# Hilbertin avaruuden operaattorit
# 802630S (5 ov, 10 op)

**Matemaattisten tieteiden laitos**
**Oulun yliopisto**
**2005**

**Juha Berkovits ja Teemu Halmi**

# Sisältö

# Luku 1

# Äärellisulotteinen tapaus

Käytetään kunnalle, joka on joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, merkintää $\mathbb{K}$. Käsitellään tässä luvussa lyhyesti matriiseja ja lineaaristen kuvausten ominaisuuksia äärellisulotteisissa lineaarisissa avaruuksissa.

Tarkempi käsittely löytyy kirjoista [4] ja [7] tai lineaarialgebran ja matriisiteorian kursseista.

## 1.1 Matriisit

Olkoon $\mathbb{K}_{m\times n}$ kaikkien niiden $m\times n$-matriisien joukko, joiden alkiot ovat kunnasta $\mathbb{K}$.

**Määritelmä 1.1.** Lukua $\lambda \in \mathbb{K}$ sanotaan matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_{n\times n}$ *ominaisarvoksi*, jos on olemassa sellainen nollavektorista eroava $x \in \mathbb{K}^n$, että $\mathbf{A}x = \lambda x$. Tällöin $x$ on ominaisarvoa $\lambda$ vastaava *ominaisvektori*.

Siis kun $\lambda$ on matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo ja $x$ sitä vastaava ominaisvektori, niin $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})x = 0$ eli $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ ei ole säännöllinen, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Toisaalta, jos $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, niin $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ ei ole säännöllinen. Tällöin yhtälöllä $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})x = 0$ on ei-triviaali ratkaisu eli $\lambda$ on matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo. Siis $\lambda \in \mathbb{K}$ on matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvo jos ja vain jos $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

**Määritelmä 1.2.** Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_{n\times n}$ *karakteristinen polynomi* on

$$c_{\mathrm{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Jos $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$, niin yhtälöllä $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ on $n$ kappaletta ratkaisuja, jotka ovat siis matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot. Jos $c_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$, niin luku $m_i$ on ominaisarvon $\lambda_i$ *algebrallinen kertaluku*.

**Määritelmä 1.3.** Matriisit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}_{n \times n}$ ovat *similaarisia*, jos on olemassa sellainen säännöllinen matriisi $\mathbf{C} \in \mathbb{K}_{n \times n}$, että $\mathbf{A} = \mathbf{CBC}^{-1}$. Merkitään $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Kun $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \in \mathbb{K}_{n \times n}$, niin

i) $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}\mathbf{A}_1\mathbf{I}^{-1}$ eli $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_1$.
ii) Jos $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ eli $\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}_2\mathbf{C}^{-1}$, niin $\mathbf{A}_2 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1(\mathbf{C}^{-1})^{-1}$ eli $\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_1$.
iii) Jos $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2$ ja $\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_3$ eli $\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{A}_2\mathbf{C}_1^{-1}$ ja $\mathbf{A}_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{A}_3(\mathbf{C}_2)^{-1}$, niin $\mathbf{A}_1 = (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2)\mathbf{A}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2)^{-1}$ eli $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_3$.

Siis $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

**Lause 1.1.** *Jos matriisit* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *ovat similaarisia, niin* $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$ *ja* $c_A(\lambda) = c_B(\lambda)$.

*Todistus.* Nyt

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{CBC}^{-1}) = \det \mathbf{C} \det \mathbf{B} \det(\mathbf{C}^{-1}) = \det \mathbf{C} \det \mathbf{B} (\det \mathbf{C})^{-1} \\ &= \det \mathbf{B}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}c_A(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{CBC}^{-1}) = \det[\mathbf{C}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{C}^{-1}] \\ &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}) = c_B(\lambda).\end{aligned}$$

□

Siten similaaristen matriisien ominaisarvot ovat samat.

**Määritelmä 1.4.** Matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{K}_{n \times n}$ on *diagonalisoituva*, jos se on similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.

Siis jos $\mathbf{A}$ on similaarinen jonkin diagonaalimatriisin $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ kanssa, niin tällöin $c_A(\lambda) = c_D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ ja luvut $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ovat matriisin $\mathbf{A}$ ominaisarvot.

**Lause 1.2.** *Matriisi* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n \times n}$ *on diagonalisoituva jos ja vain jos sillä on* $n$ *kappaletta lineaarisesti vapaita ominaisvektoreita. Olkoot* $x_1, ..., x_n$ *matriisin* $\mathbf{A}$ *ominaisvektorit ja* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *vastaavat ominaisarvot. Tällöin* $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$, *missä* $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *ja* $\mathbf{C} = [x_1 \ldots x_n]$.

*Todistus.* Katso [7, s. 243]. □

## 1.2 Matriisityyppejä

Merkitään $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. Matriisin $\mathbf{A}$ *transpoosi* on matriisi $\mathbf{A}^T = (a_{ji})_{n\times m}$, eli $\mathbf{A}^T$ saadaan matriisista $\mathbf{A}$ muuttamalla sen pystyrivit vaakariveiksi. Matriisin $\mathbf{A}$ *konjugoitu transpoosi* on matriisi $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T = (\bar{a}_{ji})_{n\times m}$, missä $\bar{a}_{ji}$ on alkion $a_{ji}$ liittoluku.

**Määritelmä 1.5.** Matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on

i) *unitaarinen*, jos $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}$,
ii) *hermiittinen*, jos $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ ja
iii) *normaali*, jos $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Suoraan määritelmästä on helppo nähdä, että matriisi $\mathbf{A}$ on unitaarinen jos ja vain jos sen pystyrivit ovat ortonormaaleja. Jos matriisi $\mathbf{A}$ on unitaarinen tai hermiittinen, niin $\mathbf{A}$ on normaali.

**Määritelmä 1.6.** Matriisit $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ ovat *unitaarisesti similaariset*, jos on olemassa sellainen unitaarinen $\mathbf{C} \in \mathbb{C}_{n\times n}$, että $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^*$.

**Lause 1.3.** *Matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on normaali jos ja vain jos $\mathbf{A}$ on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.*

*Todistus.* Katso [7, s. 304]. □

## 1.3 Lineaariset kuvaukset

Olkoon $X$ $\mathbb{K}$-kertoiminen lineaarinen avaruus sekä $M$ ja $S$ sen epätyhjiä osajoukkoja. Joukko $M$ on lineaarinen aliavaruus, mikäli aina kun $x, y \in M$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin

$$\alpha x + \beta y \in M.$$

Vektorijoukon $S$ virittämä lineaarinen aliavaruus on joukko

$$\operatorname{sp} S = \Big\{x \mid x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \; x_j, x_j \in S, \; \alpha_j \in \mathbb{K}, \; n \in \mathbb{Z}_+\Big\}.$$

Olkoot $X$ ja $Y$ $\mathbb{K}$-kertoimisia lineaarisia avaruuksia sekä $T$ kuvaus $\mathcal{D}(T) \subset X \to Y$, missä $\mathcal{D}(T)$ on kuvauksen $T$ määritysjoukko.

**Määritelmä 1.7.** Kuvaus $T$ on *lineaarinen kuvaus*, jos

i) määritysjoukko $\mathcal{D}(T)$ on lineaarinen aliavaruus, sekä
ii) aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x, y \in \mathcal{D}(T)$ pätee

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y.$$

Suoraan määritelmästä nähdään, että myös lineaarisen kuvauksen $T$ kuvajoukko $\operatorname{Im} T$ on lineaarinen aliavaruus, joten jatkossa voidaan puhua kuva-avaruudesta.

Olkoot nyt $E$ ja $F$ äärellisulotteisia lineaarisia avaruuksia. Merkitään $\dim E = n$ ja $\dim F = m$. Olkoon $T : E \to F$ lineaarinen kuvaus, $\{e_1, ..., e_n\}$ avaruuden $E$ ja $\{f_1, ..., f_m\}$ avaruuden $F$ kanta. Kantavektoreiden kuvat määräävät lineaarisen kuvauksen yksikäsitteisesti. Olkoon $x \in E$, tällöin on olemassa sellaiset luvut $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, että

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j,$$

jolloin

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T e_j,$$

joten $Te_k \in F$ ja on olemassa sellaiset luvut $a_{1k}, \ldots, a_{mk}$, että

$$Te_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i, \text{ missä } k = 1, \ldots, n.$$

Matriisia $(a_{ik})_{m \times n}$ sanotaan lineaarisen kuvauksen $T$ matriisiksi kantojen $\{e_k\}$ ja $\{f_k\}$ suhteen. Merkitään $[T] = (a_{ik})_{m \times n}$, kun kannat on kiinnitetty. Merkitään

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad [x] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k f_k \text{ ja } [y] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$y = Tx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_k = \sum_{i,k} a_{ik} \alpha_k f_i,$$

joten

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \text{ aina, kun } i \in \{1, \ldots, n\},$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$[y] = [T][x].$$

Siis lineaariset kuvaukset ja matriisit vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan, kun kannat on kiinnitetty.

## 1.4 Kuvauksen matriisin ominaisuuksia

Olkoot $T, T_1, T_2 : E \to F$ lineaarisia kuvauksia, avaruuden $E$ kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ja avaruuden $F$ kanta $\{f_1, ..., f_m\}$.

**Lause 1.4.** *Olkoon* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Tällöin*

*a)* $[\alpha T] = \alpha[T]$ *ja*
*b)* $[T_1 + T_2] = [T_1] + [T_2]$.

Olkoon $V$ $\mathbb{K}$-kertoiminen lineaarinen avaruus, $\dim V = p$, $\{g_1, \ldots, g_p\}$ sen kanta ja $S : F \to V$ lineaarinen kuvaus.

**Lause 1.5.** *Kuvaukselle* $S \circ T : E \to V$ *pätee* $[S \circ T] = [S][T]$.

*Todistus.* Olkoot $[T] = (a_{ik})_{m\times n}$, $[S] = (b_{ik})_{p\times m}$ ja $[S \circ T] = (c_{ik})_{p\times n}$. Nyt

$$Te_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i \quad \text{ja} \quad Sf_i = \sum_{l=1}^{p} b_{li} g_l \quad \text{sekä} \quad (S \circ T)e_k = \sum_{l=1}^{p} c_{lk} g_l.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}(S \circ T)e_k &= S(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} Sf_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{li} g_l = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} b_{li} a_{ik} g_l,\end{aligned}$$

joten

$$c_{lk} = \sum_{i=1}^{m} b_{li} a_{ik}, \; l = 1, \ldots, p; k = 1, ..., n$$

eli $[S \circ T] = [S][T]$. □

Olkoot $B_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ ja $B_2 = \{\hat{e}_1, ..., \hat{e}_n\}$ avaruuden $E$ kantoja sekä $T : E \to E$ lineaarinen kuvaus. Merkitään $[T]_1$ kuvauksen $T$ matriisia kannan $B_1$ ja $[T]_2$ kannan $B_2$ suhteen. Tällöin on voimassa seuraava tulos.

**Lause 1.6.** $[T]_1 \sim [T]_2$.

## 1.5 Käänteiskuvaus ja ominaisarvot

Muistetaan, että $n \times n$-matriisi $\mathbf{A}$ on kääntyvä eli $\mathbf{A}^{-1}$ on olemassa jos ja vain jos $\det \mathbf{A}$ on nollasta eroava. Olkoon $T : E \to F$ lineaarinen kuvaus. Kuvauksen $T$ *ydin* tai *kerneli* on joukko $\operatorname{Ker} T = \{u \in E \mid Tu = 0\}$. Lineaarinen kuvaus $T$ on injektio jos ja vain jos $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

**Lause 1.7.** *Jos* $T : E \to F$ *on injektio, niin kuva-avaruuden* $\operatorname{Im} T$ *dimensio on sama kuin lähtöavaruuden* $E$*.*

*Todistus.* Olkoon $\{x_1, ..., x_n\}$ lineaarisesti vapaa joukko. Tällöin myös $\{Tx_1, ..., Tx_n\}$ on lineaarisesti vapaa, koska $T$ on injektio. Erityisesti $\{Te_1, ..., Te_n\} \subset \operatorname{Im} T$ on lineaarisesti vapaa, joten $\dim(\operatorname{Im} T) \geq$ n.

Toisaalta, jos $y \in \operatorname{Im} T$, niin $y = Tx$ jollain $x \in E$. Nyt

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j,$$

joten

$$y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T e_j.$$

Siis $\{Te_1, ..., Te_n\}$ virittää avaruuden $\operatorname{Im} T$, joten $\dim(\operatorname{Im} T) = n = \dim E$. □

**Huomautus.** Jos $T : E \to E$ on injektio, niin $n = \dim(\operatorname{Im} T) = \dim E$ eli $\operatorname{Im} T = E$. Siis tässä tapauksessa injektiivisyydestä seuraa surjektiivisuus.

**Lause 1.8.** *Jos* $T : E \to E$ *on lineaarinen injektio, niin* $T$ *on surjektio ja* $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.

*Todistus.* Nyt $T \circ T^{-1} = \mathbf{I}$, joten $[T][T^{-1}] = \mathbf{I}$ ja $T^{-1} \circ T = \mathbf{I}$, joten $[T^{-1}][T] = \mathbf{I}$. □

## 1.6 Ominaisarvot ja vektorit

Olkoon $T : E \to E$ lineaarinen kuvaus. Nyt $Tx = \lambda x$ jos ja vain jos $[T][x] = \lambda[x]$. Siis lineaarisen kuvauksen $T$ ominaisarvot saadaan ratkaisemalla matriisin $[T]$ ominaisarvot.

**Määritelmä 1.8.** Lineaarinen kuvaus $T$ on *diagonalisoituva*, jos $[T]$ on diagonalisoituva.

Jos $T$ on diagonalisoituva, niin on olemassa lineaarisesti vapaat ominaisvektorit $x_1, ..., x_n$ ja vastaavat ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Erityisesti $\{x_1, ..., x_n\}$ on avaruuden $E$ kanta. Kun $x \in E$, niin on olemassa esitys

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j x_j.$$

Tämä on ns. *diagonaaliesitys*.

**Huomautus.** Jos $T : E \to E$ on lineaarinen, missä $E$ on äärellisulotteinen lineaarinen normiavaruus, niin $T$ on automaattisesti jatkuva.

**Huomautus.** Kun $T : E \to E$ on lineaarinen kuvaus, ominaisarvon $\lambda$ *geometrinen kertaluku* on $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Geometrinen kertaluku on aina pienempi tai yhtäsuuri kuin algebrallinen kertaluku. Jos $E$ on kompleksikertoiminen lineaarinen avaruus, niin $T$ on diagonalisoituva jos ja vain jos jokaisen ominaisarvon geometrinen kertaluku on yhtäsuuri kuin algebrallinen kertaluku.

# Luku 2

# Hilbert-avaruudet

Käsitellään tässä luvussa Hilbert-avaruuksien eli täydellisten sisätuloavaruuksien joitain perusominaisuuksia. Luvun lopussa esitellään tärkeä Frechet-Rieszin lause. Kerroinkuntana $\mathbb{K}$ on tässä luvussa $\mathbb{C}$, ellei erikseen toisin mainita.

Tässä luvussa esitettävät asiat löytyvät kirjoista [5], [8] ja [10].

## 2.1 Sisätulo

**Määritelmä 2.1.** Olkoon $H$ $\mathbb{K}$-kertoiminen lineaarinen avaruus. Kuvaus $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ on *sisätulo*, jos aina, kun $x, y, z \in H$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on voimassa:

(S1) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,
(S2) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ja $\langle x, x \rangle = 0$ jos ja vain jos $x = 0$ ja
(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Lineaarista avaruutta, jossa on määritelty sisätulo sanotaan *sisätuloavaruudeksi*. Ehdoista (S1) ja (S3) saadaan, että $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle$. Sisätulo määrää normin

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

ja siten metriikan

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

avaruuteen $H$. Kyseinen normi on *sisätulonormi*. Sisätulonormille on voimassa *suunnikassääntö*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ aina, kun } x,\ y \in H.$$

Voidaan osoittaa, että normi on sisätulonormi jos ja vain jos suunnikassääntö on voimassa. Sisätuloavaruudessa $H$ on voimassa myös *polarisaatiokaavat*:

a) Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \text{ aina, kun } x, y \in H.$$

b) Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \text{ aina, kun } x, y \in H.$$

Nämä voidaan helposti todistaa suoraan laskemalla.

**Lause 2.1.** *Olkoon $x_k \to x$ ja $y_k \to y$ avaruudessa $H$. Tällöin $\langle x_k, y_k\rangle \to \langle x, y\rangle$ eli sisätulo on jatkuva funktiona $H \times H \to \mathbb{K}$.*

*Todistus.*

$$\begin{aligned}
|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_k, y_k\rangle - \langle x_k, y\rangle + \langle x_k, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&\leq |\langle x_k, y_k - y\rangle| + |\langle x_k - x, y\rangle| \\
&\leq \|x_k\|\|y_k - y\| + \|x_k - x\|\|y\| \to 0.
\end{aligned}$$

□

**Määritelmä 2.2.** Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\|x_j - x_k\| < \varepsilon \text{ aina, kun } j \text{ ja } k \text{ ovat suurempia kuin } n_\varepsilon.$$

**Määritelmä 2.3.** Sisätuloavaruus $H$ on *Hilbert-avaruus*, jos se on täydellinen eli jokainen Cauchyn jono suppenee.

## 2.2 Kohtisuoruus

Olkoon $H$ Hilbert-avaruus.

**Määritelmä 2.4.** Sisätuloavaruuden $H$ alkiot $x$ ja $y$ ovat *ortogonaaliset* tai *kohtisuorassa*, jos $\langle x, y\rangle = 0$. Merkitään $x \perp y$.

Erityisesti 0 on kohtisuorassa kaikkia avaruuden $H$ alkiota vastaan.

**Määritelmä 2.5.** Joukko $S$ on *ortonormaali*, jos aina kun $x \in S$ ja $y \in S$, niin

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 1 & \text{kun } x = y \text{ ja} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Ortonormaali joukko $\{x_1, ..., x_p\}$ on lineaarisesti vapaa. Ääretön joukko on lineaarisesti vapaa jos sen jokainen äärellinen osajoukko on lineaarisesti vapaa. Gram-Schmidtin ortonormeeraus menetelmällä voidaan osoittaa, että jos $S = \{x_1, x_2, ...\}$ on lineaarisesti vapaa, niin on olemassa sellainen ortonormaali joukko $\{e_1, e_2, ...\}$, että

$$\mathrm{sp}\{x_1, ..., x_k\} = \mathrm{sp}\{e_1, ..., e_k\}$$

aina, kun $k$ on positiivinen kokonaisluku.

Olkoon $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormaali joukko ja $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$. Tällöin

$$\langle x, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k$$

aina, kun $k = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j,$$

missä luvut $\langle x, e_j \rangle$ ovat ns. *yleistettyjä Fourier-kertoimia.*

Lisäksi

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

Olkoon $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ortonormaali joukko ja $u \in H$ mielivaltainen sekä

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \text{ missä } \alpha_j = \langle u, e_j \rangle.$$

Tällöin

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle u, e_j \rangle|^2 \quad \text{ja} \quad \langle v, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle e_j, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Siten

$$\begin{aligned} 0 \le \|u - v\|^2 &= \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle u, e_j \rangle|^2, \end{aligned}$$

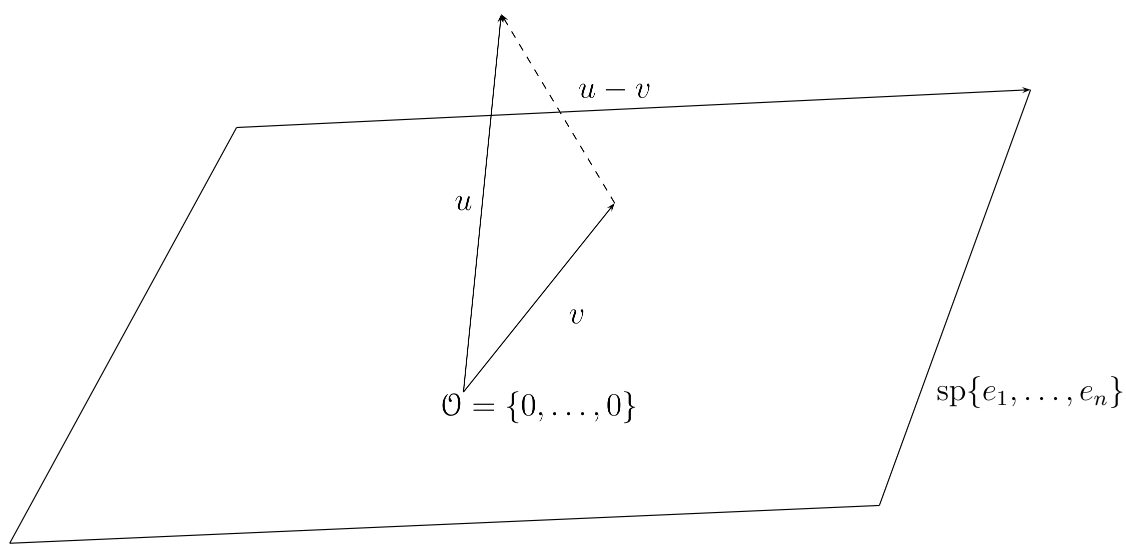
josta saadaan tärkeä epäyhtälö

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle u, e_j \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \text{ aina, kun } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Voidaan osoittaa, että

$$\min_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}} \|u - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\| = \|u - \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j \rangle e_j\|.$$

Siten $v = \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j \rangle e_j$ on pistettä $u$ lähimpänä oleva vektori aliavaruudessa $\mathrm{sp}\{e_1, ..., e_n\}$.




Lisäksi $\langle v, u - v \rangle = \overbrace{\langle u, v \rangle}^{=\|v\|^2} - \|v\|^2 = 0$ eli $v \perp (u - v)$. Siis minimietäisyys on myös kohtisuora etäisyys. Kun $n \to \infty$, niin

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, e_j \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \text{ aina, kun } u \in H.$$

**Määritelmä 2.6.** Olkoon $M \subset H$ epätyhjä. Joukko $M$ on *konveksi*, jos aina, kun $x$, $y \in M$ ja $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

Olkoon $M \subset H$ suljettu ja epätyhjä konveksi joukko. Olkoon $y \in H$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen "lähin piste" $w \in M$, toisin sanoen,

$$\|y - w\| = \inf_{x \in M} \|y - x\| = \operatorname{dist}(y, M).$$

*Todistus.* Katso [5, s. 20]. □

Erityisesti, jos $M$ on suljettu lineaarinen aliavaruus, niin lisäksi $(y - w) \perp w$. Itseasiassa pätee:

$$(y - w) \perp M \text{ jos ja vain jos } \operatorname{dist}(y, M) = \|y - w\|.$$

Olkoon $S \subset H$ epätyhjä.

**Määritelmä 2.7.** Joukon $S$ *ortogonaalikomplementti* on joukko

$$S^{\perp} = \big\{u \in H \mid \langle u, x\rangle = 0 \text{ aina, kun } x \in S\big\}.$$

**Määritelmä 2.8.** Jos $S^{\perp} = \{0\}$, niin sanotaan, että $S$ on *totaali*.

Jos $0 \in S$, niin $S \cap S^{\perp} = \{0\}$. Aina pätee:

1) $S^{\perp}$ on lineaarinen aliavaruus.
2) $S^{\perp}$ on suljettu.
3) Jos $S_1 \subset S_2$, niin $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$.
4) $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$.
5) Jos $M$ on suljettu lineaarinen aliavaruus ja $y \in H$, niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset $w \in M$ ja $v \in M^{\perp}$, että $y = w + v$.
6) $S^{\perp\perp} = S$ jos ja vain jos $S$ on suljettu lineaarinen aliavaruus.

## 2.3 Kannoista

Jos $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ...\}$ on ortonormaali ja totaali, niin $\mathcal{B}$ on avaruuden $H$ *ortonormaali kanta*. Kurssilla Analyysi III on osoitettu, että $\mathcal{B}$ on lineaarisesti vapaa. Ortonormaalille joukolle $\mathcal{B}$ seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

a) $\mathcal{B}$ on totaali.
b) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$ aina, kun $x \in H$.
c) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ aina, kun $x \in H$.

Koska suppenevan sarjan termit lähestyy nollaa, niin seurauksena saadaan että

$$\lim_{k\to\infty} \langle x, e_k\rangle = 0.$$

**Määritelmä 2.9.** Olkoon $H$ Hilbert-avaruus. Jono $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ *suppenee heikosti*, jos $\langle u_n, x\rangle \to \langle u, x\rangle$ aina, kun $x \in H$. Merkitään $u_n \rightharpoonup u$.

Heikolle suppenemiselle pätee (katso [8, s. 257-260]):

1) Heikko raja-arvo on yksikäsitteinen.
2) Jos $u_n \to u$, niin $u_n \rightharpoonup u$.
3) Jos $\dim H$ on äärellinen ja $u_n \rightharpoonup u$, niin $u_n \to u$.
4) Jos $u_n \rightharpoonup u$, niin $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu.
5) Jos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu, niin on olemassa heikosti suppeneva osajono $u_{n_k} \rightharpoonup u$.

**Esimerkki 1.** Olkoon $\{e_1, e_2, \dots\}$ ortonormaali kanta. Nyt $e_n \rightharpoonup 0$, sillä $\langle e_n, x\rangle \to 0$ aina, kun $x \in H$. Kuitenkaan jono $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene kohti vektoria 0.

Olkoon $\mathcal{X}$ lineaarinen avaruus. Zornin lemman avulla voidaan osoittaa, että avaruudella $\mathcal{X}$ on *Hamelin kanta* $\mathcal{B}_H$ (katso [8, s. 211]), jolle

1) $\mathcal{B}_H$ on lineaarisesti vapaa ja
2) $\mathcal{X} = \mathrm{sp}\ \mathcal{B}_H$.

