla $\{Tf : \|f\|_\infty \leq 1\}$ on prekompakti, ja näin ollen T on kompakti.

Kirjallisuutta

[1] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley Sons, 1989.

[2] K. Astela, P. Piiroinen ja H.U. Tylli, *Funktionaalianalyysin peruskurssi*, Helsingin yliopisto, luentomoniste, 2008.