Jos $H$ on Hilbert-avaruus ja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots\}$ sen ortonormaali kanta, niin

1) $\mathcal{B}$ on lineaarisesti vapaa ja
2) $H = \overline{\mathrm{sp}\,\mathcal{B}}$.

On syytä huomata, että ääretönulotteisessa Hilbert-avaruudessa ortonormaali kanta <u>ei</u> ole Hamelin kanta. Olkoon $\mathcal{X}$ ääretönulotteinen lineaarinen normiavaruus. Joukko $\mathcal{B}_S = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ on *Schauderin kanta*, jos jokaista $x \in \mathcal{X}$ kohti on olemassa yksikäsitteinen esitys

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j.$$

Esityksessä oleva sarja suppenee avaruudessa $\mathcal{X}$, toisin sanoen,

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j\|_{\mathcal{X}} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Schauderin kannalle on voimassa yksikäsitteisyyden nojalla, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j = 0 \text{ jos ja vain jos } \alpha_j = 0 \text{ aina, kun } j \in \mathbb{Z}_+.$$

Tämä ei päde jokaiselle lineaarisesti vapaalle äärettömälle joukolle, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 2.** Osoitetaan nyt että on olemassa sellainen lineaarisesti vapaa vektorijoukko $S = \{u_1, u_2, ...\} \subset H$, että $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j = 0$ vaikka kertoimet ovat nollasta eroavia. Olkoon $\{e_1, e_2, \dots\}$ avaruuden $H$ ortonormaali kanta ja

$$S = \{e_1\} \cup \big\{u_k \mid k = 1, 2 \dots\big\}, \quad u_k = e_k - \frac{1}{2} e_{k+1}.$$

Osoitetaan aluksi, että $S$ on lineaarisesti vapaa. Olkoot $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sellaisia lukuja, että

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 e_1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k - \frac{1}{2} e_{k+1}) \\
&= (\alpha_0 + \alpha_1) e_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k e_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{k+1} \\
&= (\alpha_0 + \alpha_1) e_1 + \sum_{k=2}^{n} (\alpha_k - \frac{1}{2} \alpha_{k-1}) e_k - \frac{1}{2} \alpha_n e_{n+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tämä voi olla voimassa ainoastaan, jos $\alpha_0 + \alpha_1 = 0$, $\alpha_n = 0$ ja $\alpha_k = \frac{1}{2} \alpha_{k-1}$ kun $k = 2, \dots, n$. Nyt $\alpha_{k-1} = 2\alpha_k$, joten $\alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = 0$ ja näin ollen myös $\alpha_0 = 0$. Siis $S$ on lineaarisesti vapaa. Osoitetaan seuraavaksi, että

$$-\frac{1}{2} e_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} u_k = 0.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} (e_k - \frac{1}{2} e_{k+1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} e_{k+1} \\
&= \frac{1}{2} e_1 - \frac{1}{2^{n+1}} e_{n+1},
\end{aligned}$$

joten

$$-\frac{1}{2} e_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} u_k = -\frac{1}{2^{n+1}} e_{n+1} \longrightarrow 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

**Huomautus.** Ortonormaali kanta on olemassa Hilbert-avaruudessa $H$ jos ja vain jos $H$ on *separoituva* eli on olemassa sellainen numeroituva joukko $S$, että $\overline{S} = H$. Voidaan osoittaa, että $H$ on separoituva jos ja vain jos on olemassa sellainen numeroituva joukko $S_0$, että $\overline{\operatorname{sp} S_0} = H$ (katso [10, s. 85]).

## 2.4 Frechet-Rieszin lause

Olkoon $H$ Hilbert-avaruus sekä $M$ ja $N$ sen lineaarisia aliavaruuksia. Tällöin joukko $M + N = \{u \mid u = m + n,\ m \in M, n \in N\}$ on myös lineaarinen aliavaruus. Jos $V = M + N$ ja $M \cap N = \{0\}$, merkitään $V = M \oplus N$, tällöin kyseessä on *suora summa*. Erityisesti voi olla $N = M^{\perp}$ eli $H = M \oplus M^{\perp}$, jolloin kyseessä on *ortogonaalinen suora summa*.

**Lause 2.2.** *Olkoot $M, N \subset H$ lineaarisia aliavaruuksia. Tällöin $M+N = M \oplus N$ jos ja vain jos jokaisella vektorilla $u \in M+N$ on yksikäsitteinen esitys $u = m+n$, missä $m \in M$ ja $n \in N$.*

**Lause 2.3.** *Olkoot $M$ ja $N$ suljettuja lineaarisia aliavaruuksia, sekä $M \perp N$. Tällöin $V = M \oplus N$ on suljettu lineaarinen aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoon $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset V$, $u_k \to u$ avaruudessa $V$ ja $u_k = m_k + n_k$, missä $m_k \in M$ ja $n_k \in N$. Koska $M \perp N$, niin

$$\|u_k - u_l\|^2 = \|m_k - m_l\|^2 + \|n_k - n_l\|^2,$$

joten $(m_k)_{k=1}^{\infty} \subset M$ ja $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset N$ ovat Cauchy-jonoja. Koska $H$ on täydellinen, niin $m_k \to m$ ja $n_k \to n$ avaruudessa $H$. Nyt $M$ ja $N$ ovat suljettuja lineaarisia aliavaruuksia, joten $m \in M$ ja $n \in N$ eli $u = m + n \in M + N$. $\square$

**Huomautus.** (tekijärakenne) Olkoon $V$ suljettu lineaarinen aliavaruus. Tällöin

$$H/V \simeq V^{\perp},$$

toisin sanoen on olemassa lineaarinen isometria $\varphi : H/V \to V^{\perp}$.

Tarkastellaan seuraavaksi lineaarisen avaruuden $X$ duaaliavaruutta. Määritellään kuitenkin aluksi mitä tarkoitetaan lineaarisella funktionaalilla.

**Määritelmä 2.10.** Olkoon $X$ $\mathbb{K}$-kertoiminen lineaarinen avaruus. *Lineaarinen funktionaali* on lineaarinen kuvaus

$$f : \mathcal{D}(f) \subset X \to \mathbb{K}.$$

**Määritelmä 2.11.** Olkoon $X$ $\mathbb{K}$-kertoiminen lineaarinen normiavaruus. Avaruuden $X$ *duaaliavaruus* on joukko

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ lineaarinen ja jatkuva}\}.$$

Duaaliavaruudesta $X^*$ saadaan lineaarinen normiavaruus, kun määritellään normi asettamalla

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|.$$

Duaaliavaruus $X^*$ on aina täydellinen eli Banach-avaruus riippumatta siitä onko itse $X$ täydellinen.

**Lause 2.4** (Frechet-Riesz)**.** *Jokaista $f \in H^*$ kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen $w_f \in H$, että*

$$f(x) = \langle x, w_f \rangle \text{ aina, kun } x \in H.$$

*Lisäksi* $\|w_f\| = \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.

*Todistus.* Katso [10, s. 142]. □

Määritellään kuvaus $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*} : H^* \times H^* \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$\langle f, g \rangle_{H^*} = \langle w_f, w_g \rangle_H \text{ aina, kun } f, g \in H^*.$$

Tällöin saadaan sisätulo avaruuteen $H^*$. Niin sanottu Frechet-Rieszin kuvaus

$$F(f) = w_f$$

on lineaarinen isometria, kun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Tällöin siis $H^* \simeq H$. Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin

$$F(\lambda f) = \overline{\lambda} F(f) \text{ aina, kun } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ja } f \in H^* \text{ (\textit{konjugaatti lineaarinen})}.$$

# Luku 3

# Operaattoreista

Siirrytään tarkastelemaan lineaarisia kuvauksia Hilbert-avaruudessa. Määritellään aluksi joitain tärkeitä peruskäsitteitä ja esitellään perustuloksia. Näiden jälkeen esitellään eräitä tärkeitä operaattorityyppejä ja esitetään ja todistetaan luvun lopuksi Browder-Tonin upotuslause. Oletetaan edelleen, että kerroinkuntana $\mathbb{K}$ on $\mathbb{C}$ ellei erikseen toisin mainita.

Tämän luvut asiat on koottu lähteistä [1], [2], [8] ja [10].

## 3.1 Avaruus $\mathcal{B}(H)$ ja adjungaatti

Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen kuvaus. Käytetään kuvauksesta $T$ myös nimitystä *lineaarinen operaattori* tai lyhyemmin pelkkä operaattori. Muistetaan, että operaattorin $T$ määritysjoukon $\mathcal{D}(T)$ on oltava lineaarinen aliavaruus. Olkoon nyt $\mathcal{D}(T) = H$, jolloin siis $T$ on kuvaus $H \to H$.

**Määritelmä 3.1.** Lineaarinen kuvaus $T$ on *rajoitettu*, jos on olemassa sellainen positiivinen vakio $K$, että

$$\|Tx\| \leq K$$

aina, kun $\|x\| \leq 1$.

Muistetaan, että lineaarinen kuvaus $T$ on jatkuva jos ja vain jos se on rajoitettu.

**Määritelmä 3.2.** Operaattori $T$ on *säännöllinen*, jos $T^{-1}$ on olemassa ja rajoitettu.

Merkitään

$$\mathcal{B}(H) = \{T : H \to H \mid \ T \text{ lineaarinen ja rajoitettu}\}$$

tai yleisemmin, kun $H_1$ ja $H_2$ ovat Hilbert-avaruuksia, merkitään

$$\mathcal{B}(H_1, H_2) = \{T : H_1 \to H_2 \mid T \text{ lineaarinen ja rajoitettu}\}.$$

Joukko $\mathcal{B}(H)$ on lineaarinen avaruus ja siitä saadaan normiavaruus, kun määritellään normi asettamalla aina, kun $T \in \mathcal{B}(H)$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|.$$

Normi voidaan myös määritellä yhtäpitävästi seuraavilla tavoilla

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\| \le 1 \\ \|y\| \le 1}} |\langle Tx, y \rangle| = \left[ \sup_{\substack{\|x\| \le 1 \\ \|y\| \le 1}} |\langle Tx, Ty \rangle| \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Selvästi nähdään, että $\|Tx\| \le \|T\| \|x\|$ aina, kun $x \in H$.

Kuvauksen $T \in \mathcal{B}(H)$ *adjungoitu operaattori* $T^* \in \mathcal{B}(H)$ määritellään Frechet-Rieszin lauseen avulla. Kun $y \in H$, määritellään kuvaus $f_y : H \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$f_y(x) = \langle Tx, y \rangle$$

aina, kun $x \in H$. Selvästi $f_y$ on lineaarinen ja

$$|f_y(x)| \le \|Tx\| \|y\| \le (\|T\| \|y\|) \|x\|$$

eli $f_y$ on myös rajoitettu. Frechet-Rieszin lauseen nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen $z \in H$, että

$$f_y(x) = \langle x, z \rangle$$

aina, kun $x \in H$. Määritellään $z = T^* y$. Siis $\langle Tx, y \rangle = f_y(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, T^* y \rangle$. Voidaan siis ottaa käyttöön seuraava määritelmä.

**Määritelmä 3.3.** Operaattori $T^* \in \mathcal{B}(H)$ on operaattorin $T$ *adjungoitu operaattori* tai *adjungaatti* mikäli aina, kun $x, y \in H$ on voimassa

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

**Huomautus.** Jos $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, niin $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$.

Tarkastellaan esimerkin avulla adjungaatin määräämistä.

**Esimerkki 3.** Olkoon $\ell_2 = \left\{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$. Määritellään sisätulo avaruuteen $\ell_2$ asettamalla

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

aina, kun $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}, y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Nyt sisätulo määrää normin

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Määritellään operaattori $T$ asettamalla $Tx = (x_1, x_2, 0, 0, \dots)$ aina, kun $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Määrätään operaattorin $T$ adjungaatti $T^*$. Selvästi operaattori $T$ on lineaarinen, ja aina kun $x, y \in \ell_2$ on

$$\langle Tx, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 = \langle x, T^*y\rangle.$$

Merkitään $e_k = \{0, 0, ..., 0, 1, \dots\}$, missä $k$:s termi on 1 ja $k = 1, 2, \dots$. Joukko $\{e_1, e_2, \dots\}$ on avaruuden $\ell_2$ ortonormaali kanta. Adjungaatin määräämiseksi riittää laskea $T^*e_k$. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle Tx, e_1\rangle &= x_1 = \langle x, T^*e_1\rangle, \\
\langle Tx, e_2\rangle &= x_2 = \langle x, T^*e_2\rangle \text{ ja} \\
\langle Tx, e_j\rangle &= 0 = \langle x, T^*e_j\rangle, \text{ kun } j \geq 3.
\end{aligned}$$

Saatiin siis, että $T^*y = (y_1, y_2, 0, 0, \dots) = Ty$ eli $T^* = T$.

Esitellään seuraavassa lauseessa adjungaatin perusominaisuuksia.

**Lause 3.1.** *Olkoot $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Tällöin seuraavat tulokset ovat voimassa.*

*a)* $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda}A^* + \overline{\mu}B^*$.
*b)* $(AB)^* = B^*A^*$.
*c)* $(A^*)^* = A$.
*d)* $\|A\| = \|A^*\|$.
*e)* $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.
*f)* $\|AA^*\| = \|A\|^2$.
*g)* *Jos $A$ on* säännöllinen*, niin myös $A^*$ on säännöllinen ja* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

*Todistus.* Olkoot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ja $x, y \in H$ mielivaltaisia.

a) Nyt

$$\begin{aligned}
\langle x, (\lambda A + \mu B)^*y\rangle &= \langle(\lambda A + \mu B)x, y\rangle = \langle\lambda Ax, y\rangle + \langle\mu Bx, y\rangle \\
&= \lambda\langle x, A^*y\rangle + \mu\langle x, B^*y\rangle \\
&= \langle x, \overline{\lambda}A^*y\rangle + \langle x, \overline{\mu}B^*y\rangle \\
&= \langle x, \overline{\lambda}A^*y + \overline{\mu}B^*y\rangle.
\end{aligned}$$

Siis $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda}A^* + \overline{\mu}B^*$.

b) Nyt

$$\langle x, (AB)^*y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle A(Bx), y\rangle = \langle Bx, A^*y\rangle = \langle x, B^*A^*y\rangle,$$

joten $(AB)^*y = B^*A^*y$ eli $(AB)^* = B^*A^*$.

c) Nyt

$$\langle x, (A^*)^*y\rangle = \langle A^*x, y\rangle = \overline{\langle y, A^*x\rangle} = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle,$$

joten $(A^*)^*y = Ay$ eli $(A^*)^* = A$.

d) Normin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} |\langle Ax, y\rangle| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} |\langle x, A^*y\rangle| \\ &= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} |\overline{\langle A^*x, y\rangle}| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} |\langle A^*x, y\rangle| = \|A^*\|.\end{aligned}$$

e) Nyt

$$\|ABx\| \le \|A\|\|Bx\| \le \|A\|\|B\|\|x\|,$$

joten $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

f) Cauchy-Schwarz'n epäyhtälön nojalla

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \le \|A^*Ax\|\|x\| \le \|A^*A\|\|x\|^2,$$

joten $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$. Kohtien *e)* ja *d)* nojalla

$$\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2.$$

Täten $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

g) Nyt $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ja $A, A^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, joten $(AA^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$. Kohdan *b)* nojalla tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $(A^{-1})^*A^* = A^*(A^{-1})^* = I$. Täten $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

$\square$

Seuraava lause antaa yhteyden operaattorin ja sen adjungaatin kuvajoukkojen ja ytimien välille.

**Lause 3.2.** *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$. Tällöin seuraavat tulokset ovat voimassa.*

*a)* $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.
*b)* $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T^*}$.
*c)* $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

*d)* $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$.

*Todistus.* a) Nyt $x \in \operatorname{Ker} T$ jos ja vain jos $Tx = 0$ eli $0 = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ aina, kun $y \in H$.

b) Selvästi $\overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$. Nyt $\operatorname{Im} T^* \subset \overline{\operatorname{Im} T^*}$, joten $\overline{\operatorname{Im} T^*}^\perp \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp$. Täten $(\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} \subset \overline{\operatorname{Im} T^*}$. Siis $(\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} T^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

c) Seuraa suoraan *a)*-kohdasta.

d) Seuraa suoraan *b)*-kohdasta.

□

**Huomautus.** $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ on suljettu, koska $T$ on jatkuva.

Edellisestä lauseesta saadaan suorina seurauksina seuraavat.

a) Jos $T = T^*$ ja $\operatorname{Im} T$ on suljettu, niin $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^\perp$ ja $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ eli $H = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$.

b) Jos $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$, niin $\overline{\operatorname{Im} T} = H$. Jos $\overline{\operatorname{Im} T^*} = H$, niin $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ eli $T$ on injektio.

## 3.2 Operaattorityyppejä

Edellisessä alaluvussa määritellyn adjungaatin avulla voidaan määritellä eräitä tärkeitä operaattorityyppejä.

**Määritelmä 3.4.** Olkoon $H$ Hilbert-avaruus. Operaattori $T \in \mathcal{B}(H)$ on

i) *itseadjungoitu*, jos $T^* = T$,

ii) *normaali*, jos $T^*T = TT^*$ ja

iii) *unitaarinen*, jos $T^* = T^{-1}$.

Eräs tärkeä operaattoriluokka on *projektiot*.

**Määritelmä 3.5.** Lineaarinen kuvaus $P : H \to H$ on *projektio*, jos $P^2 = P$. Projektio on *ortogonaalinen* eli *ortogonaaliprojektio*, jos se on itseadjungoitu.

**Lause 3.3.** *Olkoon $P$ projektio. Tällöin saadaan seuraavat tulokset.*

*a)* $I - P$ *on projektio.*

*b)* $\operatorname{Im} P = \{x \in H \mid Px = x\}$.

*c)* $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I - P)$.

*d)* $H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.

*e) Jos $P$ on rajoitettu, niin* $\operatorname{Im} P$ *ja* $\operatorname{Ker} P$ *ovat suljettuja.*

*Todistus.* Olkoon $P$ projektio.

a) $(I - P)^2 = I^2 - P - P + P^2 = I - 2P + P = I - P$.

b) Olkoon $x \in \operatorname{Im} P$. Tällöin $Pz = x$ jollain $z \in H$. Koska $P$ on projektio, niin $Pz = Px$ eli $Px = x$. Siis $\operatorname{Im} P \subset \{x \in H \mid Px = x\}$. Selvästi $\{x \in H \mid Px = x\} \subset \operatorname{Im} P$, joten $\operatorname{Im} P = \{x \in H \mid Px = x\}$.

c) Nyt $x \in \operatorname{Im} P$ jos ja vain jos $Px = x$, joka on yhtäpitävää sen kanssa että $x - Px = 0$ eli $(I-P)x = 0$ ts. $x \in \operatorname{Ker}(I-P)$.

d) Olkoon $x \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im}(I-P)$. Tällöin $Px = x$ ja $(I-P)x = x$, sekä $x = (I-P)x = x - Px = x - x = 0$. Siis kyseessä on suora summa. Lisäksi, jos $z \in H$, niin sille on olemassa esitys $z = Pz + z - Pz = Pz + (I-P)z$. Siis $H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I-P)$.

e) Koska $P$ on rajoitettu, niin $\operatorname{Ker} P$ on suljetun joukon alkukuvana suljettu. Nyt myös operaattori $I-P$ on rajoitettu, joten $\operatorname{Im} P$ on suljettu *c)*-kohdan nojalla.

□

**Lause 3.4.** *Jos $M, N \subset H$ ovat lineaarisia aliavaruuksia ja $H = M \oplus N$, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen projektio $P : H \to H$, että $M = \operatorname{Im} P$ ja $N = \operatorname{Ker} P = \operatorname{Im}(I-P)$.*

*Todistus.* Olkoon $x \in H$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen esitys $x = m + n$, missä $m \in M$ ja $n \in N$. Määritellään operaattori $P$ asettamalla $Px = m$, jolloin $(I-P)x = n$. Nyt $P^2x = Pm = m$, joten $P$ todellakin on projektio ja lisäksi $x \in \operatorname{Ker} P$ jos ja vain jos $x \in N$ sekä $y \in \operatorname{Im} P$ vain, jos $y \in M$. Oletetaan, että $P_1$ ja $P_2$ ovat sellaisia projektioita, että $M = \operatorname{Im} P_1 = \operatorname{Im} P_2$ ja $N = \operatorname{Ker} P_1 = \operatorname{Ker} P_2$. Olkoon $x_1 = m_1 + n_1 \in H$. Tällöin $P_1 x_1 = m_1 = P_2 x_1$, joten $P_1 = P_2$ eli projektio on yksikäsitteinen. □

### 3.2.1 Suljetun graafin lauseesta

Olkoot $H_1$ ja $H_2$ Hilbert-avaruuksia (oleellista täydellisyys) ja $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$ lineaarinen kuvaus.

**Määritelmä 3.6.** Kuvauksen $T$ *graafi* on joukko

$$\mathcal{G}(T) = \{(x,y) \in H_1 \times H_2 \mid x \in \mathcal{D}(T),\ y = Tx\} = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Joukosta $H_1 \times H_2 = \{(x,y) \mid x \in H_1, y \in H_2\}$ saadaan Hilbert-avaruus, kun sisätulo määritellään asettamalla aina, kun $(x,y),(u,v) \in H_1 \times H_2$

$$\langle (x,y),(u,v)\rangle_{H_1\times H_2} = \langle x,u\rangle_{H_1} + \langle y,v\rangle_{H_2}.$$

Kuvauksen $T$ graafi $\mathcal{G}(T)$ on avaruuden $H_1 \times H_2$ lineaarinen aliavaruus.

**Määritelmä 3.7.** Lineaarinen kuvaus $T$ on *suljettu*, jos $\mathcal{G}(T)$ on suljettu tuloavaruudessa $H_1 \times H_2$.

Määritelmän nojalla $\mathcal{G}(T)$ on suljettu jos ja vain jos ehdosta $z = (x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ seuraa, että $z \in \mathcal{G}(T)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jos $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}(T)$ ja $z_n \to z$, niin $z \in \mathcal{G}(T)$. Näin saatiin todistettua seuraava lause.

**Lause 3.5.** *Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$ lineaarinen kuvaus. Tällöin $T$ on suljettu jos ja vain jos ehdoista $x_n \to x$, missä $(x_n) \subset \mathcal{D}(T)$, ja $Tx_n \to y$ seuraa että $x \in \mathcal{D}(T)$ ja $y = Tx$.*

**Lause 3.6.** *Jos $T \in \mathcal{B}(H)$, niin $T$ on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon $x_n \to x$ ja $Tx_n = y_n \to y$ eli $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Koska $T$ on jatkuva, niin $y = Tx$ ja täten $(x, y) = (x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$. □

**Lause 3.7** (Suljetun graafin lause)**.** *Jos $T : H_1 \to H_2$ ($H_1$, $H_2$ täydellisiä) on suljettu, niin $T$ on rajoitettu.*

*Todistus.* Katso [8, s. 292]. □

Suljetun graafin lauseen avulla voidaan todistaa seuraava lause.

**Lause 3.8.** *Olkoot $M$ ja $N$ suljettuja lineaarisia aliavaruuksia sekä $H = M \oplus N$. Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen rajoitettu projektio $P$, että $\operatorname{Im} P = M$ ja $\operatorname{Ker} P = N$.*

*Todistus.* Olkoon $P$ lauseen 3.4 mukainen projektio. Tarvitaan avaruuden $H$ täydellisyyttä. Suljetun graafin lauseen perusteella riittää osoittaa, että jos $u_n \to u$ ja $Pu_n \to v$ avaruudessa $H$, niin $v = Pu$. Osoitetaan siis, että $\mathcal{G}(P)$ on suljettu. Nyt $M$ on suljettu ja $(Pu_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$, joten $v \in M$. Lisäksi, koska $N$ on suljettu ja $(u_n - Pu_n)_{n=1}^{\infty} \subset N$, niin $u - v \in N$. Koska $u = v + (u - v)$, niin $Pu = v$. □

**Lause 3.9.** *Jos $P$ on ortogonaaliprojektio, niin $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P = \operatorname{Im}(I - P)$.*

*Todistus.* Nyt $u \in \operatorname{Im} P$ vain, jos $u = Pu$ ja vastaavasti $v \in \operatorname{Ker} P$ vain, jos $Pv = 0$. Täten

$$\langle u, v \rangle = \langle Pu, v \rangle = \langle u, P^* v \rangle = \langle u, Pv \rangle = 0.$$

□

Jokaista esitystä $H = M \oplus M^{\perp}$, missä $M$ on suljettu lineaarinen aliavaruus, vastaa siis sellainen yksikäsitteinen rajoitettu ortogonaaliprojektio $P_M : H \to H$, että $\operatorname{Im} P_M = M$ ja $\operatorname{Ker} P_M = M^{\perp}$.

**Määritelmä 3.8.** Lineaarinen aliavaruus $M \subset H$ on *invariantti* operaattorin $T \in \mathcal{B}(H)$ suhteen tai *$T$-invariantti*, jos

$$T(M) \subset M.$$

Lineaariset aliavaruudet $M = \{0\}$ ja $M = H$ totetuttavat määritelmän ehdot triviaalisti. Jos $T \in \mathcal{B}(H)$ on annettu, niin onko olemassa sellainen ei-triviaali lineaarinen aliavaruus $M$, että $T(M) \subset M$?

**Määritelmä 3.9.** Jako $H = M \oplus N$ *redusoi* operaattorin $T$, jos $M$ ja $N$ ovat invariantteja operattorin $T$ suhteen.

**Lause 3.10.** *Olkoon $P : H \to H$ rajoitettu projektio ja $M = \operatorname{Im} P$, $N = \operatorname{Ker} P$ sekä $T \in \mathcal{B}(H)$. Tällöin $PT = TP$ jos ja vain jos $M$ ja $N$ ovat invariantteja operaattorin $T$ suhteen.*

*Todistus.* Olkoon aluksi $PT = TP$. Kun $u \in M$, niin tämä on yhtäpitävää sen kanssa että $Pu = u$, joten $Tu = TPu = PTu \in M$. Vastaavasti kun $v \in N$, niin tämä on yhtäpitävää sen kanssa että $(I - P)v = v$, joten $Tv = T(I - P)v = Tv - TPv = Tv - PTv = (I - P)Tv \in N$.
Olkoon nyt $x \in H$ mielivaltainen. Vektorille $x$ on olemassa esitys $x = u+v$, missä $u \in M$ ja $v \in N$. Täten $TPx = Tu$ ja $PTx = P(Tu + Tv) = Tu$. □

Separoituvan Hilbert-avaruuden operaattorit voidaan esittää äärettöminä "matriiseina". Olkoon $\{e_1, e_2, \dots\}$ avaruuden $H$ ortonormaali kanta ja $T \in \mathcal{B}(H)$. Tällöin

$$Te_k = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\langle Te_k, e_j \rangle}_{a_{jk}} e_j \qquad [T] = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

### 3.2.2 Kompaktit operaattorit

Siirrytään tarkastelemaan kompakteja operaattoreita, jotka ovat sovellusten kannalta varsin tärkeitä.

**Määritelmä 3.10.** Olkoot $H_1$ ja $H_2$ lineaarisia normiavaruuksia. Lineaarinen operaattori $T$ on *kompakti*, jos jokaisen rajoitetun jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H_1$ kuvajonolla on suppeneva osajono $(Tx_{n_k})$ avaruudessa $H_2$.

Oletetaan jatkossa että $H_1, H_2$ ja $H$ ovat Hilbert-avaruuksia.

**Määritelmä 3.11.** Jos $\dim \operatorname{Im} T$ on äärellinen, niin sanotaan että $T$ on *äärellisasteinen*.

**Esimerkki 4.** Olkoon $P : H \to H$ jatkuva projektio. Tällöin $P$ on kompakti jos ja vain jos sen kuvajoukon aste on äärellinen. Erityisesti identiteettikuvaus on kompakti jos ja vain jos avaruus $H$ on äärellisulotteinen. Jos $H$ on äärellisulotteinen, niin $H \simeq \mathbb{K}^n$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$, joten rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono.

Jos $H$ on ääretönulotteinen ja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ ortonormaali jono, niin sillä ei ole suppenevaa osajonoa, koska

$$\|\varphi_n - \varphi_l\|^2 = \langle \varphi_n - \varphi_l, \varphi_n - \varphi_l \rangle = 2$$

aina, kun $n \neq l$.

**Esimerkki 5.** Jos $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ja $\dim \operatorname{Im} T$ on äärellinen, niin $T$ on kompakti.

*Todistus.* Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H_1$ rajoitettu jono. Koska $(Tx_n)_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{Im} T$ on rajoitettu ja $\dim \operatorname{Im} T$ on äärellinen, niin sillä on olemassa suppeneva osajono. □

Merkitään

$$\mathcal{K}(H_1, H_2) = \{T \in \mathcal{B}(H_1, H_2) \mid T \text{ kompakti}\}.$$

**Lause 3.11.** *$\mathcal{K}(H_1, H_2)$ on lineaarinen aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H_1$ rajoitettu jono ja $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ sekä $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Koska $T_1$ on kompakti, niin kuvajonolla $(T_1 x_n)$ on suppeneva osajono $(T_1 x_{n'})$. Vastaavasti operaattori $\alpha T_1$ on kompakti, sillä osajono $(\alpha T_1 x_{n'})$ suppenee. Edelleen, koska myös $T_2$ on kompakti ja $(x_{n'})$ on rajoitettu, niin kuvajonolla $(T_2 x_{n'})$ on suppeneva osajono $(T_2 x_{n''})$. Täten kuvajonolla $((\alpha T_1 + \beta T_2) x_n)$ on suppeneva osajono $((\alpha T_1 + \beta T_2) x_{n''})$ ja siis $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ on avaruuden $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ lineaarinen aliavaruus. □

**Lause 3.12.** *$\mathcal{K}(H_1, H_2)$ on suljettu.*

*Todistus.* Katso [10, s. 294]. □

**Lause 3.13.** *Olkoon $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(H)$. Tällöin $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{K}(H)$ ja $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{K}(H)$.*

*Todistus.* Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ rajoitettu jono. Koska $T_1$ ja $T_2$ ovat rajoitettuja, niin myös jonot $(T_1 x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(T_2 x_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat rajoitettuja. Koska operaattorit $T_1$ ja $T_2$ ovat kompakteja, niin kuvajonoilla $(T_1 T_2 x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(T_2 T_1 x_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppenevat osajonot. □

**Seuraus.** *Jos $T \in \mathcal{K}(H)$ ja $T^{-1}$ on olemassa, niin $T^{-1}$ on epäjatkuva kun $H$ on ääretönulotteinen.*

*Todistus.* Jos $T^{-1}$ on rajoitettu, niin $T \circ T^{-1} = I$ on kompakti, mikä on ristiriita (katso esimerkki 4). $\square$

**Lause 3.14.** *$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ jos ja vain jos $T^* \in \mathcal{K}(H_2, H_1)$.*

*Todistus.* Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $H_1 = H_2 = H$.
Olkoon $T \in \mathcal{K}(H)$ ja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ rajoitettu jono. Merkitään $\|x_n\| < C$. Koska $TT^*$ on kompakti, niin on olemassa suppeneva osajono $(TT^* x_{n_k})$. Täten

$$\begin{aligned}
\|T^* x_{n_k} - T^* x_{n_j}\|^2 &= \langle T^*(x_{n_k} - x_{n_j}), T^*(x_{n_k} - x_{n_j})\rangle \\
&= \langle TT^*(x_{n_k} - x_{n_j}), x_{n_k} - x_{n_j}\rangle \\
&\le \|TT^* x_{n_k} - TT^* x_{n_j}\| \underbrace{\|x_{n_k} - x_{n_j}\|}_{\le 2\mathrm{C}}.
\end{aligned}$$

Siis $(T^* x_{n_k})$ on Cauchy-jono, joten se suppenee. $\square$

Sovelluksissa hyödynnetään (lähes aina) avaruuksien *upotuksia*.

i) Olkoon $H_1 \subset H_2$. Kuvaus $i : H_1 \to H_2$, $i(x) = x$ aina, kun $x \in H_1$ on niin sanottu *luonnollinen upotus*. Selvästi upotus on injektiivinen. Upotus on jatkuva, jos on olemassa sellainen positiivinen vakio $K$, että aina, kun $x \in H_1$

$$\|i(x)\|_{H_2} \le K\|x\|_{H_1}.$$

ii) Olkoot $X$ ja $Y$ lineaarisia normiavaruuksia. Yleisemmin upotus on lineaarinen jatkuva injektio

$$\varphi : X \to Y.$$

Upotus on *kompakti*, jos $\varphi$ on kompakti ja *tiheä* jos $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa $Y$.

**Esimerkki 6.** Avaruus $\mathbb{R}$ voidaan upottaa avaruuteen $\mathbb{C}$ luonnollisella upotuksella $i$, missä $i(x) = x + i0$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Avaruus $R$ voidaan myös upottaa avaruuteen $\mathbb{R}^2$ asettamalla $i(x) = (x, 0)$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$.

**Esimerkki 7.** Rationaaliluvut voidaan upottaa reaalilukuihin tiheällä upotuksella $i$ asettamalla $i(x) = x$ aina, kun $x \in \mathbb{Q}$. Luonnollinen upotus $i$ jätetään usein merkitsemättä.

**Esimerkki 8.** Jos $\mathcal{X}$ on lineaarinen normiavaruus, niin on olemassa täydellinen lineaarinen normiavaruus (Banachin avaruus) $\hat{\mathcal{X}}$ ja sellainen lineaarinen isometria $\varphi : \mathcal{X} \to \hat{\mathcal{X}}$, että $\varphi(\mathcal{X})$ on tiheä avaruudessa $\hat{\mathcal{X}}$. Tällöin sanotaan että $\hat{\mathcal{X}}$

on avaruuden $\mathcal{X}$ *täydellistymä*. Yleensä $\mathcal{X}$ ja $\varphi(\mathcal{X})$ samaistetaan ($\mathcal{X} \simeq \varphi(\mathcal{X})$) ja merkitään

$$\mathcal{X} \subset \hat{\mathcal{X}} \text{ ja } \mathcal{X} \text{ tiheä avaruudessa } \hat{\mathcal{X}}.$$

Täydellistymä on kongruenssia vaille yksikäsitteinen (katso [1, s. 54]).

**Esimerkki 9.** Rationaalilukujen täydellistymä on kongruentti reaalilukujen joukon kanssa.

Osoitetaan seuraavassa lauseessa että jokaisen separoituvan reaalisen Banach-avaruuden "sisällä" on Hilbert-avaruus.

**Lause 3.15** (Browder-Tonin upotuslause)**.** *Olkoon $\mathcal{X}$ reaalinen separoituva Banach-avaruus. Tällöin on olemassa separoituva Hilbert-avaruus $H$ ja sellainen kompakti upotus $\varphi : H \to \mathcal{X}$, että $\varphi(H)$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{X}$.*

*Todistus.* Koska $\mathcal{X}$ on separoituva, niin on olemassa sellainen $S = \{v_1, v_2, \dots\} \subset \mathcal{X}$, että $\overline{\operatorname{sp} S} = \mathcal{X}$. Voidaan olettaa että $\{v_1, v_2, \dots\}$ on lineaarisesti vapaa joukko ja $\|v_k\|_{\mathcal{X}} = 1$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon $\vec{x} = (\alpha_k)_{k=1}^\infty \in l_2$, määritellään

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} v_k.$$

Osoitetaan aluksi, että $\Phi(\vec{x}) \in \mathcal{X}$ aina, kun $\vec{x} \in \ell_2$. Merkitään $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} v_k$ (kun $\vec{x} \in \ell_2$ kiinnitetty). Tällöin

$$\begin{aligned} \|s_{n+p} - s_n\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\alpha_k}{k} v_k \right\|_{\mathcal{X}} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\alpha_k|}{k} \|v_k\|_{\mathcal{X}} \\ &\le \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\vec{x}\|_{\ell_2}. \end{aligned}$$

Siis $(s_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ on Cauchy-jono ja koska $\mathcal{X}$ on täydellinen, niin se suppenee eli $\Phi(\vec{x}) \in \mathcal{X}$. Selvästi $\Phi : \ell_2 \to \mathcal{X}$ on lineaarinen ja arvioimalla kuten yllä saadaan

$$\|s_n\|_{\mathcal{X}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|\alpha_k|}{k} \le \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}} \left( \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|\vec{x}\|_{\ell_2}.$$

Merkitään $\Phi_n(\vec{x}) = s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k} v_k$ aina, kun $\vec{x} \in \ell_2$. Nyt siis

$$\|\Phi_n(\vec{x})\|_{\mathcal{X}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|\vec{x}\|_{\ell_2} \text{ aina, kun } n \in \mathbb{Z}_+,$$

joten kun $n \to \infty$, niin
$$\|\Phi(\vec{x})\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|\vec{x}\|_{\ell_2}.$$
Siis $\Phi$ on jatkuva. Osoitetaan seuraavaksi, että $\Phi$ on kompakti. Koska $\operatorname{Im}\Phi_n$ on äärellisulotteinen aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, niin $\Phi_n$ on kompakti. Lisäksi
$$\|\Phi(\vec{x}) - \Phi_n(\vec{x})\|_{\mathcal{X}} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\vec{x}\|_{\ell_2}.$$
Täten
$$\|\Phi - \Phi_n\| = \sup_{\|\vec{x}\|_{\ell_2} \leq 1} \|\Phi(\vec{x}) - \Phi_n(\vec{x})\|_{\mathcal{X}} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Siten $\Phi_n \to \Phi$ ja koska $\mathcal{K}(\ell_2, \mathcal{X})$ on suljettu, niin $\Phi$ on kompakti. On syytä huomata, että $\Phi : \ell_2 \to \mathcal{X}$ ei välttämättä ole injektio, sillä voi olla
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} v_k = 0,$$
vaikka $\vec{x} = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \neq 0$. Olkoon $\mathcal{W}_0 = \operatorname{Ker}\Phi \subset \ell_2$ ja $H = \mathcal{W}_0^{\perp} \simeq \ell_2/\mathcal{W}_0$ ja $\varphi = \Phi_{|H}$ kuvauksen $\Phi$ rajoittuma. Nyt $\varphi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})$ aina, kun $\vec{x} \in \mathcal{W}_0^{\perp} = H$ ja jos $\varphi(\vec{x}) = 0$, niin $\vec{x} \in \mathcal{W}_0^{\perp} \cap \mathcal{W}_0 = \{0\}$, joten $\varphi : H \to \mathcal{X}$ on injektio. Siis $\varphi : H \to \mathcal{X}$ on kompakti lineaarinen injektio. Osoitetaan nyt, että $\operatorname{Im}\varphi$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{X}$. Olkoon $P : \ell_2 \to H$ ortogonaaliprojektio ja $\{e_1, e_2, \dots\}$ avaruuden $\ell_2$ standardikanta. Kun $\vec{x} \in \ell_2$, niin
$$\vec{x} = P\vec{x} + (I - P)\vec{x},$$
joten
$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(P\vec{x}) + \Phi((I - P)\vec{x}) = \varphi(P\vec{x}).$$
Erityisesti $\Phi(\vec{e_j}) = \varphi(P\vec{e_j}) = \frac{v_j}{j}$ aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$, joten $\{v_1, v_2, \dots\} \subset \operatorname{Im}\varphi$. Täten $\operatorname{sp}\{v_1, v_2, \dots\} \subset \operatorname{Im}\varphi \subset \mathcal{X}$, jolloin $\mathcal{X} = \overline{\operatorname{sp} S} \subset \overline{\operatorname{Im}\varphi} \subset \mathcal{X}$. Siis $\operatorname{Im}\varphi$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{X}$. $\square$

# Luku 4

# Spektri ja ominaisarvot

Luvussa 1 käsiteltiin lineaarisen kuvauksen ominaisarvoja äärellisulotteisessa tapauksessa. Tällöin siis oli kyse kuvausta vastaavan matriisin ominaisarvojen määräämisestä. Äärellisulotteisessa tapauksessa lineaarisen kuvauksen spektri koostuu pelkistä ominaisarvoista. Siirrytään tarkastelemaan spektriä ja ominaisarvoja ääretönulotteisessa tapauksessa, jolloin tilanne monimutkaistuu huomattavasti. Olkoon $H$ ääretönulotteinen Hilbert-avaruus jonka kerroinkuntana on $\mathbb{C}$, ellei erikseen toisin mainita.

Aineisto tähän lukuun on koottu lähteistä [8] ja [10].

## 4.1 Ominaisarvoista

Operaattorin $T$ ominaisarvot ja ominaisvektorit määritellään ääretönulotteisessa tapauksessa samalla tavalla kuin äärellisulotteisessa tapauksessa. Siis $\lambda \in \mathbb{K}$ on operaattorin $T$ ominaisarvo, jos on olemassa sellainen nollavektorista eroava $x \in H$, että

$$Tx = \lambda x.$$

Tällöin $x$ on ominaisarvoa $\lambda$ vastaava ominaisvektori. Tarkastellaan seuraavaksi muutaman esimerkin avulla erilaisten operaattoreiden ominaisarvoja.

**Esimerkki 10** (*Right Shift*)**.** Olkoon $H = \ell_2$. Määritellään siirto-operaattori $S_R : \ell_2 \to \ell_2$ asettamalla aina, kun $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$

$$S_R(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Olkoot nyt $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $x \in \ell_2$ sellaisia, että $S_R x = \lambda x$. Nyt siis $(0, x_1, x_2, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$. Tämä voi olla voimassa ainostaan jos $\lambda x_1 = 0$, $\lambda x_2 = x_1$, $\lambda x_3 = x_2, \dots$ . Jos $\lambda = 0$, niin myös $x = 0$, joten 0 ei ole ominaisarvo. Jos taas $\lambda \neq 0$, niin tällöin $x_1 = 0$, jolloin taas $x = 0$ ja $\lambda$ ei ole ominaisarvo. Siis operaattorilla $S_R$ ei ole ainuttakaan ominaisarvoa.

**Esimerkki 11** (*Left Shift*)**.** Olkoon edelleen $H = \ell_2$. Määritellään siirto-operaattori $S_L : \ell_2 \to \ell_2$ asettamalla aina, kun $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$

$$S_L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Olkoot $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $x \in \ell_2$ sellaisia, että $S_L x = \lambda x$. Nyt $(x_2, x_3, \dots) = \lambda(x_1, x_2, \dots)$, mistä saadaan, että $\lambda x_1 = x_2$, $\lambda x_2 = x_3, \dots$ . Jos $\lambda = 0$, niin $x_2 = x_3 = \dots = 0$ ja $x = (x_1, 0, 0, \dots) = x_1 e_1$ on ominaisvektori. Siis 0 on ominaisarvo. Jos taas $\lambda \neq 0$ ja $x \neq 0$, niin $x_1 \neq 0$ ja $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda^2 x_1, \dots, x_k = \lambda^{k-1} x_1, \dots$ . Jotta $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ kelpaisi ominaisvektoriksi, on tutkittava milloin $x \in \ell_2$. Nyt

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^{2j}| < \infty$$

jos ja vain jos $|\lambda| < 1$ ts. $(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in \ell_2$ jos ja vain jos $|\lambda| < 1$. Siis jokainen $\lambda \in \mathbb{K}$, jolle pätee $|\lambda| < 1$, on operaattorin $S_L$ ominaisarvo.

**Esimerkki 12.** Olkoon nyt

$$H = L_2(]-\pi, \pi[) = \Big\{ f : ]-\pi, \pi[ \to \mathbb{C} \mid f \text{ mitallinen, } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \Big\},$$

missä $f = g$, mikäli $f(x) = g(x)$ melkein kaikkialla välillä $[-\pi, \pi]$. Määritellään sisätulo

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt \text{ ja vastaava normi } \|f\|_{L_2}^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Erityisesti $\|f\| = 0$ jos ja vain jos $f(x) = 0$ melkein kaikkialla välillä $[-\pi, \pi]$. Olkoon

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \text{ missä } n \in \mathbb{Z}.$$

Tällöin joukko $\big\{ \varphi_n(t) \mid n \in \mathbb{Z} \big\}$ on avaruuden $L_2(]-\pi, \pi[)$ ortonormaali kanta (Fourier-kanta). Määritellään operaattori $T$ asettamalla aina, kun $t \in ]-\pi, \pi[$

$$(Tf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(t - s) f(s) ds.$$

Selvästi operaattori $T$ on lineaarinen. Kun $f \in L_2$, niin

$$\begin{aligned} |(Tf)(t)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\cos^5(t-s)|}_{\leq 1}|f(s)|ds \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot |f(s)|ds \\ &\leq (\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 ds)^{\frac{1}{2}}(\int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi}\|f\|_{L_2} \text{ aina, kun } t \in ]-\pi, \pi[. \end{aligned}$$

Tästä saadaan, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} |(Tf)(t)|^2 dt \leq 2\pi\|f\|_{L_2}^2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dt}_{2\pi},$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\|Tf\|_{L_2} \leq 2\pi\|f\|_{L_2}.$$

Siis operaattori $T$ on rajoitettu eli $T \in \mathcal{B}(H)$. Lisäksi

$$\|T\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\| \leq 2\pi.$$

Nyt

$$\begin{aligned} (T\varphi_n)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(t-s)\varphi_n(s)ds \\ &= \int_{t+\pi}^{t-\pi} \cos^5 u \varphi_n(t-u)(-du) \\ &= \int_{t-\pi}^{t+\pi} \cos^5 u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in(t-u)} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \cos^5 u e^{-inu} du \\ &= e^{int} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5 u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inu} du.}_{\in \mathbb{C} \text{ vakio}} \end{aligned}$$

Merkitään

$$\lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^5 u e^{-inu} du,$$

jolloin $T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Osoitetaan vielä, että operaattorilla $T$ ei ole muita ominaisvektoreita. Edellä olevan mukaan operaattorin $T$ jo löydetyt ominaisvektorit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ muodostavat avaruuden $H$ ortonormaalin kannan. Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$ nollasta eroava, $Tf = \lambda f$ ja

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Tällöin

$$Tf = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_n \rangle T\varphi_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

jos ja vain jos $\lambda_n \langle f, \varphi_n \rangle = \lambda \langle f, \varphi_n \rangle$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}$. Jos $\lambda \neq \lambda_n$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}$, niin $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ jokaiselle $n$, toisin sanoen, $f = 0$. Tällöin siis $f$ ei voi määritelmän nojalla olla ominaisvektori.

## 4.2 Spektri ja resolventti

Äärellisulotteisessa tapauksessa spektri $\sigma(T)$ tarkoittaa ominaisarvoja ja lineaarisen kuvauksen $T : X \to Y$, missä $X$ ja $Y$ ovat äärellisulotteisia lineaarisia avaruuksia, spektrissä on äärellinen määrä ominaisarvoja. Äärettönulotteisessa tapauksessa paras lähtökohta on tarkastella joukkoa, jossa $\lambda I - T$ on kääntyvä eli $(\lambda I - T)^{-1}$ on olemassa ja rajoitettu. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen kuvaus.

**Määritelmä 4.1.** Operaattorin $T$ *resolventti* on joukko

$$\rho(T) = \big\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} = H \text{ ja } \lambda I - T \text{ on kääntyvä} \big\}.$$

**Määritelmä 4.2.** Operaattorin $T$ *spektri* on joukko

$$\sigma(T) = \big\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \notin \rho(T) \big\}.$$

**Määritelmä 4.3.** Alkion $\lambda \in \rho(T)$ *resolventtioperaattori* on $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$.

Kun $\lambda \in \rho(T)$, niin resolventtioperaattori $R_\lambda$ on lineaarinen ja rajoitettu. Voidaan osoittaa, että jos $M \subset H$ on lineaarinen aliavaruus ja $T : M \to H$ rajoitettu lineaarinen kuvaus, niin on olemassa yksikäsitteinen rajoitettu lineaarinen laajennus $T_1 : \overline{M} \to H$ (katso [8, s. 100]). Koska $\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ on tiheä avaruudessa $H$, niin resolventtioperaattori $R_\lambda$ voidaan laajentaa yksikäsitteisesti koko avaruuteen $H$ ja merkitä tätä laajennusta edelleen $(\lambda I - T)^{-1}$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\rho(T) = \big\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda I - T)^{-1} : H \to H \text{ on olemassa ja rajoitettu } \big\}.$$

Yleensä oppikirjoissa oletetaan, että $T$ on suljettu (eli $\mathcal{G}(T)$ on suljettu), jolloin myös $\lambda I - T$ on suljettu. Tällöin $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ on suljettu, jos $(\lambda I - T)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda I - T) \to H$ on rajoitettu. Kun $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ on suljettu ja tiheä, niin $\mathrm{Im}(\lambda I - T) = H$. Yleensä oletetaan myös, että $T$ on tiheästi määritelty eli $\mathcal{D}(T)$ on tiheä avaruudessa $H$. Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ tiheästi määritelty ja suljettu. Tällöin

$$\rho(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I - T \text{ kääntyvä}\big\}.$$

Siis kun $\lambda \in \rho(T)$, niin $\lambda I - T$ on bijektio ja $(\lambda I - T)^{-1}$ on jatkuva.

**Huomautus.** Jos $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, missä $X$ ja $Y$ ovat Banach-avaruuksia, ja lisäksi $T$ on bijektio, niin Avoimen kuvauksen lauseen nojalla $T^{-1} : Y \to X$ on automaattisesti rajoitettu.

Seuraavan lauseen avulla voidaan osoittaa, että rajoitetun lineaarisen operaattorin $T$ spektri sisältyy kompleksitason kiekkoon jonka säde on $\|T\|$. Tällöin siis resolventti on aina epätyhjä.

**Lause 4.1.** *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ ja $\|T\| < 1$. Tällöin $I - T$ on kääntyvä ja lisäksi*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots .$$

*Todistus.* Merkitään

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k = I + T + T^2 + \cdots + T^n \in \mathcal{B}(H).$$

Avaruus $\mathcal{B}(H)$ on täydellinen ja

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} T^k\| \overset{\triangle - ey}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} \|T^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|T\|^k \longrightarrow 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Siis $(S_n) \subset \mathcal{B}(H)$ on Cauchy-jono, joten se suppenee. Merkitään

$$S = \lim S_n = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \in \mathcal{B}(H).$$

Nyt

$$TS = ST = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1},$$

joten $(I - T)S = S - TS = I$ ja $S(I - T) = S - ST = I$ eli $S = (I - T)^{-1}$. $\square$

**Seuraus** (1). *$\sigma(T) \subset \mathbb{K}$ on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon $\lambda \in \rho(T)$, jolloin $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ on olemassa ja rajoitettu. Nyt

$$\mu I - T = (\mu - \lambda)I + (\lambda I - T) = (\lambda I - T)(I + (\mu - \lambda)R_\lambda).$$

Kun $|\mu - \lambda|\|R_\lambda\| < 1$, niin edellisen lauseen nojalla $I + (\mu - \lambda)R_\lambda$ on kääntyvä. Joten $(\mu I - T)^{-1} = (I + (\mu - \lambda)R_\lambda)^{-1}R_\lambda \in \mathcal{B}(H)$ eli $\mu \in \rho(T)$. Siis $\rho(T)$ avoin ja näin ollen $\sigma(T)$ on suljettu. □

**Seuraus** (2). *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$. Tällöin*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

*Todistus.* Kun $|\lambda| > \|T\|$, niin $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ ja tällöin $I - \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)$ on kääntyvä eli $\lambda \in \rho(T)$. □

Edellisen seurauksen nojalla seuraava määritelmä on mielekäs.

**Määritelmä 4.4.** Operaattorin $T \in \mathcal{B}(H)$ *spektraalisäde* on

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Voidaan osoittaa, että (katso [10, s. 280])

$$r_\sigma(T) = \limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**Lause 4.2.** *Jos $H$ on kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{B}(H)$, niin $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

*Todistus.* Katso [10, s. 278]. □

## 4.3 Operaattorin tilat

Äärettönulotteisessa tapauksessa operaattorin $T$ spektri voi koostua muistakin kuin ominaisarvoista. Otetaan tästä syystä käyttöön operaattorin tilat, joista kolme ensimmäistä luonnehtivat surjektiivisuutta ja kolme jälkimmäistä käänteiskuvausta. Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen kuvaus ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Operaattori $\lambda I - T$ voi olla seuraavissa tiloissa:

$I$ $\operatorname{Im}(\lambda I - T) = H$,
$II$ $\operatorname{Im}(\lambda I - T) \neq H$, $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} = H$,
$III$ $\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - T)} \neq H$,

1. $(\lambda I - T)^{-1}$ on olemassa ja jatkuva,

2. $(\lambda I - T)^{-1}$ on olemassa ja epäjatkuva,
3. $(\lambda I - T)^{-1}$ ei ole olemassa.

Siis operaattori $\lambda I - T$ on jossakin seuraavista yhdeksästä tilasta: $I_1$, $I_2$, $I_3$, $II_1$, $II_2$, $II_3$, $III_1$, $III_2$ tai $III_3$. Kun $\lambda \in \rho(T)$, niin operaattori $\lambda I - T$ on tilassa $I_1$ tai $II_1$. Spektrille jää siis 7 eri tilaa. Jaotellaan spektri kolmeen pistevieraaseen joukkoon tilojen avulla.

**Määritelmä 4.5.** *Pistespektri* eli ominaisarvot $\sigma_P(T)$ koostuu niistä alkioista $\lambda$ joilla operaattori $\lambda I - T$ on tilassa $I_3$, $II_3$ tai $III_3$.

**Määritelmä 4.6.** *Jatkuva spektri* $\sigma_C(T)$ koostuu niistä alkioista $\lambda$, joilla operaattori $\lambda I - T$ on tilassa $I_2$ tai $II_2$.

**Määritelmä 4.7.** *Residuaalispektri* $\sigma_R(T)$ alkiolla $\lambda$ operaattori $\lambda I - T$ on tilassa $III_1$ tai $III_2$.

Nyt $\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T)$ ja osa joukoista $\sigma_P(T)$, $\sigma_C(T)$ ja $\sigma_R(T)$ voivat olla tyhjiä.

Oletetaan, että $T \in \mathcal{B}(H)$.

**Aputulos.** *Olkoon $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ suljettu ja $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (injektio). Tällöin $A^{-1}$ on jatkuva jos ja vain jos $\operatorname{Im} A$ on suljettu.*

*Todistus.* Katso [10, s. 216]. □

Erityisesti, jos $A \in \mathcal{B}(H)$, on myös $A$ suljettu. Jos $\lambda \in \rho(T)$, niin $(\lambda I - T)^{-1} : \operatorname{Im}(\lambda I - T) \to H$ on jatkuva. Aputuloksen nojalla $\operatorname{Im}(\lambda I - T)$ on suljettu, joten $\operatorname{Im}(\lambda I - T) = H$. Nyt siis

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda I - T)^{-1} : H \to H \text{ on olemassa ja jatkuva } \right\}$$

ja näin ollen $\lambda \in \rho(T)$ jos ja vain jos operaattori $(\lambda I - T)$ on tilassa $I_1$. Pistespektrille jää tilat $I_3$, $II_3$, $III_3$ ja jatkuvalle spektrille $II_2$, sillä tila $I_2$ ei ole mahdollinen koska tällöin aputuloksen nojalla $(\lambda I - T)^{-1}$ olisi jatkuva.

Saatiis siis seuraava lause.

**Lause 4.3.** *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$.*

*a)* $\lambda \in \rho(T)$ *jos ja vain jos operaattori* $\lambda I - T$ *on tilassa* $I_1$.
*b)* $\lambda \in \sigma_P(T)$ *jos ja vain jos operaattori* $\lambda I - T$ *on tilassa* $I_3$, $II_3$ *tai* $III_3$.
*c)* $\lambda \in \sigma_C(T)$ *jos ja vain jos operaattori* $\lambda I - T$ *on tilassa* $II_2$.
*d)* $\lambda \in \sigma_R(T)$ *jos ja vain jos operaattori* $\lambda I - T$ *on tilassa* $III_1$ *tai* $III_2$.

**Esimerkki 13.** Jatketaan aikaisemmin esiteteltyjen siirto-operaattoreiden $S_L$ ja $S_R$ tarkastelua. Nyt $\|S_L(x)\| \leq \|x\|$ aina, kun $x \in \ell_2$ ja $S_L e_k = e_{k-1}$, joten

$$\|S_L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|S_L x\| = 1.$$

Operaattorille $S_R$ $\|S_R x\| = \|x\|$ aina, kun $x \in \ell_2$, joten normin määritelmän nojalla $\operatorname{Ker} S_R = \{0\}$. Operaattori $S_L x = 0$ jos ja vain jos $x_2 = x_3 = \ldots = 0$, joten $\operatorname{Ker} S_L = \operatorname{sp}\{e_1\}$. Selvästi $\operatorname{Im} S_L = \ell_2$ ja $\operatorname{Im} S_R = \overline{\operatorname{sp}\{e_2, e_3, \ldots\}}$. Nyt aina, kun $x, y \in \ell_2$

$$\langle S_L x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} \bar{y}_k = \sum_{j=2}^{\infty} x_j \bar{y}_{j-1} = \langle x, S_L^* y \rangle,$$

joten $S_L^* y = (0, y_1, y_2, \ldots) = S_R y$. Siis $S_L^* = S_R$ ja $S_R^* = S_L^{**} = S_L$. Aikaisemmin todettiin että operaattorin $S_L$ ominaisarvot ovat joukon

$$\big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\big\}$$

alkiot ja että operaattorilla $S_R$ ei ole ominaisarvoja. Yleisesti pätee, että jos $|\lambda| > \|T\|$ ja $T \in \mathcal{B}(H)$, niin $\lambda \in \rho(T)$. Siis

$$\big\{\lambda \mid |\lambda| > 1\big\} \subset \rho(S_R) \text{ ja } \big\{\lambda \mid |\lambda| > 1\big\} \subset \rho(S_L).$$

Yleisesti pätee myös, että $\sigma(T)$ suljettu, joten koska $\big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\big\} \subset \sigma(S_L)$, niin

$$\big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\big\} = \sigma(S_L).$$

Samoin $\sigma(S_R) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\big\}$. Nyt

$$\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - S_L)} = \operatorname{Ker}(\lambda I - S_R)^{\perp} \text{ ja } \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - S_R)} = \operatorname{Ker}(\lambda I - S_L)^{\perp}.$$

Koska operaattorilla $S_R$ ei ole ominaisarvoja, niin $\operatorname{Ker}(\lambda I - S_R) = \{0\}$ ja näin ollen aina, kun $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - S_L)} = \{0\}^{\perp} = \ell_2.$$

Tarkastellaan operaattorin $S_L$ spektrin rakennetta. Koska operaattorin $S_L$ ominaisarvot ovat kaikki ne luvut $\lambda$, joille $|\lambda| < 1$, niin pistespektri

$$\sigma_P(S_L) = \big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\big\}.$$

Olkoon nyt $|\lambda| = 1$, jolloin ainut mahdollinen tila on $II_2$ eli tällöin on kyseessä jatkuva spektri. Saatiin siis operaattorin $S_L$ spektrille jako

$$\sigma_P(S_L) = \big\{\lambda \mid |\lambda| < 1\big\},\ \sigma_C(S_L) = \big\{\lambda \mid |\lambda| = 1\big\} \text{ ja } \sigma_R(S_L) = \emptyset.$$

Määrätään seuraavaksi operaattorin $S_R$ spektrin rakenne. Koska operaattorilla $S_R$ ei ole ominaisarvoja, niin $\sigma_P(S_R) = \emptyset$. Kun $|\lambda| < 1$, on $\operatorname{Ker}(\lambda I - S_R) = \{0\}$ ja

$$\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - S_R)} = \operatorname{Ker}(\lambda I - S_L)^\perp \neq \ell_2,$$

joten mahdolliset tilat ovat $III_1$ tai $III_2$, toisin sanoen, $\lambda \in \sigma_R(S_R)$. Siis $\big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\big\} \subset \sigma_R(S_R)$. Kun $|\lambda| = 1$, niin $\operatorname{Ker}(\lambda I - S_R) = \{0\}$ ja

$$\overline{\operatorname{Im}(\lambda I - S_R)} = \operatorname{Ker}(\lambda I - S_L)^\perp = \ell_2,$$

joten operaattori $\lambda I - S_R$ on tilassa $II_2$ eli $\lambda \in \sigma_C(S_R)$. Operaattorin $S_R$ spektrille saatiin siis jako

$$\sigma_P(S_R) = \emptyset,\ \sigma_C(S_R) = \big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\big\} \text{ ja } \sigma_R(S_R) = \big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| < 1\big\}.$$

Erityisesti huomataan, että $\sigma(S_R) = \sigma(S_L)$.

**Huomautus.** Yleisesti on voimassa, että $\sigma(T) = \sigma(T^*)$, kun $T \in \mathcal{B}(H)$, mutta spektrin jako voi olla erilainen.

# Luku 5

# Spektraalilause ja eräitä seurauksia

Oletetaan edelleen että $H$ on ääretönulotteinen kompleksikertoiminen separoituva Hilbert-avaruus, ellei erikseen toisin mainita. Osoitetaan aluksi, että kun $T \in \mathcal{B}(H)$ on kompakti ja itseadjungoitu, niin sille saadaan spektraaliesitys. Siis on olemassa sellainen avaruuden $H$ ortonormaali joukko $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ja sellaiset luvut $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , että

$$T\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \ , \ i \geq 1.$$

Käydään läpi joitain spektraaliesityksen seurauksia ja pyritään muotoilemaan normaaleille ja kompakteille operaattoreille spektraaliesityksen kaltaiset esitykset. Käsitellään luvun lopuksi reaalisen Hilbert-avaruuden laajentaminen kompleksiseksi eli avaruuden $H$ kompleksifikaatiota.

Materiaali tähän lukuun on koottu lähteistä [1] ja [5].

## 5.1 Kompaktit itseadjungoidut operaattorit

**Lause 5.1.** *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ itseadjungoitu. Tällöin seuraavat tulokset ovat voimassa.*

*a) Jos $\lambda$ on operaattorin $T$ ominaisarvo, niin $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*b) Erisuuria ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa.*

*Todistus.* Olkoot $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ operaattorin $T$ erisuuria ominaisarvoja sekä $x_1$ ja $x_2$ niitä vastaavat ominaisvektorit.

a) $\lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_1 \rangle = \langle Tx_1, x_1 \rangle = \langle x_1, T^* x_1 \rangle = \langle x_1, Tx_1 \rangle = \langle x_1, \lambda_1 x_1 \rangle = \bar{\lambda}_1 \|x_1\|^2$.

b) $\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle$ eli $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x_1$ ja $x_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

□

**Lause 5.2.** *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ itseadjungoitu. Tällöin seuraavat tulokset ovat voimassa.*

*a)* $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$.

*b) Jos $\langle Tx, x\rangle = 0$ aina, kun $x \in H$, niin $T = 0$.*

*Todistus.* a) Merkitään

$$m = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Kun $\|x\| = 1$, niin

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \leq \|T\|.$$

Joten $m \leq \|T\|$. Osoitetaan seuraavaksi, että $m \geq \|T\|$. Olkoot $x, y \in H$ mielivaltaisia. Tällöin

$$\langle T(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Tx, y\rangle \pm 2\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle,$$

mistä saadaan suoraan laskemalla, että

$$4\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle.$$

Oletetaan aluksi, että $x \pm y \neq 0$. Soveltamalla suunnikassääntöä ja luvun $m$ määritelmää saadaan, että

$$\begin{aligned}
4\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle &\leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle| \\
&= \|x+y\|^2 |\langle T(\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x+y}{\|x+y\|}\rangle| + \|x-y\|^2 |\langle T(\frac{x-y}{\|x-y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|}\rangle| \\
&\leq m\|x+y\|^2 + m\|x-y\|^2 \\
&= 2m(\|x\|^2 + \|y\|^2). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Helposti nähdään, että tulos on voimassa myös kun $x+y = 0$ tai $x-y = 0$. Nyt $\langle Tx, y\rangle = |\langle Tx, y\rangle| e^{i\theta}$ jollain reaaliluvulla $\theta$. Korvaamalla yhtälössä (1) $x$ vektorilla $e^{-i\theta}x$ saadaan

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \frac{m}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2). \qquad (2)$$

Oletetaan että $Tx \neq 0$. Sijoittamalla yhtälöön (2) $y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx$ saadaan

$$\|Tx\|\|x\| \leq m\|x\|^2.$$

Täten $\|Tx\| \leq m\|x\|$ aina, kun $x \in H$ ja $\|T\| \leq m$.

b) Seuraa suoraan *a)*-kohdasta ja normin ominaisuuksista.

□

**Lause 5.3.** *Olkoon $T$ itseadjungoitu.*

*a) Olkoon*

$$\lambda = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

*Jos on olemassa sellainen $x_0 \in H$, että $\|x_0\| = 1$ ja $\lambda = \langle Tx_0, x_0\rangle$, niin $\lambda$ on operaattorin $T$ ominaisarvo ja $x_0$ vastaava ominaisvektori.*

*b) Olkoon*

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

*Jos on olemassa sellainen $x_1 \in H$, että $\|x_1\| = 1$ ja $\mu = \langle Tx_1, x_1\rangle$, niin $\mu$ on operaattorin $T$ ominaisarvo ja $x_1$ vastaava ominaisvektori.*

*Todistus.* a) Nyt aina, kun $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $v \in H$ ovat sellaisia, että $x_0 + \alpha v \neq 0$, niin on voimassa, että

$$\langle T(\frac{x_0 + \alpha v}{\|x_0 + \alpha v\|}), \frac{x_0 + \alpha v}{\|x_0 + \alpha v\|}\rangle \geq \lambda,$$

joten jokaiselle $\alpha$ ja $v$ pätee

$$\langle T(x_0 + \alpha v), x_0 + \alpha v\rangle \geq \lambda\langle x_0 + \alpha v, x_0 + \alpha v\rangle.$$

Kertomalla sisätulot auki saadaan epäyhtälö

$$2\operatorname{Re}\alpha\langle v, Tx_0 - \lambda x_0\rangle + |\alpha|^2\langle Tv - \lambda v, v\rangle \geq 0. \tag{1}$$

Valitsemalla $\alpha = w\overline{\langle v, Tx_0 - \lambda x_0\rangle}$, missä $w \in \mathbb{R}$, epäyhtälö tulee muotoon

$$|\langle v, Tx_0 - \lambda x_0\rangle|^2(2w + |w|^2\langle Tv - \lambda v, v\rangle) \geq 0.$$

Jos $\langle Tv - \lambda v, v\rangle \leq 0$, niin valitsemalla $w < 0$ saadaan, että

$$2w + |w|^2\langle Tv - \lambda v, v\rangle < 0.$$

Vastaavasti, jos $\langle Tv - \lambda v, v\rangle > 0$, valitsemalla

$$w = -\frac{1}{\langle Tv - \lambda v, v\rangle}$$

saadaan sama tulos. Jotta epäyhtälö (1) olisi voimassa aina, kun $\alpha \in \mathbb{C}$, on oltava

$$\langle v, Tx_0 - \lambda x_0\rangle = 0.$$

Koska $v$ oli mielivaltainen, niin $Tx_0 - \lambda x_0 = 0$ ja siis $\lambda$ on ominaisarvo ja $x_0$ sitä vastaava ominaisvektori.

b) Seuraa $a$)−kohdasta soveltamalla operaattoriin $-T$.

□

Seuraava lause osoittaa, että jokaisella kompaktilla itseadjungoidulla operaattorilla on ainakin yksi ominaisarvo.

**Lause 5.4.** *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakti ja itseadjungoitu. Tällöin*

*a) $\|T\|$ tai $-\|T\|$ on operaattorin $T$ ominaisarvo.*
*b) Spektraalisäde $r_\sigma(T) \overset{\text{määr.}}{=} \sup\big\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\big\} = \|T\|$.*

*Todistus.* a) Jos $T = 0$, niin väite on totta. Oletetaan, että $T \neq 0$. Koska

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|,$$

niin on olemassa sellainen jono $(x_n)_{n=1}^\infty \subset H$ ja reaaliluku $\lambda$, että $\|x_n\| = 1$, $|\lambda| = \|T\| \neq 0$ ja $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$. Nyt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0. \end{aligned}$$

Täten

$$Tx_n - \lambda x_n \to 0. \tag{1}$$

Koska $T$ on kompakti niin kuvajonolla $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ on suppeneva osajono $(Tx_{n_k})$, joka siis suppenee kohti jotain vektoria $y \in H$. Tästä ja yhtälöstä (1) seuraa, että $x_{n_k} \to \frac{1}{\lambda}y$ ja koska $T$ on jatkuva, niin

$$y = \lim_{n\to\infty} Tx_{n_k} = \frac{1}{\lambda}Ty.$$

Täten $Ty = \lambda y$ ja $y \neq 0$, koska $\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| = \|T\|$. Siis $\lambda$ on operaattorin $T$ ominaisarvo.

b) Nyt $a$)-kohdan nojalla operaattorilla $T$ on olemassa sellainen ominaisarvo $\lambda$, että $|\lambda| = \|T\|$. Tämän ja lauseen 4.1 toisen seurauksen nojalla väite on totta.

□

**Huomautus.** Jos $T \in \mathcal{B}(H)$ ja $T$ kompakti, mutta ei itseadjungoitu, niin on mahdollista, että operaattorilla $T$ ei ole ominaisarvoja.

Esitetään ja todistetaan seuraavaksi spektraaliesitys kompakteille itseadjungoiduille operaattoreille.

**Lause 5.5** (Spektraaliesitys). *Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakti ja itseadjungoitu. Tällöin on olemassa sellainen jono nollasta eriäviä ominaisarvoja $\|T\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ ja vastaavat ortonormaalit ominaisvektorit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots,$ että*

$$Tx = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

*aina, kun $x \in H$. Jos $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ on ääretön jono, niin $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

*Todistus.* Olkoon $H_1 = H$ ja $T_1 = T$. Lauseen 5.4 *a)*-kohdan nojalla on olemassa operaattorin $T_1$ sellainen ominaisarvo $\lambda_1$ ja sitä vastaava ominaisvektori $\varphi_1$, että $\|\varphi_1\| = 1$ ja $|\lambda_1| = \|T_1\|$. Nyt $H_2 = \{\varphi_1\}^\perp$ on avaruuden $H_1$ suljettu aliavaruus ja jos $u \in H_2$, niin

$$\langle Tu, \varphi_1 \rangle = \langle u, T\varphi_1 \rangle = \langle u, \lambda_1 \varphi_1 \rangle = \lambda_1 \langle u, \varphi_1 \rangle = 0,$$

eli $Tu \in H_2$. Täten $T(H_2) \subset H_2$. Olkoon $T_2$ operaattorin $T$ rajoittuma avaruuteen $H_2$. Tällöin $T_2$ on kompakti itseadjungoitu operaattori avaruudessa $\mathcal{B}(H_2)$. Jos $T_2 \neq 0$, niin sillä on olemassa ominaisarvo $\lambda_2$ ja vastaava sellainen ominaisvektori $\varphi_2$, että $\|\varphi_2\| = 1$. Lisäksi

$$|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T_1\| = |\lambda_1|.$$

Selvästi $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ on ortonormaali joukko. Nyt $H_3 = \{\varphi_1, \varphi_2\}^\perp$ on avaruuden $H$ suljettu aliavaruus ja $H_3 \subset H_2$. Lisäksi jos $u \in H_3$, niin

$$\langle Tu, \varphi_i \rangle = \langle u, T\varphi_i \rangle = \langle u, \lambda_i \varphi_i \rangle = \lambda_i \langle u, \varphi_i \rangle = 0, \ i = 1, 2,$$

eli $T(H_3) \subset H_3$. Olkoon $T_3$ operaattorin $T$ rajoittuma joukkoon $H_3$, jolloin $T_3$ on kompakti itseadjungoitu operaattori avaruudessa $\mathcal{B}(H_3)$. Jatkamalla tällä tavalla prosessi joko päättyy, kun $T_n = 0$ jollain $n$ tai saadaan jono $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ operaattorin $T$ ominaisarvoja ja ortonormaali joukko $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ vastaavia ominaisvektoreita, joille

$$|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| \leq \|T_n\| = |\lambda_n|, \ n = 1, 2, \dots .$$

Osoitetaan seuraavaksi, että jos $(\lambda_n)$ on ääretön jono, niin $\lambda_n \to 0$. Tehdään vastaoletus että $\lambda_n \nrightarrow 0$. Koska $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Täten kun $n \neq m$, niin

$$\|T\varphi_n - T\varphi_m\|^2 = \|\lambda_n \varphi_n - \lambda_m \varphi_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 > \varepsilon^2.$$

Tämä on ristiriita sillä $T$ on kompakti ja täten jonolla $(T\varphi_n)$ on suppeneva osajono. Todistetaan seuraavaksi lauseen esitys. Olkoon $x \in H$ kiinnitetty. Tarkastellaan aluksi tapausta $T_n = 0$ jollain $n$. Koska

$$x_n = x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

on kohtisuorassa vektoreita $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vastaan, niin $x_n \in H_{n+1} \subset H_n$. Täten

$$0 = T_n x_n = Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

eli

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Olkoon nyt $T_n \neq 0$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Edellisen tarkastelun nojalla

$$\begin{aligned} \|Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k\| &= \|T_n x_n\| \leq \|T_n\| \|x_n\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n\| \leq |\lambda_n| \|x\| \to 0, \end{aligned}$$

eli

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

□

**Huomautus.** Koska $\sigma(T)$ on suljettu, niin $0 \in \sigma(T)$ mikäli jono $(\lambda_k)$ on ääretön. Luku 0 voi olla ominaisarvo tai ei.

## 5.2 Spektraaliesityksen seurauksia

Tarkastellaan eräitä spektraaliesityksen seurauksia ja sovelluksia. Oletetaan, että $T \in \mathcal{B}(H)$ on kompakti ja itseadjungoitu.

a) Nyt siis $T\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ eli jokainen $\varphi_k = T(\frac{\varphi_k}{\lambda_k}) \in \operatorname{Im} T$, joten $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \operatorname{Im} T$. Koska $\operatorname{Im} T$ on lineaarinen aliavaruus, niin $\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \operatorname{Im} T$, joten $\overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}} \subset \overline{\operatorname{Im} T}$. Oletetaan toisaalta, että $y \in \operatorname{Im} T$ eli toisin sanoen, $y = Tx$ jollain $x \in H$. Siis

$$y = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \in \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}},$$

joten $\operatorname{Im} T \subset \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}}$ ja näin ollen myös $\overline{\operatorname{Im} T} \subset \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}}$. Siis $\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \}}$ eli $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ on avaruuden $\overline{\operatorname{Im} T}$ ortonormaali kanta.

b) Yleisesti $\overline{\operatorname{Im} T} = \operatorname{Ker}(T^*)^\perp = (\operatorname{Ker} T)^\perp$, joten $\operatorname{Ker} T \perp \overline{\operatorname{Im} T}$. Jos $\operatorname{Ker} T$ on separoituva niin sillä on ortonormaali kanta $\{\phi_j\}_{j\geq 1}$ jolloin avaruuden $H$ ortonormaali kanta on $\{\phi_j\} \cup \{\varphi_k\}$.

**Huomautus.** Jos $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, niin $\{\varphi_k\}$ on avaruuden $H$ ortonormaali kanta eli $H$ on separoituva.

c) Operaattorin $T$ rajoittuma $T|_{\overline{\operatorname{Im} T}} : \overline{\operatorname{Im} T} \to \overline{\operatorname{Im} T}$ on injektio ja spektraaliesitystä vastaava matriisi on diagonaalinen.

d) Olkoon $\lambda$ operaattorin $T$ ominaisarvo. Tällöin $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ tai $\lambda = 0$.

*Todistus.* Jos $\lambda \neq 0$, niin on olemassa sellainen $z \neq 0$, että $Tz = \lambda z$, jolloin $z = T(\frac{z}{\lambda}) \in \operatorname{Im} T \subset \overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}}$. Tällöin

$$z = \sum_{k\geq 1} \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Mikäli $\lambda \neq \lambda_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$, niin $z \perp \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, jolloin $z = 0$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Siis $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. □

Oletetaan jatkossa, että $H$ on separoituva ääretönulotteinen Hilbert-avaruus.

a) Ominaisavaruus $\operatorname{Ker}(\lambda_k I - T)$ on äärellisulotteinen aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$.

*Todistus.* Olkoon $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \operatorname{Ker}(\lambda_k I - T)$ ts. $\lambda_k x_n = Tx_n$. Jos $(x_n)_{n=1}^\infty$ on rajoitettu jono, niin sen kuvajonolla on suppeneva osajono $x_{n_j} = T(\frac{x_{n_j}}{\lambda_k})$ eli ominaisavaruus $\operatorname{Ker}(\lambda_k I - T)$ on äärellisulotteinen. □

b) Jokainen $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ toistuu jonossa $m(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ kertaa.

*Todistus.* Jos $(\lambda_k)$ ääretön, niin kukin $\lambda_k$ esiintyy jonossa äärellisen monta kertaa, sillä $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Koska $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ ja $\lambda_k \in \mathbb{R}$, voidaan olettaa että $\lambda = \lambda_{j+1} = \lambda_{j+2} = \dots = \lambda_{j+p}$ $(p\ kpl)$. Vastaavat ominaisvektorit $\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_{j+p}$ ovat ortonormaaleja ja siten lineaarisesti vapaita. Nyt siis $\operatorname{sp}\{\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_{j+p}\} \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Olkoon $v \neq 0$, $v \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Siis $Tv = \lambda v$. Koska $v$ on ominaisarvoa $\lambda$ vastaava ominaisvektori, niin

$$v \perp \varphi_k \text{ aina, kun } T\varphi_k = \lambda_k \varphi_k \text{ ja } \lambda_k \neq \lambda.$$

Toisaalta $v = T(\frac{v}{\lambda}) \in \operatorname{Im} T \subset \overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}}$, jolloin

$$v = \sum_{k\geq 1} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{\lambda_k = \lambda} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{l=1}^{p} \langle v, \varphi_{j+l} \rangle \varphi_{j+l} \in \operatorname{sp}\{\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_{j+p}\}.$$

Siis $\operatorname{sp}\{\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_{j+p}\} = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$, joten $m(\lambda) = p$. □

c) Olkoon $\lambda \neq 0$ ja $\lambda \neq \lambda_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Osoitetaan, että tällöin $\lambda \in \rho(T)$. Olkoon $y \in H$ mielivaltainen. Tällöin $(\lambda I - T)x = \lambda x - Tx = y$ jos ja vain jos

$$\lambda x = y + Tx = y + \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k. \tag{$*$}$$

Yhtälön $(*)$ nojalla

$$\lambda\langle x, \varphi_j\rangle = \langle y, \varphi_j\rangle + \lambda_j \langle x, \varphi_j\rangle \text{ eli } \langle x, \varphi_j\rangle = \frac{\langle y, \varphi_j\rangle}{\lambda - \lambda_j} \text{ aina, kun } j \in \mathbb{Z}_+.$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön $(*)$, jolloin saadaan

$$\lambda x = y + \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Tämä on voimassa jos ja vain jos

$$x = \frac{1}{\lambda}\left( y + \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k \right) \equiv (\lambda I - T)^{-1}(y).$$

Termi

$$\left| \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \right| = \frac{|\lambda_k|}{|\lambda - \lambda_k|} \leq \frac{|\lambda_k|}{\inf_k |\lambda - \lambda_k|} \to 0 \text{ kun } k \to \infty.$$

Siten $(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I + K_1)$, missä $K_1$ on kompakti. Erityisesti $(\lambda I - T)^{-1}$ on olemassa ja rajoitettu eli $\lambda \in \rho(T)$. Saadaan siis, että $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, kun $H$ on ääretönulotteinen ja ominaisarvojen jono ääretön.

d) Olkoon $\lambda \notin \sigma(T)$ ja oletetaan, että jono $(\lambda_k)$ on ääretön. Tällöin

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))},$$

missä $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) = \inf_{k\geq 1}\{|\lambda - \lambda_k|, |\lambda|\}$.

*Todistus.* Koska $T$ on itseadjungoitu, niin $H = \operatorname{Ker} T \oplus (\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$. Olkoon $P_0 : H \to \operatorname{Ker} T$ ortogonaaliprojektio. Koska $\overline{\operatorname{Im} T} = \operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, niin

$$y = P_0 y + (I - P_0)y = P_0 y + \sum_{k\geq 1} \langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Siten

$$\begin{aligned}
(\lambda I - T)^{-1} y &= \frac{1}{\lambda}\left( y + \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} P_0 y + \frac{1}{\lambda} \sum_{k\geq 1} (1 + \frac{\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \Big) \langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k \\
&= \frac{1}{\lambda} P_0 y + \sum_k \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \langle y, \varphi_k\rangle \varphi_k.
\end{aligned}$$

Saadaan siis, että

$$\|(\lambda I - T)^{-1}y\|^2 = \frac{1}{|\lambda|^2}\|P_0 y\|^2 + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|^2}|\langle y,\varphi_k\rangle|^2.$$

Merkitään $d = \operatorname{dist}(\lambda,\sigma(T))$, jolloin $|\lambda-\lambda_k| \geq d$ ja $|\lambda| = |\lambda - 0| \geq d$. Tällöin

$$\|(\lambda I - T)^{-1}y\|^2 \leq \frac{1}{d^2}\|P_0 y\|^2 + \frac{1}{d^2}\sum_k |\langle y,\varphi_k\rangle|^2 = \frac{1}{d^2}\|y\|^2.$$

Tästä saadaan, että

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1}\|(\lambda I - T)^{-1}y\| \leq \frac{1}{d}. \tag{1}$$

Toisaalta, kun valitaan $y = \varphi_j$, niin

$$(\lambda I - T)^{-1}\varphi_j = \frac{1}{\lambda-\lambda_j}\varphi_j,$$

joten

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{|\lambda-\lambda_j|} \tag{2}$$

aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$. Jos $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$ (tällöin $P_0 \neq 0$) ja $y \in \operatorname{Ker} T$, $\|y\| = 1$, niin

$$(\lambda I - T)^{-1}y = \frac{1}{\lambda}\mathrm{P}_0 y = \frac{1}{\lambda}.$$

Tällöin siis

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{|\lambda|}. \tag{3}$$

Yhtälöiden (2) ja (3) nojalla

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geq \frac{1}{d}$$

ja näin ollen yhtälöstä (1) seuraa, että

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \frac{1}{d}.$$

$\square$

e) Tarkastellaan seuraavaksi yhtälöiden ratkeavuutta. Tarkastellaan lineaarista yhtälöä

$$Tx - \lambda x = y. \tag{1}$$

Olkoon aluksi $\lambda = 0$. Tällöin yhtälöllä $Tx = y$ on olemassa ratkaisu jos ja vain jos $y \perp \operatorname{Ker} T$ ja

$$\sum_k \left|\frac{\langle y,\varphi_k\rangle}{\lambda_k}\right|^2 < \infty. \tag{2}$$

*Todistus.* Nyt $Tx = y$ jos ja vain jos

$$\sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k = y = P_0 y + \sum_k \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että $P_0 y = 0$ ja $\lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle = \langle y, \varphi_k \rangle$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Oletetaan aluksi, että ratkaisu on olemassa, jolloin siis $P_0 y = 0$ ts. $y \in (\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$. Nyt

$$(I - P_0)x = \sum_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_k \frac{\langle y, \varphi_k \rangle}{\lambda_k} \varphi_k \in H.$$

Eli siis sarja

$$\sum_k \frac{\langle y, \varphi_k \rangle}{\lambda_k} \varphi_k$$

suppenee avaruudessa $H$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\sum_k \left| \frac{\langle y, \varphi_k \rangle}{\lambda_k} \right|^2 < \infty.$$

Oletetaan nyt, että $P_0 y = 0$ ja yhtälö (2) on voimassa. Tällöin

$$x = \sum \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

on eräs ratkaisu. $\square$

Ratkaisu ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen, vaan kaikki ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$x = u + \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

missä $u \in \operatorname{Ker} T$ on mielivaltainen.
Tarkastellaan seuraavaksi tapausta missä $\lambda \neq 0$. Jos $\lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, niin yhtälöllä (1) on yksikäsitteinen ratkaisu $x = -(\lambda I - T)^{-1} y$. Olkoon $\lambda \neq 0$ ja $\lambda = \lambda_j$ jollain $j \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin yhtälöllä (1) on ratkaisu jos ja vain jos $y \in \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda_j I)} = \operatorname{Im}(T - \lambda_j I)$. Ratkaisu saadaan suoraan spektraaliesityksen avulla.
**Huomautus.** $\operatorname{Im}(\lambda_j I - T)$ on suljettu lineaarinen avaruus jokaisella $\lambda_j$.

## 5.3 Samanaikainen diagonalisointi

Olkoot $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ kompakteja ja itseadjungoituja. Jos on olemassa sellainen yhteinen vektorijoukko $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, että

$$T_i x = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{(i)} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

aina, kun $x \in H$ ja $i = 1, 2$, niin $T_1$ ja $T_2$ kommutoivat eli $T_1 T_2 = T_2 T_1$, koska

$$T_1 T_2 x = T_2 T_1 x = \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Tutkitaan milloin tälläinen yhteinen ominaisvektoreiden joukko löytyy. Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakti ja itseadjungoitu. Tällöin ominaisavaruudet $\operatorname{Ker}(\lambda_k I - T)$ ovat äärellisulotteisia ja keskenään ortogonaalisia. Kunkin ominaisavaruuden ortonormaali kanta voidaan valita vapaasti. Otetaan käyttöön uusi indeksointi, merkitään erisuuria nollasta eroavia ominaisarvoja: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ ja kunkin ominaisarvon $\lambda_k$ geometristä kertalukua $m_k = \dim \operatorname{Ker}(\lambda_k I - T)$. Merkitään ominaisarvoa $\lambda_k$ vastaavaa ominaisavaruutta $V_k$. Olkoon omainaisavaruuden $V_k$ ortonormaali kanta $\{\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_{m_k}^{(k)}\}$. Lisäksi merkitään $\lambda_0 = 0$ (jos $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$), $V_0 = \operatorname{Ker} T$ ja $m_0 = \dim \operatorname{Ker} T \leq \infty$. Valitaan avaruudelle $\operatorname{Ker} T$ ortonormaali kanta $\{\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \dots\}$. Nyt spektraaliesitys tulee muotoon

$$Tx = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_k \langle x, \varphi_j^{(k)} \rangle \varphi_j^{(k)}$$

aina, kun $x \in H$. Olkoot nyt $S, T \in \mathcal{B}(H)$ kompakteja ja itseadjungoituja. Oletetaan, että $S$ ja $T$ kommutoivat eli

$$ST = TS.$$

**Lemma 5.6.** *$S(V_k) \subset V_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$.*

*Todistus.* Olkoon $x \in V_k$. Koska $Tx = \lambda_k x$, niin $STx = TSx = \lambda_k(Sx)$ eli $Sx \in V_k$. □

**Lemma 5.7.** *$S_{|V_k} : V_k \to V_k$ on lineaarisesti rajoitettu, kompakti ja itseadjungoitu.*

*Todistus.* Koska operaattori $S$ on rajoitettu, kompakti ja itseadjungoitu sekä $S$ on invariantti ominaisavaruuden $V_k$ suhteen, niin lauseen väitteet ovat totta. □

Siten $S_{|V_k} : V_k \to V_k$ on diagonalisoituva toisin sanoen, löytyy sellainen ortonormaali kanta $\{\phi_1^{(k)}, \dots, \phi_{m_k}^{(k)}\}$, että

$$Su = \sum_{j=1}^{m_k} \mu_j^{(k)} \langle u, \phi_j^{(k)} \rangle \phi_j^{(k)}$$

aina, kun $u \in V_k$, missä luvut $\mu_j^{(k)}$ ovat operaattorin $S$ ominaisarvoja, joista osa (tai kaikki) voivat olla nollia. Siis

$$S\phi_j^{(k)} = \mu_j^{(k)} \phi_j^{(k)}.$$

Kuten aiemmin todettiin, voidaan avaruuden $V_k$ ortonormaaliksi kannaksi (operaattorin $T$ kannalta) valita mikä tahansa. Valitaan operaattorin $S$ avulla saadut kantavektorit $\{\phi_j^{(k)}\}_{j,k}$, jolloin saadaan esitykset

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_k \langle x, \phi_j^{(k)} \rangle \phi_j^{(k)} \text{ ja} \\ Sx &= \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} \mu_j^{(k)} \langle x, \phi_j^{(k)} \rangle \phi_j^{(k)} \end{aligned}$$

aina, kun $x \in H$. Siten ehto $ST = TS$ riittää yhteisen ominaiskannan löytymiseen.

## 5.4 Normaalit operaattorit

Muotoillaan seuraavaksi kompakteille normaaleille operaattoreille spektraaliesitys. Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakti ja normaali eli $T^*T = TT^*$. Olkoon $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ja $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. Tällöin $T = A + iB$ sekä

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{1}{2}(T + T^*)^* = \frac{1}{2}(T^* + T) = A \text{ ja} \\ B^* &= -\frac{1}{2i}(T - T^*)^* = -\frac{1}{2i}(T^* - T) = B. \end{aligned}$$

Siis operaattorit $A$ ja $B$ ovat itseadjungoituja. Koska $T$ on kompakti, niin myös $T^*$ on kompakti ja täten myös operaattorit $A$ ja $B$ ovat kompakteja. Lisäksi

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{4i}(T + T^*)(T - T^*) = \frac{1}{4i}(T^2 - TT^* + T^*T - T^{*2}) \text{ ja} \\ BA &= \frac{1}{4i}(T - T^*)(T + T^*) = \frac{1}{4i}(T^2 + TT^* - T^*T - T^{*2}). \end{aligned}$$

Koska $T$ on normaali, niin $A$ ja $B$ kommutoivat eli $AB = BA$. Luvun 5.3 perusteella on olemassa diagonaaliesitykset

$$Ax = \sum_k a_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \text{ ja}$$
$$Bx = \sum_k b_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

missä luvut $a_k, b_k$ ovat reaalisia ja niistä osa voi olla nollia. Tällöin aina, kun $x \in H$

$$Tx = (A + iB)x = \sum_k \underbrace{(a_k + ib_k)}_{\lambda_k} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_k \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

missä luvut $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ovat operaattorin $T$ ominaisarvoja.

## 5.5 Kompaktit operaattorit

Jos operaattori on kompakti, niin sille ei saada edellisten kaltaista esitystä, vaan vain ns. ”valediagonaaliesitys”.

Olkoon $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakti. Tarkastellaan operaattoria $A = T^*T \in \mathcal{B}(H)$. Nyt myös $A$ on kompakti ja

$$A^* = (T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T = A,$$

joten $A$ on itseadjungoitu. Täten on olemassa ortonormaali joukko $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ja sellaiset reaaliluvut $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, että

$$Ax = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

aina, kun $x \in H$. Luvut $\lambda_k$ ovat nollasta eroavia aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi $\lambda_k > 0$ aina, kun $k \geq 1$, sillä kun $T^*T\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$, niin

$$\lambda_k = \lambda_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \langle T^*T\varphi_k, \varphi_k \rangle = \langle T\varphi_k, T\varphi_k \rangle = \|T\varphi_k\|^2 > 0.$$

Siten $\|T\varphi_k\| = \sqrt{\lambda_k}$ aina, kun $k \geq 1$. Kun $k \geq 1$ merkitään

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} T\varphi_k.$$

Tällöin $\|\phi_k\| = 1$ aina, kun $k \neq l$ ja

$$\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \langle T\varphi_k, T\varphi_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \langle T^*T\varphi_k, \varphi_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \langle \lambda_k \varphi_k, \varphi_l \rangle = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = 0$$

Siis $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ on ortonormaali joukko.

**Lemma 5.8.** $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T$

*Todistus.* Selvästi $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} T^*T$. Olkoon $x \in \operatorname{Ker} T^*T$. Tällöin $T^*Tx = 0$, joten $0 = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2$ eli toisin sanoen $Tx = 0$ ja siis $x \in \operatorname{Ker} T$. □

Nyt $H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}}$ edellisen lemman nojalla. Olkoon $u \in H$, jolloin

$$u = v + \sum_{k \geq 1} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

missä $v \in \operatorname{Ker} T$. Tämän avulla saadaan esitys

$$Tu = Tv + \sum_{k \geq 1} \langle u, \varphi_k \rangle T\varphi_k = \sum_{k \geq 1} \sqrt{\lambda_k} \langle u, \varphi_k \rangle \phi_k.$$

## 5.6 Kompleksifikaatio

Tarkastellaan aluksi miten reaalikertoimisesta Hilbert-avaruudesta voidaan muodostaa kompleksikertoiminen. Käsitellään myös käänteinen tapaus.

Olkoon $H$ reaalinen Hilbert-avaruus. Tällöin avaruuden $H$ *kompleksifikaatio* on joukko $H_{\mathbb{C}} = H + iH$. Avaruuteen $H_{\mathbb{C}}$ saadaan sisätulo asettamalla aina, kun $u, v \in H$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u, v \rangle, \\ \langle iu, v \rangle_{\mathbb{C}} &= i\langle u, v \rangle \text{ ja} \\ \langle u, iv \rangle_{\mathbb{C}} &= -i\langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Siis kun $z = u + iv$ ja $u = x + iy$, niin

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u + iv, x + iy \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle u, x \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u, iy \rangle_{\mathbb{C}} + \langle iv, x \rangle_{\mathbb{C}} + \langle iv, iy \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle u, x \rangle + \langle v, y \rangle + i(\langle v, x \rangle - \langle u, y \rangle). \end{aligned}$$

Erityisesti $\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle w, z\rangle_{\mathbb{C}}}$ ja $\langle z, z\rangle_{\mathbb{C}} = \|u\|^2 + \|v\|^2 \equiv \|z\|^2_{H_{\mathbb{C}}}$. Nyt $H_{\mathbb{C}}$ on kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus.

Olkoon toisaalta $H$ kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus. Tällöin avaruutta $H$ vastaa reaalinen avaruus $H_{\mathbb{R}}$, joka saadaan rajoittamalla kertojakunta joukkoon $\mathbb{R}$. $H_{\mathbb{R}}$ on joukkona sama kuin $H$ ja $\|u\|_{H_{\mathbb{R}}} = \|u\|_H$ aina, kun $u \in H$. Lisäksi $H_{\mathbb{R}}$ on Hilbert-avaruus, jonka sisätulo määritellään asettamalla aina, kun $u, v \in H$

$$\langle u, v\rangle_{H_{\mathbb{R}}} = \mathrm{Re}\langle u, v\rangle.$$

**Perustelu** : Kun $\|u\|_{H_{\mathbb{R}}} = \|u\|_H$ aina, kun $u \in H$, niin suunnikassääntö on voimassa. Siis $\|\cdot\|_{H_{\mathbb{R}}}$ on sisätulonormi ja

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H_{\mathbb{R}}} &= \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\langle u, v\rangle_H + \langle v, u\rangle_H\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\langle u, v\rangle_H + \overline{\langle u, v\rangle}_H\big)\\ &= \mathrm{Re}\langle u, v\rangle_H.\end{aligned}$$

**Esimerkki 14.** Olkoot nyt $H_1 = \mathbb{R}$ ja $H_2 = \mathbb{C}$. Avaruuden $H_1$ kompleksifikaatio on $H_{1_{\mathbb{C}}} = \mathbb{R}_{\mathbb{C}} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$. Luku $z = x+iy$ voidaan samaistaa parin $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kanssa. Tällöin $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$. Erityisesti $(\mathbb{R}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ ja $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = (\mathbb{R}^2)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$. Siis $(H_{1_{\mathbb{C}}})_{\mathbb{R}} \neq H_1$ ja $(H_{2_{\mathbb{R}}})_{\mathbb{C}} \neq H_2$.

Olkoon $H$ reaalinen Hilbert-avaruus ja $T : H \to H$ lineaarinen kuvaus. Operaattorin $T$ *kompleksifikaatio* $T_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$ määritellään asettamalla

$$T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$$

aina, kun $u + iv \in H_{\mathbb{C}}$.

Selvästi $T_{\mathbb{C}}$ on lineaarinen. Saadaan seuraavat tulokset.

a) $T \in \mathcal{B}(H)$ jos ja vain jos $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}(H_{\mathbb{C}})$. Tällöin $\|T\| = \|T_{\mathbb{C}}\|$.

*Todistus.* Nyt

$$\begin{aligned}\|T_{\mathbb{C}}z\|^2 &= \|Tu + iTv\|^2\\ &= \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2\\ &\le \|T\|^2(\|u\|^2 + \|v\|^2)\\ &= \|T\|^2\|z\|^2.\end{aligned}$$

Joten siis $T_{\mathbb{C}}$ on rajoitettu ja $\|T_{\mathbb{C}}\| \leq \|T\|$. Toisaalta $T_{\mathbb{C}}u = Tu$ aina, kun $u \in H$ $(u = u + i0 \in H_{\mathbb{C}})$, joten

$$\|Tu\| = \|T_{\mathbb{C}}u\| \leq \|T_{\mathbb{C}}\|\|u\|,$$

mistä seuraa että $\|T\| \leq \|T_{\mathbb{C}}\|$. □

b) $T$ on itseadjungoitu jos ja vain jos $T_{\mathbb{C}}$ on itseadjungoitu.

*Todistus.* Nyt

$$\begin{aligned}\langle T_{\mathbb{C}}(u+iv), x+iy\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle Tu + iTv, x+iy\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle Tu, x\rangle - i\langle Tu, y\rangle + i\langle Tv, x\rangle + \langle Tv, y\rangle \\ &= \langle u, T^*x\rangle - i\langle u, T^*y\rangle + i\langle v, T^*y\rangle + \langle v, T^*y\rangle \\ &= \langle u+iv, T^*x + iT^*y\rangle.\end{aligned}$$

Siis $T_{\mathbb{C}}^*(x+iy) = T^*x + iT^*y$, mistä väite seuraa. □

c) $T$ on normaali jos ja vain jos $T_{\mathbb{C}}$ on normaali.

*Todistus.* Nyt $\|T_{\mathbb{C}}^*(x+iy)\|^2 = \|T^*x\|^2 + \|T^*y\|^2$ ja

$$\|T_{\mathbb{C}}(x+iy)\|^2 = \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2.$$

Koska operaattori $T$ on normaali jos ja vain jos $\|Tu\| = \|T^*u\|$ aina, kun $u \in H$, niin väite saadaan todistettua. □

d) $T$ on kompakti jos ja vain jos $T_{\mathbb{C}}$ on kompakti.

*Todistus.* Selvä. □

### 5.6.1 Kannoista

Jos $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H$ on ortonormaali kanta ja $H$ reaalinen, niin $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ on myös avaruuden $H_{\mathbb{C}}$ ortonormaali kanta, koska

$$z = x + iy = \sum_k \langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k + i\sum_k \langle y, \varphi_k\rangle\varphi_k = \sum_k \langle z, \varphi_k\rangle_{\mathbb{C}}\varphi_k.$$

Olkoon seuraavaksi $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_{\mathbb{C}}$ ortonormaali kanta. Merkitään

$$\varphi_k = f_k + ig_k,$$

missä $f_k, g_k \in H$. Suoraan ortonormaalin kannan määritelmästä saadaan, että $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ aina, kun $k \neq l$ jos ja vain jos $\langle f_k, f_l \rangle + \langle g_k, g_l \rangle = 0$ ja $\langle f_k, g_l \rangle - \langle g_k, f_l \rangle = 0$. Jokainen $u \in H \subset H_{\mathbb{C}}$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} u &= \sum_k \langle u, \varphi_k \rangle_{\mathbb{C}} \varphi_k \\ &= \sum_k \big( \langle u, f_k \rangle - i \langle u, g_k \rangle \big)(f_k + i g_k) \\ &= \sum_k \big( \langle u, f_k \rangle f_k + \langle u, g_k \rangle g_k \big) + i \sum_k \big( \langle u, f_k \rangle g_k - \langle u, g_k \rangle f_k \big) \\ &= \sum_k \big( \langle u, f_k \rangle f_k + \langle u, g_k \rangle g_k \big), \end{aligned}$$

koska $u = u + i0$, joten jälkimmäinen sarja häviää. Siis $u \in \overline{\operatorname{sp}\{f_k, g_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}} = H$. Erityisesti on syytä huomata, että avaruuden $H_{\mathbb{C}}$ ortonormaalia kantaa voidaan käyttää avaruuden $H$ vektoreiden esittämiseen.

**Esimerkki 15.** Olkoon $H = L_2(]0, 2\pi[)$ ja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fourier-kanta on joukko $\{1, \cos kt, \sin kt \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$. Vastaava avaruuden $H_{\mathbb{C}}$ kanta on $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \cos kt &= \frac{1}{2}\big(e^{ikt} + e^{-ikt}\big) \text{ ja} \\ \sin kt &= \frac{1}{2i}\big(e^{ikt} - e^{-ikt}\big). \end{aligned}$$

Jos $u \in H$, niin

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt},$$

missä $a_k e^{ikt} + a_{-k} e^{-ikt} \in \mathbb{R}$ kun $a_{-k} = \bar{a}_k$. Kompleksisen kannan $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ käyttö on helpompaa kuin alkuperäisen Fourier-kannan.

Olkoon $H$ reaalinen Hilbert-avaruus ja $T \in \mathcal{B}(H)$ kompakti ja itseadjungoitu. Tällöin myös $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}(H_{\mathbb{C}})$ on kompakti ja itseadjungoitu, joten jokaista $z \in H_{\mathbb{C}}$ kohti on olemassa spektraaliesitys

$$T_{\mathbb{C}} z = \sum_{k \geq 1} \lambda_k \langle z, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

missä luvut $\lambda_k$ ovat nollasta eroavia reaalilukuja ja $T_{\mathbb{C}} \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}_+$, sekä $\overline{\operatorname{sp}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}} = \overline{\operatorname{Im} T_{\mathbb{C}}}$. Merkitään $\varphi_k = f_k + i g_k$, jolloin $T f_k = \lambda_k f_k$ ja $T g_k = \lambda_k g_k$.

Koska $f_k \neq 0$ tai $g_k \neq 0$, niin $\lambda_k$ on myös operaattorin $T$ ominaisarvo. Tämä pätee myös käänteisesti eli jos $\lambda$ on operaattorin $T$ ominaisarvo ja $u$ sitä vastaava ominaisvektori, niin $T_{\mathbb{C}}u = Tu = \lambda u$. Siis operaattoreiden $T_{\mathbb{C}}$ ja $T$ ominaisarvot ovat samat. Nyt, kun $z = u \in H$, niin

$$Tu = T_{\mathbb{C}}u = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle_{\mathbb{C}} \varphi_k.$$

Olkoon $\lambda \in \sigma(T_{\mathbb{C}}) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.

**Aputulos.** $\operatorname{Ker}(\lambda I - T_{\mathbb{C}}) = \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \oplus i \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.

Kuten todettu aiemmin, voidaan ominaisavaruuden $\operatorname{Ker}(\lambda_k I - T_{\mathbb{C}})$ ortonormaali kanta valita vapaasti. Erityisesti, kun valitaan $\{\phi_k^{(j)} \mid j = 1, \dots, m(\lambda_k)\} \subset \operatorname{Ker}(\lambda_k I - T)$ ortonormaali kanta, saadaan myös ominaisavaruudelle $\operatorname{Ker}(\lambda_k I - T_{\mathbb{C}})$ ortonormaali kanta. Saadaan esitys

$$T_{\mathbb{C}}u = Tu = \sum_{k\geq 1} \sum_{j=1}^{m(\lambda_k)} \lambda_k \langle u, \phi_j^{(k)} \rangle \phi_j^{(k)}.$$

Siis myös reaalisessa Hilbert-avaruudessa kompaktilla itseadjungoidulla kuvauksella on olemassa spektraalikehitelmä

$$Tu = \sum_{k\geq 1} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

aina, kun $u \in H$. Jos $T \in \mathcal{B}(H)$ on kompakti ja normaali, niin vastaavaa spektraalihajotelmaa ei välttämättä ole olemassa. Riittää tarkastella seuraavaa vastaesimerkkiä.

**Esimerkki 16.** Olkoon $H$ reaalikertoiminen, ääretönulotteinen Hilbert-avaruus ja $\{\varphi_j \mid j \in \mathbb{Z},\ j \neq 0\}$ avaruuden $H$ ortonormaali kanta. Määritellään operaattori $T$ asettamalla

$$Tx = \sum_{k\neq 0} \alpha_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_{-k} \text{ aina, kun } x \in H,$$

missä $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ja $\alpha_{-k} = -\alpha_k$. Siis $T\varphi_k = \alpha_k \varphi_{-k}$. Oletetaan, että $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots > 0$ ja $\lim \alpha_n = 0$. Määrätään seuraavaksi $T^*$. Nyt $\langle T^*x, \varphi_k \rangle = \langle x, T\varphi_k \rangle = \langle x, \alpha_k \varphi_{-k} \rangle = \alpha_k \langle x, \varphi_{-k} \rangle$, joten

$$T^*x = \sum_{k\neq 0} \langle T^*x, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k\neq 0} \alpha_k \langle x, \varphi_{-k} \rangle \varphi_k = \sum_{k\neq 0} \alpha_{-k} \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_{-k} = -Tx.$$

Siis $T$ ei ole itseadjungoitu, mutta $\|T^*x\| = \|Tx\|$ aina, kun $x \in H$, joten $T$ on normaali. Lisäksi $T$ on kompakti, sillä $\|T_n - T\| \to 0$, missä

$$T_n x = \sum_{0<|k|\leq n} \alpha_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_{-k}$$

ja $\mathcal{K}(H)$ on suljettu avaruudessa $\mathcal{B}(H)$. Määrätään seuraavaksi operaattorin $T$ ominaisarvot. Jos $\lambda = 0$, niin $Tx = 0$ ja $x = 0$, eli 0 ei ole ominaisarvo. Olkoon seuraavaksi $\lambda \neq 0$ ja $Tx = \lambda x$. Tällöin

$$\sum_{k\neq 0} \alpha_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_{-k} = \lambda \sum_{k\neq 0} \langle x, \varphi_{-k} \rangle \varphi_{-k}$$

jos ja vain jos $\alpha_k \langle x, \varphi_k \rangle = \lambda \langle x, \varphi_{-k} \rangle$ aina, kun $k \neq 0$. Siis $\alpha_k \langle x, \varphi_k \rangle = \lambda \langle x, \varphi_{-k} \rangle$ ja $\alpha_{-k} \langle x, \varphi_{-k} \rangle = \lambda \langle x, \varphi_k \rangle$. Täten

$$\lambda \langle x, \varphi_{-k} \rangle = \alpha_k \langle x, \varphi_k \rangle = \alpha_k \left( -\frac{\alpha_k}{\lambda} \langle x, \varphi_{-k} \rangle \right) = -\frac{\alpha_k^2}{\lambda} \langle x, \varphi_{-k} \rangle$$

eli $(\lambda^2 + \alpha_k^2) \langle x, \varphi_{-k} \rangle = 0$ aina, kun $k \neq 0$, mistä seuraa, että $x = 0$. Siis kuvauksella $T$ ei ole yhtään ominaisarvoa. Kompleksifikaatiolla $T_{\mathbb{C}} : H_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$ kuitenkin on spektraalikehitelmä. Määrätään se seuraavaksi. Havaitaan, että

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}}(\varphi_k + i\varphi_{-k}) &= T\varphi_k + iT\varphi_{-k} \\ &= \alpha_k \varphi_{-k} + i\alpha_{-k}\varphi_k \\ &= \alpha_k(\varphi_{-k} - i\varphi_k) \\ &= -i\alpha_k(\varphi_k + i\varphi_{-k}). \end{aligned}$$

Merkitään $\Phi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_k + i\varphi_{-k})$. Tällöin

$$\|\Phi_k\|^2 = \frac{1}{2}(\|\varphi_k\|^2 + \|\varphi_{-k}\|^2) = 1$$

ja kun $k \neq l$, niin

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k, \Phi_l \rangle &= \frac{1}{2} \langle \varphi_k + i\varphi_{-k}, \varphi_l + i\varphi_{-l} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \big( \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle - i\langle \varphi_k, \varphi_{-l} \rangle + i\langle \varphi_{-k}, \varphi_l \rangle + \langle \varphi_{-k}, \varphi_{-l} \rangle \big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siis $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots\} \subset H_{\mathbb{C}}$ on ortonormaali joukko ja

$$\Phi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_k + i\varphi_{-k}) \text{ ja}$$
$$\Phi_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{-k} + i\varphi_k).$$

Tästä seuraa, että

$$\varphi_k = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\Phi_{-k} + i\Phi_k).$$

Siis $\varphi_k \in \mathrm{sp}\{\Phi_j\}$, joten $\mathrm{sp}\{\varphi_k\} \subset \mathrm{sp}\{\Phi_j\}$. Siten $\mathrm{sp}\{\Phi_j\}$ on tiheä avaruudessa $H_{\mathbb{C}}$, joten $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ on avaruuden $H_{\mathbb{C}}$ ortonormaali kanta. Olkoon nyt

$$z = \sum_{k \neq 0} \langle z, \Phi_k \rangle \Phi_k \in H_{\mathbb{C}} \text{ mielivaltainen.}$$

Tällöin saadaan spektraaliesitys

$$T_{\mathbb{C}} z = \sum_{k \neq 0} (-i\alpha_k) \langle z, \Phi_k \rangle \Phi_k.$$

# Luku 6

# Rajoittamattomat operaattorit

Siirrytäään tarkastelemaan rajoittamattomia operaattoreita Hilbert-avaruudessa. Tutkitaan aluksi suljettujen operaattoreiden ominaisuuksia, koska sovelluksissa esiintyvät operaattorit ovat usein joko suljettuja tai niille on ainakin olemassa suljettu lineaarinen laajennus. Lisäksi paneudutaan rajoittamattoman operaattorin adjungaattiin ja sen ominaisuuksiin. Oletetaan edelleen että $H$ on kompleksikertoiminen separoituva ääretönulotteinen Hilbert-avaruus.

Tässä luvussa esitettävät asiat on koottu kirjoista [1], [6], [8] ja [10].

## 6.1 Suljettu operaattori ja sulkeuma

Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen kuvaus. Yleensä oletetaan, että $\mathcal{D}(T)$ on tiheä eli $T$ on ***tiheästi määritelty*** ja että $T$ on suljettu.

**Lemma 6.1.** *Olkoon* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$*. Tällöin* $T$ *on suljettu jos ja vain jos* $T^{-1}$ *on suljettu.*

*Todistus.* Katso [1, s. 264]. □

**Lemma 6.2.** *Jos* $T$ *on suljettu ja* $S \in \mathcal{B}(H)$*, niin* $T + S$ *on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T + S) = \mathcal{D}(T)$, $x_n \to x$ ja $(T + S)x_n = y_n \to y$. Nyt $Tx_n = x_n - Sx_n \to x - Sx$. Koska $T$ on suljettu, niin $x \in \mathcal{D}(T)$ ja $y - Sx = Tx$ eli $(T + S)x = y$. Täten $T + S$ on suljettu. □

**Lause 6.3.** *Olkoon* $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ *lineaarinen ja* $\rho(T) \neq \emptyset$*. Oletetaan, että on olemassa sellainen* $\lambda_0 \in \rho(T)$*, että* $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - T) = H$*. Tällöin* $T$ *on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon nyt $\lambda \in \rho(T)$, jolloin määritelmän nojalla $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - T)} = H$ ja $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda I - T) \to H$ on rajoitettu. Kun $\lambda = \lambda_0$, niin $R_{\lambda_0} : H \to H$ on rajoitettu ja myös suljettu. Tästä seuraa, että myös $R_{\lambda_0}^{-1} = \lambda_0 I - T$ on suljettu, joten myös $T$ on suljettu. □

**Määritelmä 6.1.** Operaattori $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ on *sulkeutuva* jos sille on olemassa suljettu lineaarinen laajennus. Operaattorin $T$ suljettu lineaarinen laajennus $\overline{T}$ on *minimaalinen*, jos jokainen operaattorin $T$ suljettu lineaarinen laajennus $\widetilde{T}$ on operaattorin $\overline{T}$ laajennus. Jos $\overline{T}$ on olemassa, niin sanotaan että $\overline{T}$ on operaattorin $T$ *sulkeuma*.

**Lause 6.4.** *$T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ on sulkeutuva jos ja vain jos ehdosta $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ seuraa, että $y = 0$.*

*Todistus.* Oletetaan aluksi että $T$ on sulkeutuva ja osoitetaan, että $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Olkoon $\widetilde{T}$ operaattorin $T$ suljettu laajennus. Oletetaan, että $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ ts. on olemassa sellainen jono $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}(T)$, että $x_n \to 0$ ja $y_n \to y$. Siis $x_n \to 0$, $y_n = Tx_n = \widetilde{T}x_n \to y$, joten $(0, y) \in \mathcal{G}(\widetilde{T})$ eli $\widetilde{T}0 = y = 0$.

Oletetaan seuraavaksi, että jos $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, niin $y = 0$ ja osoitetaan että $T$ on sulkeutuva. Oletuksen nojalla $(0, y) \notin \overline{\mathcal{G}(T)}$ aina, kun $y \neq 0$. Määritellään joukko $\mathcal{D}$ asettamalla

$$\mathcal{D} = \big\{x \in H \mid \text{on olemassa sellainen } y_x \in H, \text{ että } (x, y_x) \in \overline{\mathcal{G}(T)}\big\}.$$

Nyt $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}$ on lineaarinen aliavaruus. Osoitetaan että $y_x$ on yksikäsitteinen. Olkoon $(x, y_x) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ ja $(x, z_x) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Tällöin

$$(x, y_x) - (x, z_x) = (0, y_x - z_x) \in \overline{\mathcal{G}(T)},$$

joten $y_x - z_x = 0$ eli $y_x = z_x$. Merkitään $y_x = \overline{T}x$ aina, kun $x \in \mathcal{D} := \mathcal{D}(\overline{T})$. Nyt $\overline{T} : \mathcal{D}(\overline{T}) \subset H \to H$ on hyvin määritelty ja lineaarinen, sekä

i) $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\overline{T})$,
ii) $\overline{T}x = Tx$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$ ja
iii) $(x, y) \in \mathcal{G}(\overline{T})$ jos ja vain jos $y = \overline{T}x,\ x \in \mathcal{D}$ joka on yhtäpitävää sen kanssa, että $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Siis $\overline{T}$ on suljettu ja $\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$.

□

**Lause 6.5.** *Jos $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ on suljettu, niin $\mathrm{Ker}\, T$ on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Ker}\, T$ ja $x_k \to x$, jolloin $Tx_k = 0 \to 0$. Koska $T$ on suljettu, niin $(x, 0) \in \mathcal{G}(T)$ eli $Tx = 0$. □

Kun $\mathrm{Ker}\, T$ on suljettu, niin operaattorin $T$ rajoittuma $T|_{(\mathrm{Ker}\, T)^\perp \cap \mathcal{D}(T)}$ on injektio.

**Lause 6.6.** *Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ sulkeutuva ja $\operatorname{Im} T$ äärellisulotteinen. Tällöin $T$ on rajoitettu.*

*Todistus.* Katso [6]. □

**Lause 6.7.**

*a)* *Jos $T \in \mathcal{B}(H)$, niin $T$ on suljettu.*
*b)* *Jos $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ on rajoitettu, niin operaattorin $T$ yksikäsitteinen rajoitettu laajennus $\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \to H$ on suljettu. Erityisesti, jos $\mathcal{D}(T)$ on suljettu ja $T$ rajoitettu niin $T$ on suljettu.*
*c)* *Jos $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ on rajoitettu ja suljettu, niin $\mathcal{D}(T)$ on suljettu.*

*Todistus.*

a*)* Katso *b)*-kohta.
b*)* Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathcal{D}(T)}$, $x_k \to x$ ja $y_k = Tx_k \to y$. Koska $\widetilde{T}$ on jatkuva, niin $y = \widetilde{T}x$ ja $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$.
c*)* Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T)$, $x_k \to x$ ja $y_k = Tx_k \to y$. Tällöin

$$\|y_k - y_l\| \leq \|T\| \|x_k - x_l\|$$

eli $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, joten se suppenee. Merkitään $y_k \to y$, jolloin $x \in \mathcal{D}(T)$ ja $y = Tx$.

□

Yleisesti kahden suljetun kuvauksen summa ei välttämättä ole suljettu.

**Esimerkki 17.** Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ suljettu ja oletetaan, että $\mathcal{D}(T)$ ei ole suljettu. Olkoon $S = -T$, jolloin myös $S$ on suljettu. Tällöin $T + S : \mathcal{D}(T) \to H$ on 0-kuvaus, joka ei ole suljettu.

Seuraavassa lauseessa esitellään riittävä ehto sille että summaoperaattori on suljettu.

**Lause 6.8.** *Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen ja suljettu, $S : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen ja $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$. Oletetaan, että on olemassa sellaiset vakiot $\alpha > 0$ ja $0 \leq \beta < 1$, että*

$$\|Sx\| \leq \alpha\|x\| + \beta\|Tx\|$$

*aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$. Tällöin $T+S$ on suljettu.*

*Todistus.* Nyt $\mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$. Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T)$, $x_k \to x$ ja $y_k = Tx_k + Sx_k \to y$. Saadaan seuraava arvio:

$$\|Tu\| \leq \|Tu + Su\| + \|Su\| \leq \|Tu + Su\| + \alpha\|u\| + \beta\|Tu\|,$$

josta seuraa että aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$

$$(1-\beta)\|Tu\| \leq \|(T+S)u\| + \alpha\|u\|. \tag{1}$$

Sijoitetaan yhtälöön (1) $u = x_k - x_l$, jolloin

$$(1-\beta)\|Tx_k - Tx_l\| \leq \|y_k - y_l\| + \alpha\|x_k - x_l\|$$

eli $(Tx_k)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, joten se suppenee, merkitään $z = \lim Tx_k$. Siis $x_k \to x$ ja $Tx_k \to z$. Koska $T$ on suljettu, niin $x \in \mathcal{D}(T)$ ja $z = Tx$. Muodostetaan toinen arvio:

$$\|Tu\| \geq \|Tu + Su\| - \|Su\| \geq \|Tu + Su\| - \alpha\|u\| - \beta\|Tu\|,$$

joten aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$

$$\|(T+S)u\| \leq (1+\beta)\|Tu\| + \alpha\|u\|. \tag{2}$$

Sijoitetaan yhtälöön (2) $x_k - x = u$, jolloin

$$\|y_k - (T+S)x\| \leq (1+\beta)\|Tx_k - z\| + \alpha\|x_k - x\| \to 0,$$

eli $y_k \to (T+\mathrm{S})x$, joten $x \in \mathcal{D}(T+\mathrm{S})$ ja $y = (T+\mathrm{S})x$. $\square$

Tarkastellaan vielä operaattoria, jonka kuvajoukko on suljettu.

**Lause 6.9.** *Olkoon* $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ *suljettu ja* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. *Tällöin* $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to H$ *on rajoitettu jos ja vain jos* $\operatorname{Im} T$ *on suljettu.*

*Todistus.* Oletetaan, että $T^{-1}$ on rajoitettu. Koska T on suljettu, niin myös $T^{-1}$ on suljettu ja täten $\mathcal{D}(T^{-1}) = \operatorname{Im} T$ on suljettu.

Olkoon nyt $\operatorname{Im} T$ suljettu. Koska $\operatorname{Im} T$ on suljettu, niin se on täydellinen lineaarinen aliavaruus. Nyt $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to H$ on suljettu, joten suljetun graafin lauseen nojalla $T^{-1}$ on rajoitettu. $\square$

## 6.2 Adjungoitu operaattori

Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen kuvaus. Tarkastellaan operaattorin $T$ adjungaattia $T^*$ rajoittamattomassa tapauksessa. Merkitään

$$f_y : \mathcal{D}(T) \to \mathbb{K}, \quad f_y(x) = \langle Tx, y \rangle.$$

Oletetaan, että $T$ on tiheästi määritelty. Nyt $f_y$ on lineaarinen funktionaali aina, kun $y \in H$. Jos $f_y$ on myös rajoitettu, niin sille on olemassa yksikäsitteinen rajoitettu laajennus $\hat{f} : \overline{\mathcal{D}(T)} \to \mathbb{K}$ ja Rieszin lauseesta seuraa, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $z_y \in H$, että $\hat{f}(x) = \langle x, z_y \rangle$ aina, kun $x \in H$. Tällöin merkitään $z_y = T^*y$, missä $y \in \mathcal{D}(T^*) = \big\{ y \mid f_y \text{ rajoitettu} \big\}$.

**Huomautus.** Jos $\mathcal{D}(T)$ ei ole tiheä, niin funktionaalilla $f_y$ ei ole olemassa yksikäsitteistä laajennusta $\hat{f}_y : H \to \mathbb{K}$, vaikka se olisi rajoitettu. Tällöin $z_y$ ei ole yksikäsitteinen. Siis $z_y = T^*y$ ei ole hyvin määritelty.

Helpompi ja yhtäpitävä tapa määritellä $\mathcal{D}(T^*)$ ja $T^*$:

$$v \in \mathcal{D}(T^*) \text{ ja } w = T^*v \text{ jos ja vain jos } \langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(T).$$

**Määritelmä 6.2.** Olkoon $T$ tiheästi määritelty.

i) $T$ on *itseadjungoitu*, jos $T = T^*$ eli $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ ja $Tx = T^*x$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$. Tällöin $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ aina, kun $x, y \in \mathcal{D}(T)$.

ii) $T$ on *symmetrinen*, jos $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ aina, kun $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Jos $T$ on itseadjungoitu, niin $T$ on symmetrinen. Tämä ei kuitenkaan päde kääntäen.

iii) $T$ on *normaali*, jos $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ ja $\|T^*x\| = \|Tx\|$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$.

**Lause 6.10.** *Olkoon $T$ tiheästi määritelty ja symmetrinen. Tällöin $T^*$ on operaattorin $T$ laajennus.*

*Todistus.* Jos $v \in \mathcal{D}(T)$ ja $w = Tv$, niin $\langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$ jos ja vain jos $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^*v$. Siis $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ ja $T^*v = Tv$ aina, kun $v \in \mathcal{D}(T)$. □

**Huomautus.** Aikaisemmin rajoitettujen operaattoreiden yhteydessä esitelty normaalisuuden määritelmä $TT^* = T^*T$ on ongelmallinen, sillä $\mathcal{D}(TT^*) = \big\{ x \in \mathcal{D}(T^*) \mid T^*x \in \mathcal{D}(T) \big\}$ ja $\mathcal{D}(T^*T) = \big\{ x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx \in \mathcal{D}(T^*) \big\}$ eli ehto tarkoittaisi

$$TT^*x = T^*Tx \text{ aina, kun } x \in \mathcal{D}(TT^*) \cap \mathcal{D}(T^*T).$$

Tarkastellaan seuraavassa esimerkissä adjungaatin ja sen määritysjoukon määräämistä rajoittamattomassa tapauksessa.

**Esimerkki 18.** Indeksoidään avaruuden $H$ ortonormaali kanta kahdella eri tavalla seuraavasti $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\hat{e}_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$. Määritellään kuvaus $T$ ja sen määritysjoukko $\mathcal{D}(T)$ asettamalla

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \Big( \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \hat{e}_{ij} \rangle \Big) e_i \text{ ja}$$
$$\mathcal{D}(T) = \Big\{ x \mid \sum_{i=1}^{\infty} \Big( \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \hat{e}_{ij} \rangle \Big) e_i \text{ suppenee} \Big\}.$$

Siis $x \in \mathcal{D}(T)$ jos ja vain jos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big( \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \hat{e}_{ij} \rangle \Big) e_i \text{ suppenee,}$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \hat{e}_{ij} \rangle \Big|^2 < \infty.$$

Nyt $T\hat{e}_{ij} = e_i$, joten $\operatorname{sp}\{\hat{e}_{ij}\} \subset \mathcal{D}(T)$ eli $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$. Vastaavasti $\operatorname{sp}\{e_i\} \subset \operatorname{Im} T$, joten myös $\overline{\operatorname{Im} T} = H$. Nyt $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^* v$ jos ja vain jos

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(T).$$

Tästä seuraa, että

$$\langle T\hat{e}_{ij}, v \rangle = \langle \hat{e}_{ij}, w \rangle \text{ aina, kun } i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Oletetaan, että $v \neq 0$ ja osoitetaan tämän oletuksen johtavan ristiriitaan. Nyt $v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle e_i$, joten $\alpha := \langle v, e_l \rangle \neq 0$ jollain $l$. Nyt $|\alpha| = |\langle v, e_l \rangle| = |\langle v, T\hat{e}_{lj} \rangle| = |\langle w, \hat{e}_{lj} \rangle|$ aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$. Täten

$$\|w\|^2 = \sum_{i,j} |\langle w, \hat{e}_{ij} \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle w, \hat{e}_{lj} \rangle|^2 = \infty,$$

mikä on ristiriita. Saatiin siis, että $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$.

**Lause 6.11.** *Olkoon $T$ tiheästi määritelty. Tällöin $T^*$ on suljettu.*

*Todistus.* Koska $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$, niin $T^*$ on hyvin määritelty. Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T^*)$, $x_k \to x$ ja $y_k = T^* x_k \to y$.
Nyt aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle Tu, x_k \rangle = \langle u, y_k \rangle = \langle u, T^* x_k \rangle,$$

joten $\langle Tu, x\rangle = \langle u, y\rangle$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$x \in \mathcal{D}(T^*) \text{ ja } y = T^*x.$$

□

**Lause 6.12.** *Olkoon $T$ tiheästi määritelty ja suljettu. Tällöin myös $T^*$ on tiheästi määritelty.*

*Todistus.* Nyt $\mathcal{G}(T) \subset H \times H$ on suljettu lineaarinen aliavaruus. Osoitetaan, että $\mathcal{D}(T^*)^\perp = \{0\}$ jolloin $\overline{\mathcal{D}(T^*)} = \mathcal{D}(T^*)^{\perp\perp} = H$. Olkoon $u \in \mathcal{D}(T^*)^\perp$ eli tällöin $\langle u, v\rangle = 0$ aina, kun $v \in \mathcal{D}(T^*)$. Osoitetaan, että $u = 0$. Tehdään vastaoletus, että $u \neq 0$. Tällöin $(0, u) \notin \mathcal{G}(T)$. Koska $H \times H = \mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T)^\perp$, niin $\langle (0, u), (x_0, y_0)\rangle_{H\times H} = \langle u, y_0\rangle \neq 0$ jollakin $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}(T)^\perp$. Siis $\langle u, y_0\rangle \neq 0$ ja

$$\langle (x, Tx), (x_0, y_0)\rangle = \langle x, x_0\rangle + \langle Tx, y_0\rangle = 0$$

aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$. Eli $\langle Tx, y_0\rangle = \langle x, -x_0\rangle$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että $y_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $-x_0 = T^*y_0$. Siis $\langle u, y_0\rangle \neq 0$ ja $y_0 \in \mathcal{D}(T^*)$, joka on ristiriita, joten vastoletus on väärä ja väite oikea. □

**Esimerkki 19.** Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t) & a < t < b, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Määritellään $T_0 : \mathcal{D}(T_0) \subset L_2(]a, b[) \to L_2(]a, b[)$ ja $\mathcal{D}(T_0)$ asettamalla

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(T_0) = \big\{u \in C^2([a, b]) \mid u(a) = u(b) = 0\big\}, \\ &T_0u = -u'' \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(T_0). \end{aligned}$$

Skaalataan $a = 0$, $b = \pi$ ja valitaan $e_n(t) = c_0 \sin nt,\ n \in \mathbb{Z}_+$, missä

$$c_0^2 \int_0^\pi \sin^2 nt \,\mathrm{d}t = 1.$$

Tällöin $\{e_j\}$ on avaruuden $H = L_2([0, \pi])$ ortonormaali kanta ja $\{e_j\} \subset \mathcal{D}(T_0)$, joten $\overline{\mathcal{D}(T_0)} = H$. Nyt aina, kun $u, v \in \mathcal{D}(T_0)$

$$\begin{aligned} \langle T_0u, v\rangle &= -\int_0^\pi u''v = -\Big/_0^\pi u'v + \int_0^\pi u'v' = \Big/_0^\pi (-v'u + u'v) - \int_0^\pi uv'' \\ &= \Big/_0^\pi (u'v - v'u) + \langle u, T_0v\rangle. \end{aligned}$$

Alkuehdoista johtuen $\langle T_0 u, v\rangle = \langle u, T_0 v\rangle$ aina, kun $u, v \in \mathcal{D}(T_0)$. Koska $T_0$ on symmetrinen, niin $T_0^*$ on operaattorin $T_0$ laajennus. Merkitään $L = T_0^*$. Siis $v \in \mathcal{D}(L)$ ja $w = Lv$ jos ja vain jos $\langle T_0 u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T_0)$. Erityisesti kun $u = e_n$, niin $\langle e_n, w\rangle = \langle T_0 e_n, v\rangle = n^2\langle v, e_n\rangle$, joten

$$Lv = w = \sum_{n=1}^{\infty}\langle w, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\langle v, e_n\rangle e_n. \tag{1}$$

Osoitetaan, että

$$\mathcal{D}(L) = \Big\{ v \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} |n^2\langle v, e_n\rangle|^2 < \infty \Big\}.$$

Olkoon $v \in \mathcal{D}(L)$, jolloin $w = Lv \in H$ eli sarja (1) suppenee ja siis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |n^2\langle v, e_n\rangle|^2 < \infty$.

Oletetaan seuraavaksi, että sarja (1) suppenee avaruudessa $H$ ja merkitään summaa $w$. Osoitetaan, että $w = Lv$ ja $v \in \mathcal{D}(L)$ eli $\langle v, T_0 u\rangle = \langle w, u\rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T_0)$. Kun $u \in \mathcal{D}(T_0)$, niin $u = \sum\langle u, e_n\rangle e_n$ ja $T_0 u = -u'' \in H$, joten

$$-u'' = \sum_{n=1}^{\infty}\langle -u'', e_n\rangle e_n, \text{ missä } \langle -u'', e_n\rangle = -\int_0^{\pi} u'' c_0 \sin nt \, dt = \ldots = n^2\langle u, e_n\rangle.$$

Siten aina, kun $u \in \mathcal{D}(T_0)$

$$-u'' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\langle u, e_n\rangle e_n.$$

Siis aina, kun $u \in \mathcal{D}(T_0)$

$$\langle v, T_0 u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\langle v, e_n\rangle\overline{\langle u, e_n\rangle} = \langle w, u\rangle,$$

eli $v \in \mathcal{D}(T_0^*) = \mathcal{D}(L)$ ja $w = Lv$.

Jatketaan esimerkin tarkastelua vähän yleisemmässä muodossa. Olkoon $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ ja $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ avaruuden $H$ ortonormaali kanta. Määritellään operaattori $T$ asettamalla

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\langle x, e_n\rangle e_n.$$

Oletetaan, että $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole rajoitettu jono. Tällöin

$$\mathcal{D}(T) = \Big\{ x \in H \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty \Big\}.$$

Nyt saadaan seuraavat tulokset.

a) Operaattori $T$ on tiheästi määritelty, koska $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T)$.

b) $T$ on suljettu.

*Todistus.* Olkoon $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T)$, $x_k \to x$ ja $y_k = Tx_k \to y$. Tällöin

$$\langle y_k, e_n \rangle = \langle Tx_k, e_n \rangle = \alpha_n \langle x_k, e_n \rangle,$$

joten $\langle y, e_n \rangle = \alpha_n \langle x, e_n \rangle$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Koska $y \in H$, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 < \infty,$$

mistä seuraa, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \langle x, e_n \rangle|^2 < \infty.$$

Siis $x \in \mathcal{D}(T)$ ja

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle e_n = Tx.$$

□

c) Koska $T$ on tiheästi määritelty, niin $T^*$ on hyvin määritelty. Nyt siis $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^*v$ jos ja vain jos $\langle Tu, v \rangle = \langle u, w \rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$. Erityisesti kun valitaan $u = e_n \in \mathcal{D}(T)$, niin $\langle e_n, w \rangle = \langle \alpha_n e_n, v \rangle = \bar{\alpha}_n \langle e_n, v \rangle$. Täten siis

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \langle v, e_n \rangle e_n = T^*v.$$

Osoitetaan tarkasti, että $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$. Olkoon aluksi $w = T^*v$ ja $v \in \mathcal{D}(T^*)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\alpha}_n \langle v, e_n \rangle|^2 < \infty \text{ eli } v \in \mathcal{D}(T).$$

Siis $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$.

Olkoon nyt $v \in \mathcal{D}(T)$. Tällöin siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\alpha}_n \langle v, e_n \rangle|^2 < \infty,$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \langle v, e_n \rangle e_n$$

suppenee avaruudessa $H$. Merkitään raja-arvoa $w$. Täten aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle w, u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \langle v, e_n\rangle \overline{\langle u, e_n\rangle} = \langle v, Tu\rangle,$$

eli $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^*v$.

d) Nyt $Te_n = \alpha_n e_n$ eli jokainen $\alpha_n$ on ominaisarvo ja $e_n$ vastaava ominaisvektori. Siis $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma_P(T)$. Olkoon $\lambda \neq \alpha_n$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $(\lambda I - T)x = 0$ jos ja vain jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \lambda)\langle x, e_n\rangle e_n = 0,$$

joka on mahdollista ainoastaan kun $x = 0$. Siten $\lambda I - T$ on injektio aina, kun $\lambda \neq \alpha_n$ eli $(\lambda I - T)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda I - T) \to H$ on olemassa. Tästä voidaan päätellä, että $\sigma_P(T) = \{\alpha_n\}$.
Olkoon nyt $\lambda \notin \sigma_P(T)$ ja $(\lambda I - T)x = y$. Suoraan laskemalla saadaan käänteiskuvaukselle yhtälö

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \alpha_n} \langle y, e_n\rangle e_n,$$

jos sarja suppenee. Jaetaan suppenemisen tarkastelu kahteen osaan.
Olkoon aluksi olemassa sellainen $\varepsilon_0 > 0$, että $|\lambda - \alpha_n| \geq \varepsilon_0$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda - \alpha_n|^2} |\langle y, e_n\rangle|^2$$

suppenee eli myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \alpha_n} \langle y, e_n\rangle e_n$$

suppenee. Lisäksi $\|(\lambda I - T)^{-1} y\| \leq \frac{1}{\varepsilon_0} \|y\|$ aina, kun $y \in H$, eli operaattori $\lambda I - T$ on tilassa $I_1$. Siis $\lambda \in \rho(T)$.
Oletetaan seuraavaksi, että on olemassa sellainen osajono $\alpha_{n_j}$, että $\alpha_{n_j} \to \lambda$. Tällöin $\lambda \in \sigma(T)$, koska spektri on suljettu ja $(a_{n_j}) \subset \mathcal{D}(T)$. Selvästi $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I - T)} = H$, sillä $\{e_n\} \subset \mathrm{Im}(\lambda I - T)$, joten $\lambda \in \sigma_C(T)$. Operaattorin $T$ spektrille saatiin seuraavanlainen jako:

$$\begin{aligned}
&\sigma_P(T) = \{\alpha_n\}, \\
&\sigma_C(T) = \big\{\lambda \mid \lambda \neq \alpha_n \text{ aina, kun } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } \lambda \in \overline{\{\alpha_n\}}\big\}, \\
&\sigma_R(T) = \emptyset.
\end{aligned}$$

**Huomautus.** Operaattori $T$ on rajoitettu jos ja vain jos $\{\alpha_n\}$ on rajoitettu. Jos esimerkiksi $\{\alpha_n\} = \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin $\sigma(T) = \mathbb{R}$.

Jatketaan operaattorin $T^*$ ominaisuuksien tarkastelua.

**Lause 6.13.** *Olkoon $T$ tiheästi määritelty ja suljettu. Tällöin $T^{**} = T$.*

*Todistus.* Edellisen lemman nojalla $\overline{\mathcal{D}(T^*)} = H$, joten $T^{**}$ on hyvin määritelty. Nyt $v \in \mathcal{D}(T^{**})$ ja $w = T^{**}v$ jos ja vain jos

$$\langle T^*u, v\rangle = \langle u, w\rangle \tag{$*$}$$

aina, kun $u \in \mathcal{D}(T^*)$. Havaitaan, että jos $x \in \mathcal{D}(T)$ ja $y = Tx$, niin $(*)$ on voimassa eli aina, kun $u \in \mathcal{D}(T^*)$

$$\langle T^*u, x\rangle = \langle u, Tx\rangle.$$

Siten $T^{**}$ on operaattorin $T$ laajennus. Nyt siis $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(T^{**})$.

Osoitetaan, että $\mathcal{G}(T^{**}) \subset \mathcal{G}(T)$. Olkoon $(v_0, w_0) \in \mathcal{G}(T^{**})$ ja oletetaan, että $(v_0, w_0) \notin \mathcal{G}(T)$. Koska $H \times H = \mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T)^\perp$, niin löytyy sellainen $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}(T)^\perp$ että $\langle (x_0, y_0), (v_0, w_0)\rangle \neq 0$. Siis aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$ on voimassa, että

$$\langle x_0, v_0\rangle + \langle y_0, w_0\rangle \neq 0 \text{ ja } \langle x_0, x\rangle + \langle y_0, Tx\rangle = 0.$$

Tästä saadaan, että $\langle y_0, Tx\rangle = -\langle x_0, x\rangle$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että $y_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $-x_0 = T^*y_0$. Koska $w_0 = T^{**}v_0$ jos ja vain jos $\langle T^*z, v_0\rangle = \langle z, w_0\rangle$ aina, kun $z \in \mathcal{D}(T^*)$, niin

$$-\langle v_0, x_0\rangle = \langle w_0, y_0\rangle \text{ eli } \langle x_0, v_0\rangle + \langle y_0, w_0\rangle = 0,$$

joka on ristiriita, joten $\mathcal{G}(T^{**}) \subset \mathcal{G}(T)$. Täten $T = T^{**}$. □

Jos $T$ on suljettu lineaarinen kuvaus, niin sen ja adjungaatin välille saadaan samanlaiset vastaavuudet kuin lauseessa 3.2.

**Lause 6.14.** *Olkoon $T$ tiheästi määritelty ja suljettu. Tällöin*

*a*) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.
*b*) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.
*c*) $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T^*}$.
*d*) $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$.

*Todistus.*

a) Nyt $v \in \operatorname{Ker} T^*$ jos ja vain jos $T^*v = 0$ ja tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle u, T^*v\rangle = 0$ aina, kun $u \in H$. Edellisen kanssa yhtäpitävää on, että $\langle u, T^*v\rangle = 0$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$ ja adjungaatin määritelmän nojalla voidaan edelleen kirjoittaa yhtäpitävästi $\langle Tu, v\rangle = 0$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $v \in (\operatorname{Im} T)^\perp$.
b) Koska $\mathcal{D}(T^*)$ on tiheä, $T^*$ suljettu ja $T^{**} = T$, niin *a)*-kohdan nojalla $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \operatorname{Ker}(T^{**}) = \operatorname{Ker} T$.
c) Seuraa *b)*-kohdasta.
d) $(\operatorname{Im} T)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$.

□

Rajoitettujen operaattoreiden yhteydessä saatiin summaoperaattorin adjungaatille, että $(T+S)^* = T^* + S^*$. Tämä ei yleisesti päde rajoittamattomassa tapauksessa. Seuraavat ovat kuitenkin voimassa.

**Lause 6.15.** *Olkoot operaattorit $T$ ja $S$ tiheästi määriteltyjä ja suljettuja. Oletetaan, että $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T+S)$ on tiheä avaruudessa $H$. Tällöin $(T+S)^*$ on operaattorin $T^* + S^*$ laajennus.*

*Todistus.* Koska $\mathcal{D}(T+S) = H$, niin $(T+S)^*$ on hyvin määritelty. Lisäksi operaattorit $S^*$ ja $T^*$ ovat hyvin määriteltyjä, koska $T$ ja $S$ ovat tiheästi määriteltyjä. Oletetaan, että $v \in \mathcal{D}(T^*) \cap \mathcal{D}(S^*)$ ja merkitään $w_1 = T^*v$ ja $w_2 = S^*v$. Tämä on adjungaatin määritelmän nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, w_1\rangle \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(T) \text{ ja } \langle Su, v\rangle = \langle u, w_2\rangle \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(S),$$

joten

$$\langle (T+S)u, v\rangle = \langle u, w_1 + w_2\rangle \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S).$$

Siis $\mathcal{D}(T^*) \cap \mathcal{D}(S^*) \subset \mathcal{D}(T+S)^*$ ja $(T+S)^*v = T^*v + S^*v$ aina, kun $v \in \mathcal{D}(T^*) \cap \mathcal{D}(S^*)$. □

**Seuraus.** *Olkoon $T$ tiheästi määritelty ja suljettu sekä $S \in \mathcal{B}(H)$. Tällöin $(T+S)^* = T^* + S^*$.*

*Todistus.* Edellisen lauseen nojalla riittää osoittaa että $T^* + S^*$ on operaattorin $(T+S)^*$ laajennus. Olkoon $v \in \mathcal{D}((T+S)^*)$ ja $w = (T+S)^*v$. Tämä on määritelmän nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\langle (T+S)u, v\rangle = \langle u, w\rangle \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(T).$$

Tästä seuraa, että

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, w\rangle - \langle u, S^*v\rangle = \langle u, w - S^*v\rangle$$

aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$. Täten $v \in \mathcal{D}(T)$ ja $T^*v = w - S^*v$. □

Lauseen 3.1 g)-kohta on voimassa myös rajoittamattomassa tapauksessa tietyin rajoituksin.

**Lause 6.16.** *Oletetaan, että* $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ *on tiheästi määritelty,* $\overline{\operatorname{Im} T} = H$ *ja* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. *Tällöin* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

*Todistus.* Koska $T$ on injektio, niin $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to H$ on olemassa ja $\mathcal{D}(T^{-1}) = \operatorname{Im} T$ on tiheä avaruudessa $H$, joten $(T^{-1})^*$ on hyvin määritelty. Myös $T^*$ on hyvin määritelty, koska $\mathcal{D}(T)$ on tiheä avaruudessa $H$. Osoitetaan että $(T^*)^{-1}$ on olemassa. Olkoon $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Tällöin $T^{-1}x \in \mathcal{D}(T)$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T^{-1})$ ja

$$\langle T^{-1}x, T^*y\rangle = \langle x, TT^{-1}y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{1}$$

Toisaalta, adjungaatin määritelmän nojalla

$$\langle T^{-1}x, T^*y\rangle = \langle x, (T^{-1})^*T^*y\rangle$$

aina, kun $x \in \mathcal{D}(T^{-1})$. Täten $T^*y \in \mathcal{D}((T^{-1})^*)$. Tämän ja yhtälön (1) nojalla

$$(T^{-1})^*T^*y = y. \tag{2}$$

Edellisestä yhtälöstä seuraa, että $T^*$ on injektio, joten $(T^*)^{-1}$ on olemassa. Osoitetaan seuraavaksi että $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Yhtälön (2) nojalla $(T^{-1})^*$ on operaattorin $(T^*)^{-1}$ laajennus.

Osoitetaan vielä, että $(T^*)^{-1}$ on operaattorin $(T^{-1})^*$ laajennus. Olkoot $x \in \mathcal{D}(T)$ ja $y \in \mathcal{D}((T^{-1})^*$ mielivaltaisia. Tällöin $Tx \in \mathcal{D}(T^{-1})$ ja

$$\langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle T^{-1}Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{3}$$

Toisaalta, operaattorin $T$ adjungaatin määritelmän nojalla

$$\langle Tx, (T^{-1})^*y\rangle = \langle x, T^*(T^{-1})^*y\rangle$$

aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$. Tästä ja yhtälöstä (3) saadaan, että $(T^{-1})^*y \in \mathcal{D}(T^*)$ ja

$$T^*(T^{-1})^*y = y. \tag{4}$$

Nyt kuvaus $T^*(T^{-1})^*$ on identiteettikuvaus joukossa $\mathcal{D}((T^*)^{-1})$ ja lisäksi $(T^*)^{-1} : \operatorname{Im} T^* \to \mathcal{D}(T^*)$ on surjektio. Yhdistämällä nämä ja yhtälö (4) saadaan että $\mathcal{D}((T^{-1})^* \subset \mathcal{D}((T^*)^{-1})$. Siis $(T^*)^{-1}$ on operaattorin $(T^{-1})^*$ laajennus ja näin lause on saatu todistettua. □

**Lause 6.17.** *Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ tiheästi määritelty ja sulkeutuva. Olkoon $\overline{T}$ operaattorin $T$ minimaalinen suljettu laajennus. Tällöin*

*a)* $\overline{T}^* = T^*$ *ja*
*b)* $\overline{T} = T^{**}$.

*Todistus.* Nyt siis $\overline{T} : \mathcal{D}(\overline{T}) \subset H \to H$ on suljettu ja $\overline{T}x = Tx$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\overline{T})$, sekä $\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$. Koska $T$ on tiheästi määritelty, niin $\overline{T}^*$ on hyvin määritelty. Olkoon $v \in \mathcal{D}(\overline{T}^*)$ ja $w = \overline{T}^* v$, jolloin $\langle u, w\rangle = \langle \overline{T}u, v\rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(\overline{T})$. Tästä seuraa, että $\langle u, w\rangle = \langle Tu, v\rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\overline{T})$ eli $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^*v$. Siten $\mathcal{D}(\overline{T}^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$.

Olkoon nyt $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^*v$, jolloin $\langle x, w\rangle = \langle Tx, v\rangle$ aina, kun $x \in \mathcal{D}(T)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle x, w\rangle = \langle y, v\rangle$ aina, kun $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$. Olkoon $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}(\overline{T})$ mielivaltainen. Koska $\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$, on olemassa sellainen jono $(x_j, y_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}(T)$, että $x_j \to x_0$ ja $y_j \to y_0$. Siten $\langle x_j, w\rangle = \langle y_j, v\rangle$ aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$, ja kun $j \to \infty$, niin $\langle x_0, w\rangle = \langle y_0, v\rangle$ aina, kun $(x_0, y_0) \in \mathcal{G}(\overline{T})$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa että $\langle x_0, w\rangle = \langle \overline{T}x_0, v\rangle$ aina, kun $x_0 \in \mathcal{D}(\overline{T})$, joka on yhtäpitävää sen kanssa että $v \in \mathcal{D}(\overline{T}^*)$ ja $w = T^*v$. Siis $\overline{T}^* = T^*$.

Koska $\overline{T}$ on suljettu ja tiheästi määritelty, niin $\overline{T}^{**} = \overline{T}$, joten $\overline{T} = (\overline{T}^*)^* = (T^*)^* = T^{**}$. □

**Lause 6.18.** *Oletetaan, että $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ on tiheästi määritelty, symmetrinen ja surjektio. Tällöin $T$ on itseadjungoitu.*

*Todistus.* Koska $T$ on symmetrinen, niin $T^*$ on operaattorin $T$ laajennus. Olkoon $v \in \mathcal{D}(T^*)$ ja $w = T^*v$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle Tu, v\rangle = \langle u, w\rangle$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$. Koska $\operatorname{Im} T = H$, niin on olemassa sellainen $u_0 \in \mathcal{D}(T)$, että $w = Tu_0$, jolloin aina, kun $u \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tu_0\rangle = \langle Tu, u_0\rangle,$$

eli $\langle y, v - u_0\rangle = 0$ aina, kun $y \in \operatorname{Im} T = H$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa että $v = u_0 \in \mathcal{D}(T)$ ja $w = T^*u_0 = Tu_0$ eli $T$ on operaattorin $T^*$ laajennus. Siis operaattori $T$ on itseadjungoitu. □

## 6.3 Graafitopologia

Operaattorin $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ rajoittamattomuus on usein paha ongelma. Tämä voidaan kiertää siirtämällä tarkastelu ns. graafin suhteen määrättyyn topologiaan. Olkoon $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen kuvaus. Merkitään

$Y = \mathcal{D}(T)$ ja määritellään

$$\|u\|_Y^2 = \|u\|_H^2 + \|Tu\|_H^2$$

aina, kun $u \in Y = \mathcal{D}(T)$.

**Lause 6.19.** $\|\cdot\|_Y$ *on normi.*

*Todistus.*

i) Selvästi $\|u\|_Y \geq 0$ aina, kun $u \in Y$ ja $\|u\|_Y = 0$ jos ja vain jos $u = 0$.

ii) $\|\lambda u\|_Y = |\lambda|\|u\|_Y$ aina, kun $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $u \in Y$.

iii) Olkoon $u, v \in Y$. Tällöin

$$\begin{aligned}\|u+v\|_Y &= \sqrt{\|u+v\|^2 + \|Tu+Tv\|^2} \\ &\leq \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2 + (\|Tu\| + \|Tv\|)^2} \\ &\leq \sqrt{\|u\|^2 + \|Tu\|^2} + \sqrt{\|v\|^2 + \|Tv\|^2} \\ &= \|u\|_Y + \|v\|_Y.\end{aligned}$$

□

$Y$ on sisätuloavaruus, koska normi selvästi toteuttaa suunnikassäännön. Polarisaatiokaavoista saadaan sisätuloksi

$$\begin{cases}\langle u, v\rangle_Y = \langle u, v\rangle_H + \langle Tu, Tv\rangle_H \text{ aina, kun } u, v \in Y \text{ ja} \\ \langle u, u\rangle_Y = \|u\|_Y^2.\end{cases}$$

**Lause 6.20.** *Olkoon $T$ suljettu. Tällöin $Y$ on Hilbert-avaruus.*

*Todistus.* Olkoon $(u_k)_{k=1}^\infty \subset Y$ Cauchy-jono ts. $\|u_k - u_l\|_Y \to 0$ kun $k, l \to \infty$. Tällöin $(u_k)_{k=1}^\infty \subset H$, $(Tu_k)_{k=1}^\infty \subset H$ ovat Cauchy-jonoja avaruudessa $H$. Koska $H$ on Hilbert-avaruus, niin $u_k \to u$ ja $Tu_k \to w$ avaruudessa $H$. Koska $T$ on suljettu, niin $u \in \mathcal{D}(T) = Y$ ja $w = Tu$, joten $\|u_k - u\|_Y \to 0$ ts. $u_k \to u$ avaruudessa $Y$. □

Kun $T$ on suljettu, niin määritellään kuvaus $T_Y : Y \to H$ asettamalla $T_Y x = Tx$ aina, kun $x \in Y$ . Kuvaus $T_Y$ on lineaarinen ja $\|T_Y u\|_H \leq \|u\|_Y$ aina, kun $u \in Y$ eli $T_Y$ on rajoitettu lineaarinen kuvaus. Tällöin $T_Y \in \mathcal{B}(Y, H)$. Tässä $\|u\|_H \leq \|u\|_Y$ aina, kun $u \in Y$ eli upotus $Y \to H$ on jatkuva. Merkitään $i_Y : Y \to H$, $i_Y(u) = u$ aina, kun $u \in Y$. Siis $\|i_Y(u)\|_H \leq \|u\|_Y$ ja $i_Y$ on jatkuva.

# Luku 7

# Aalto-operaattori

Siirrytään tarkastelemaan kirjallisuudessa paljon käsitelty esimerkkiä rajoittamattomasta operaattorista, aalto-operaattoria. Oletetaan edelleen että $H$ on ääretönulotteinen separoituva kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus.

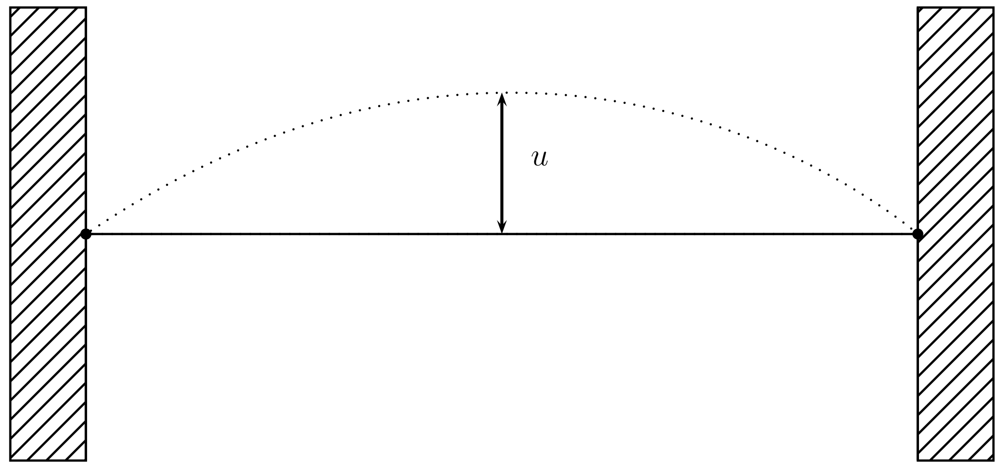
Lähteestä [3] löytyy aiheesta lisää.

## 7.1 Aaltoyhtälö ja aalto-operaattori

Yleinen (lineaarinen) yksiulotteinen aaltoyhtälö on muotoa

$$(WE) \quad \begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{c^2} u_{xx} = g(t, x, u(x,t)) \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbb{R}. \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \text{ aina, kun } t \in \mathbb{R} \text{ (Dirichlet'n reunaehto)}, \\ u(x, \cdot) \text{ on } \tau\text{-periodinen}, \end{cases}$$

missä $c$ on vakio, $g$ kuvaa ulkoisia voimia ja $g(\cdot, x, u)$ $\tau$-periodinen. Yleisyyden kärsimättä voidaan skaalata avaruusmuuttuja $x$ välille $[0, \pi]$. Mekaanisena mallina voisi olla esimerkiksi värähtelevä kieli, jonka pituus on $\pi$, $u$ on poikkeama tasapainosta ja päätepisteet kiinnitetty.




Jos $g = g(x,s)$, missä $x, s \in \mathbb{R}$, on riippumaton ajasta, niin aaltoyhtälöllä $(WE)$ voi olla ajasta riippumattomia ratkaisuja ts. $u = u(x)$ ja

$$\begin{cases} -u'' = c^2 g(x, u(x)), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \qquad \text{(tarkasteltu aikaisemmin)}$$

Tässä tapauksessa periodia $\tau$ ei ole annettu etukäteen. Usein yhtälössä $(WE)$ esiintyy termi $u_t$, joka edustaa vaimennusta tai kitkaa. Skaalataan $t$-muuttuja niin, että siitä tulee $2\pi$-periodinen. Olkoon

$$\hat{t} = \frac{2\pi}{\tau} t, \ 0 \leq t \leq \tau,$$

jolloin $0 \leq \hat{t} \leq 2\pi$ ja $\hat{u}(x, \hat{t}) = u(x,t)$ eli

$$u(x,t) = \hat{u}\left(x, \frac{2\pi}{\tau} t\right)$$

mistä seuraa, että

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} \frac{2\pi}{\tau} \ \text{ ja } \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{t}^2} \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2.$$

Sijoitetaan nämä aaltoyhtälöön $(WE)$, jolloin saadaan

$$\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} - \frac{1}{c^2} \hat{u}_{xx} = g\left(\frac{\tau}{2\pi} \hat{t}, x, \hat{u}\right).$$

Merkitään

$$\alpha^2 = c^2 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2,$$

ja jätetään hatut pois jolloin saadaan aaltoyhtälö muotoon

$$(WE)_\alpha \begin{cases} \alpha^2 u_{tt} - u_{xx} = g(t,x,u), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,\cdot) \text{ on } 2\pi\text{-periodinen.} \end{cases}$$

Kirjallisuudessa oletetaan usein, että $\alpha = 1$. Tällöin kuitenkin yleisyys kärsii. Tarkastellaan aluksi homogeenista tapausta $g = 0$. Nyt

$$\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sin jx \sin kt = \underbrace{(j^2 - \alpha^2 k^2)}_{\substack{om.arvo \\ \lambda_{jk}^{(\alpha)}}} \underbrace{\sin jx \sin kt}_{om.vektori}.$$

Merkitään

$$\varphi_{jk}(x,t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin jx \sin kt \quad \text{kun } j,k \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{\pi} \sin jx \quad \text{kun } j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin jx \cos kt \quad \text{kun } -k, j \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Nyt $\{\varphi_{jk}\}$ on Hilbert-avaruuden $H = L_2(\Omega)$, $\Omega = ]0,\pi[\times]0,2\pi[$ ortonormaali kanta. Lisäksi vektorit $\varphi_{jk}$ toteuttavat reuna- ja perioidisuusehdot yhtälössä $(WE)_\alpha$. Määritellään operaattori $T_0$ ja määritysjoukko $\mathcal{D}(T_0)$ asettamalla

$$\begin{aligned} &T_0 u = \alpha^2 u_{tt} - u_{xx} \text{ ja} \\ &\mathcal{D}(T_0) = \big\{u : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R} \mid u \in C^2(\overline{\Omega}),\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ kaikilla } t, \\ &\ u(x,0) = u(x,2\pi),\ u_t(x,0) = u_t(x,2\pi) \text{ kaikilla } x\big\}. \end{aligned}$$

Kuten aikaisemmassa esimerkissä saadaan seuraavat tulokset.

a) Operaattori $T_0$ on tiheästi määritelty.

b) $T_0$ on symmetrinen eli aina, kun $u, v \in \mathcal{D}(T_0)$ saadaan osittain integroimalla

$$\langle T_0 u, v\rangle = \int_\Omega (\alpha^2 u_{tt} - u_{xx}) v = \langle u, T_0 v\rangle.$$

Koska $T_0$ on symmetrinen, niin $T_0^* := L$ on operaattorin $T_0$ laajennus ja saadaan samalla tavalla kuin aikaisemmassa esimerkissä, että

$$Lu = \sum_{j,k} \langle u, \varphi_{jk}\rangle T_0 \varphi_{jk} = \sum_{j,k} \lambda_{jk}^{(\alpha)} \langle u, \varphi_{jk}\rangle \varphi_{jk}.$$

**Lemma 7.1.** *Kun merkitään $L = T_0^*$, niin*

$$\mathcal{D}(L) = \big\{u \in H \mid \sum_{j,k} |\lambda_{jk}^{(\alpha)} \langle u, \varphi_{jk}\rangle|^2 < \infty\big\},$$

$$Lu = \sum_{j,k} \lambda_{jk}^{(\alpha)} \langle u, \varphi_{jk}\rangle \varphi_{jk} \text{ aina, kun } u \in \mathcal{D}(L),$$

$$\lambda_{jk}^{(\alpha)} = j^2 - \alpha^2 k^2 \quad j \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}.$$

*Todistus.* Kuten aikaisemmassa esimerkissä. □

c) Operaattori $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$ on siis operaattorin $T_0$ laajennus, joka on tiheästi määritelty, suljettu ja itseadjungoitu.

## 7.2 Vakion $\alpha$ merkitys

Nyt $u \in \operatorname{Ker} L$ jos ja vain jos

$$\sum_{j,k} \lambda_{jk}^{(\alpha)} \langle u, \varphi_{jk}\rangle \varphi_{jk} = 0,$$

joka on yhtäpitävää sen kanssa, että kaikilla $j$ ja $k$ $\lambda_{jk}^{(\alpha)} \langle u, \varphi_{jk}\rangle = 0$. Edelleen tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle u, \varphi_{jk}\rangle = 0$ aina, kun $\lambda_{jk}^{(\alpha)} \neq 0$, ja tämä on voimassa jos ja vain jos

$$u \in \overline{\operatorname{sp}\big\{\varphi_{jk} \mid \lambda_{jk}^{(\alpha)} = 0\big\}}.$$

Nyt $\lambda_{jk}^{(\alpha)} = 0$ jos ja vain jos $j^2 = \alpha^2 k^2$ ja tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\alpha = \frac{j}{|k|} \in \mathbb{Q}.$$

Siten, jos $\alpha$ ei ole rationaalinen, niin $L$ on injektio. Tarkastellaan aluksi kirjallisuudessa paljon käsiteltyä perustapausta $\alpha = 1$. Tällöin

$$\lambda_{jk}^{(1)} \overset{merk.}{=} \lambda_{jk} = j^2 - k^2 \quad j \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}$$

ja

$$\operatorname{Ker} L = \overline{\operatorname{sp}\big\{\varphi_{jk} \mid j = |k|\big\}},$$
$$\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{sp}\big\{\varphi_{jk} \mid j \neq |k|\big\}} = (\operatorname{Ker} L)^\perp.$$

Erityisesti $\operatorname{Im} L$ on suljettu. Jos $w = Lu$ ja $w \in \operatorname{Im} L$, niin tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\lambda_{jk}\langle u, \varphi_{jk}\rangle = \langle w, \varphi_{jk}\rangle$ aina, kun $\lambda_{jk} \neq 0$ , joka taas on yhtäpitävää sen kanssa että

$$u = \sum_{\lambda_{jk}\neq 0} \frac{\langle w, \varphi_{jk}\rangle}{\lambda_{jk}} \varphi_{jk}.$$

Sarja suppenee, koska $|\lambda_{jk}| \geq 1$. Merkitään $K = (L_{|\operatorname{Im} L})^{-1} : \operatorname{Im} L \to \operatorname{Im} L$ ja osoitetaan että $K$ on kompakti. Jos $w = Lu$, niin tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$u = Kw = \sum_{\lambda_{jk}\neq 0} \frac{\langle w, \varphi_{jk}\rangle}{\lambda_{jk}} \varphi_{jk}$$

aina, kun $w \in \operatorname{Im} L$. Aina kun $\lambda_{jk} \neq 0$, seuraava on voimassa

$$|\lambda_{jk}| = |j^2 - k^2| = |j + |k|||j - |k|| \geq j + |k|.$$

Määritellään operaattori $K_n$ asettamalla

$$K_n w = \sum_{0<|\lambda_{jk}|\leq n} \frac{\langle w, \varphi_{jk}\rangle}{\lambda_{jk}} \varphi_{jk}.$$

Nyt operaattori $K_n$ on kompakti kaikilla $n$, sillä $\dim \operatorname{Im} K_n$ on äärellinen ja koska $\|K_n - K\| \to 0$, niin $K$ on kompakti. Ominaisarvon $\lambda$ geometrinen kertaluku $m(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - L)$, missä

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - L) = \overline{\operatorname{sp}\{\varphi_{jk} \mid \lambda_{jk} = \lambda\}},\ L\varphi_{jk} = \lambda_{jk}\varphi_{jk}.$$

Siis $m(\lambda)$ on yhtälön $\lambda_{jk} = \lambda$ ratkaisujen $(j, k)$ lukumäärä. Jos $\lambda = 0$, niin $m(0) = \infty$, koska $\lambda_{j,\pm j} = 0$ aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$. Jos taas $\lambda \neq 0$, niin $m(\lambda)$ on äärellinen, sillä jos $j^2 - k^2 = \lambda$, niin

$$|\lambda| = (j + |k|)(j - |k|) \geq j + |k|,$$

joita voi olla vain äärellinen määrä. Eräitä huomioita:

a) $\lambda_{jk} = \lambda_{j,-k}$.

b) Jos $\lambda = l^2$ ja $l \neq 0$, niin edellisen kohdan nojalla $m(\lambda)$ on pariton,

$$\lambda = \lambda_{l,0} = \lambda_{j_1,\pm k_1} = \cdots = \lambda_{j_p,\pm k_p}.$$

c) Jos $\lambda \neq l^2$ aina, kun $l \in \mathbb{Z}_+$, niin $m(\lambda)$ on parillinen.

Kertaluvulla on merkitystä aaltoyhtälön $(WE)$ ratkeavuuden kannalta.

d) $\sigma(L) = \{\lambda_{jk} = j^2 - k^2 \mid j \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda \neq 4n+2,\ n \in \mathbb{Z} \text{ ja } \lambda \neq -1, -4\}$.

e) $m(\lambda_{jk}) = 1$ jos ja vain jos $\lambda_{jk} = 1 = \lambda_{1,0}$ tai $\lambda_{jk} = 4 = \lambda_{2,0}$.

Jos $\alpha$ on rationaalinen ja $\alpha = \frac{p}{q}$, niin

$$\lambda_{jk}^{(\alpha)} = j^2 - \frac{p^2}{q^2}k^2 = \frac{1}{q^2}((jq)^2 - (pk)^2) = \frac{1}{q^2}\lambda_{jq,pk}^{(1)}.$$

Tällöin tilanne palautuu laadullisesti standarditapaukseen $\alpha = 1$. Ominaisarvot ovat erillisiä ja kertaluvut äärellisiä, paitsi tapaus $\lambda = 0$ jolloin kertaluku on ääretön. Spektrillä ei ole kasautumispisteitä.

Olkoon seuraavaksi $\alpha$ irrationaalinen. Kun $Lu = w$, niin formaalisti voidaan kirjoittaa

$$u = \sum_{j,k} \frac{\langle w, \varphi_{jk}\rangle}{\lambda_{jk}^{(\alpha)}}\varphi_{jk} = L^{-1}w. \tag{1}$$

Nyt $\lambda_{jk}^{(\alpha)} = j^2 - \alpha^2 k^2 \neq 0$ aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Sarja (1) ei kuitenkaan välttämättä suppene. Tästä saadaan ns. small divisor-problem, eli milloin $\lambda_{jk}^{(\alpha)}$ lähestyy nollaa. Voidaan erottaa kaksi tapausta.

a) Jos $\inf\limits_{j,k}|j^2 - \alpha^2 k^2| := c_0 > 0$, niin sarja (1) suppenee aina, kun $w \in H$ ja

$$\|L^{-1}w\|^2 = \sum_{j,k} \frac{|\langle w, \varphi_{jk}\rangle|^2}{|\lambda_{jk}^{(\alpha)}|^2} \leq \frac{1}{c_0^2}\|w\|^2.$$

Täten $\|L^{-1}\| \leq c_0^{-1}$. Voidaan itseasissa osoittaa, että $\|L^{-1}\| = c_0^{-1}$.

**Esimerkki 20.** Olkoon $\alpha = \sqrt{2}$. Tällöin $\lambda_{jk}^{(2)} = j^2 - 2k^2$ (Pellin yhtälö). Ketjumurtolukujen avulla voidaan osoittaa, että yhtälöllä on joko ääretön määrä ratkaisuja tai ei yhtään ratkaisua aina, kun $\lambda$ on reaalinen. Selvästi $\lambda_{jk}^{(2)} \in \mathbb{Z}$, joten $|\lambda_{jk}^{(2)}| \geq 1$ aina, kun $\lambda_{jk}^{(2)} \neq 0$.

Yleisemmin voidaan osoittaa, että $\inf\limits_{j,k}|j^2 - \alpha^2 k^2| = 0$ m.k. reaalisten irrationaalilukujen joukossa.

b) Jos $\inf\limits_{j,k}|j^2 - \alpha^2 k^2| = 0$, niin

$$j^2 - \alpha^2 k^2 = k^2\left(\frac{j^2}{k^2} - \alpha^2\right) = k^2\left(\frac{j}{|k|} - \alpha\right)\left(\frac{j}{|k|} + \alpha\right).$$

Jos $\lambda_{jk}^{(\alpha)} \to 0$, niin $\frac{j}{|k|} \to \alpha$ ja $|k| \to \infty$. Hurwitzin lauseen mukaan on olemassa ääretön määrä sellaisia positiivisia rationaalilukuja $j_i k_i^{-1}$, että

$$|\alpha - \frac{j_i}{k_i}| < \frac{c}{k_i^2}, \text{ missä } c \geq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tästä ei kuitenkaan nyt ole mitään apua, sillä $|\lambda_{j_i k_i}| \le c\left(\frac{j_i}{|k_i|} + \alpha\right) \approx 2\alpha$. Jatkossa tyydytään tarkastelemaan tapausta, jossa $\alpha$ on rationaalinen.

## 7.3 Aalto-operaattorin rajoittuma

Olkoon $\alpha$ positiivinen rationaaliluku. Tällöin

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{j,k} \lambda_{jk}^{(\alpha)} \langle u, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} \text{ ja} \\ \mathcal{D}(L) &= \big\{ u \in H = L_2(\Omega) \mid Lu \in H \big\}. \end{aligned}$$

**Lause 7.2.** *Operaattori $L$ on tiheästi määritelty, suljettu, itseadjungoitu,* $\operatorname{Ker} L$ *on ääretönulotteinen ja* $\operatorname{Im} L = (\operatorname{Ker} L)^{\perp}$ *eli* $\operatorname{Im} L$ *on suljettu.*

*Todistus.* Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $\alpha = 1$. On selvää, että $L$ on tiheästi määritelty, itseadjungoitu ja suljettu. Nyt $u \in \operatorname{Ker} L$ jos ja vain jos $u \in \overline{\operatorname{sp}\big\{\varphi_{j,\pm j} \mid j \in \mathbb{Z}_+\big\}}$. Kun $w \in (\operatorname{Ker} L)^{\perp}$, niin on helppo todeta, että $w \in \operatorname{Im} L$, joten $\operatorname{Im} L = (\operatorname{Ker} L)^{\perp}$. □

Otetaan seuraava määritelmä käyttöön mukavuussyistä. $H$ on nyt reaalinen Hilbert-avaruus.

**Määritelmä 7.1.** Operaattorin $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ sanotaan olevan *aalto-operaattorin tyyppiä*, jos $T$ on tiheästi määritelty, suljettu, itseadjungoitu ja $\operatorname{Im} T$ on suljettu.

**Lause 7.3.** *Olkoon $T$ aalto-operaattorin tyyppiä. Merkitään $T_0 : \mathcal{D}(T_0) \subset \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T$ operaattorin $T$ rajoittumaa , $T_0 u = Tu$ aina, kun $u \in \mathcal{D}(T) \cap \operatorname{Im} T = \mathcal{D}(T_0)$. Tällöin myös $T_0$ on aalto-operaattorin tyyppiä ja lisäksi $T_0^{-1} : \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T$ on olemassa ja rajoitettu.*

*Todistus.* Nyt $\operatorname{Im} T_0 = \operatorname{Im} T$, joten $\operatorname{Im} T_0$ on suljettu.
Osoitetaan seuraavaksi, että $T_0$ on tiheästi määritelty avaruudessa $\operatorname{Im} T$. Nyt $H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T^*} = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$. Olkoon $w \in \operatorname{Im} T$ mielivaltainen. Koska $\mathcal{D}(T)$ on tiheä avaruudessa $H$, niin on olemassa sellainen jono $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T)$, että $w_k \to w$. Vektorille $w_k$ on olemassa esitys $w_k = a_k + b_k$, missä $a_k \in \operatorname{Ker} T$ ja $b_k \in \operatorname{Im} T$. Koska $w_k \in \mathcal{D}(T)$ ja $a_k \in \operatorname{Ker} T \subset \mathcal{D}(T)$ sekä $\mathcal{D}(T)$ on lineaarinen aliavaruus, niin $b_k = w_k - a_k \in \mathcal{D}(T)$. Siis $(b_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T) \cap \operatorname{Im} T$. Lisäksi

$$\|w - w_k\|^2 = \|w - b_k\|^2 + \|a_k\|^2 \to 0,$$

joten $a_k \to 0$ ja $b_k \to w$. Siis jokainen $w \in \operatorname{Im} T$ on joukon $\mathcal{D}(T_0)$ kasautumispiste. Siten $\overline{\mathcal{D}(T_0)} = \operatorname{Im} T$.

Osoitetaan seuraavaksi että $T_0$ on itseadjungoitu. Olkoon $w = T_0^* v$ ja $v \in \mathcal{D}(T_0^*)$. Tämä on adjungaatin määritelmän nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että aina, kun $u \in \mathcal{D}(T_0) = \mathcal{D}(T) \cap \operatorname{Im} T$

$$\langle T_0 u, v \rangle = \langle u, w \rangle.$$

Edelleen voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa ($z \in \mathcal{D}(T)$ mielivaltainen, $z = u + x$ missä $u \in \operatorname{Im} T$ ja $x \in \operatorname{Ker} T$)

$$\langle z, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle x, w \rangle = \langle T_0 u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle + \langle Tx, v \rangle = \langle Tz, v \rangle$$

aina, kun $z \in \mathcal{D}(T)$. Tämä on adjungaatin määritelmän nojalla yhtäpitävää sen kanssa, että $v \in \mathcal{D}(T^*) \cap \operatorname{Im} T$ ja $w = T^* v$. Koska $T$ on itseadjungoitu, niin tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $v \in \mathcal{D}(T_0)$ ja $w = T_0 v$. Täten $T_0$ on itseadjungoitu.

Osoitetaan että $T_0$ on suljettu. Olkoon $(u_k) \subset \mathcal{D}(T_0)$, $u_k \to u$ ja $T_0 u_k \to w$ avaruudessa $\operatorname{Im} T$. Tällöin $T u_k \to w$ avaruudessa $H$ ja koska $T$ on suljettu, niin $u \in \mathcal{D}(T)$ ja $w = Tu$. Koska $\operatorname{Im} T$ on suljettu ja $(u_k) \subset \operatorname{Im} T$, niin $u \in \operatorname{Im} T \cap \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_0)$ ja $T_0 u = w$.

Nyt $T_0 u = 0$ jos ja vain jos $Tu = 0$, missä $u \in \operatorname{Im} T \cap \mathcal{D}(T)$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa että $u \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$, joten $T_0^{-1}$ on olemassa. Aikaisempien lauseiden mukaan $T_0^{-1}$ on rajoitettu jos ja vain jos $\operatorname{Im} T_0$ on suljettu, joten $T_0^{-1}$ on rajoitettu. □

**Lause 7.4.** *Olkoon $T$ aalto-operaattorin tyyppiä ja $T_0^{-1}$ kompakti. Tällöin operaattorilla $T$ on spektraaliesitys*

$$Tu = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j \langle u, e_j \rangle e_j,$$

*missä $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ja $|\lambda_j| \to \infty$, jos $(\lambda_j)$ on ääretön jono.*

*Todistus.* Koska $T_0^{-1}$ on kompakti ja itseadjungoitu, niin on olemassa kuva-avaruuden $\operatorname{Im} T$ ortonormaali kanta $\{e_j\}$ ja sellaiset luvut $r_j \in \mathbb{R}$, että

$$T_0^{-1} e_j = r_j r_j$$

aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$ ja

$$T_0^{-1} v = \sum_{j=1}^{\infty} r_j \langle v, e_j \rangle e_j.$$

Jono $(r_j) \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu, ja jos se on ääretön, niin $r_j \to 0$. Nyt $Tu = w$ jos ja vain jos $T(Pu + Qu) = Pw + Qw$, missä $P : H \to \operatorname{Ker} T$ ja $Q = I - P : H \to (\operatorname{Ker} P)^\perp = \operatorname{Im} T$ ovat ortogonaaliprojektioita. Siis $T_0 Qu = Qw$ jos ja vain jos $Qu = T_0^{-1} Qw$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} r_j \langle w, e_j \rangle e_j.$$

Edelleen yhtäpitävää tämän kanssa on että aina, kun $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\langle w, e_j \rangle = \frac{1}{r_j} \langle u, e_j \rangle,$$

joten

$$Qw = \sum \frac{1}{r_j} \langle u, e_j \rangle e_j = QTu = Tu.$$

Siis kun merkitään $\lambda_j = r_j^{-1}$, niin saadaan väite ja lisäksi $|\lambda_j| \to \infty$ jos jono on ääretön. $\square$

## 7.4 Spektri ja ratkeavuus

Tarkastellaan seuraavaksi miten spektrin rakenne vaikuttaa aaltoyhtälön $(WE)_\alpha$ ratkeavuuteen ja ratkaisujen lukumäärään. Olkoon $g = g(s)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vähintään jatkuva. Tarkastellaan yhtälöä

$$(WE)_\alpha \quad \begin{cases} \alpha^2 u_{tt} - u_{xx} = g(u(x,t)), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,\cdot) \ 2\pi\text{-periodinen.} \end{cases}$$

Jotta $g(u) \in L_2(\Omega)$, missä $\Omega = ]0,\pi[\times]0,2\pi[$, on funktion $g$ toteutettava kasvuehto

$$|g(s)| \le c_1 |s| + c_2. \tag{1}$$

Koska $g$ on jatkuva, niin $g(u(\cdot,\cdot))$ on mitallinen aina, kun $u \in H = L_2(\Omega)$ ja

$$\int_\Omega |g(u(x,t))|^2 \overset{(1)}{\le} \int_\Omega (c_1 |u(x,t)| + c_2)^2 < \infty.$$

Olkoon $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$ aalto-operaattori ja $\alpha$ positiivinen rationaaliluku.

**Lause 7.5** (Perustulos). *Oletetaan, että $g \in C^1$, $g(0) = 0$ ja $g$ toteuttaa kasvuehdon (1) sekä $0 < a \leq g'(s) \leq b$ aina, kun $s \in \mathbb{R}$. Jos $[a,b] \cap \sigma(L) = \emptyset$, niin yhtälöllä $(WE)_\alpha$ on vain triviaali ratkaisu $u = 0$.*

*Todistus.* Olkoon $Lu = g(u)$ ja $\eta \in \rho(L)$, missä $\eta > 0$. Tällöin

$$Lu - \eta u = g(u) - \eta u := g_\eta(u) \text{ jos ja vain jos } u = (L - \eta I)^{-1} g_\eta(u).$$

Nyt $\|(L - \eta I)^{-1}\| = (\operatorname{dist}(\eta, \sigma(L)))^{-1}$, joten

$$\|u\| \leq \|(L - \eta I)^{-1}\| \|g_\eta(u)\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\eta, \sigma(L))} \|g_\eta(u)\|. \tag{1}$$

Väliarvolauseen avulla voidaan muodostaa arvio

$$g(s) - g(0) = g'(\theta)(s - 0),$$

mistä seuraa, että

$$\frac{g(s)}{s} = g'(\theta) \in [a, b].$$

Täten

$$a - \eta \leq \frac{g_\eta(s)}{s} = \frac{g(s)}{s} - \eta \leq b - \eta,$$

mistä seuraa, että

$$|g_\eta(s)| \leq \max\big(|b - \eta||s|, |a - \eta||s|\big). \tag{2}$$

Valitaan $\eta = \frac{a+b}{2}$, jolloin $b - \eta = \eta - a = \frac{b-a}{2}$ ja $\operatorname{dist}(\eta, \sigma(L)) > \frac{b-a}{2}$. Siis $|g_\eta(s)| \leq r_\eta |s|$, missä $r_\eta = \frac{b-a}{2} < \operatorname{dist}(\eta, \sigma(L))$. Tällöin

$$\|g_\eta(u)\|^2 = \iint_\Omega |g_\eta(u(t,x))|^2 dx\, dt \leq r_\eta^2 \leq \iint_\Omega |u(t,x)|^2 = r_\eta^2 \|u\|^2,$$

mistä seuraa, että

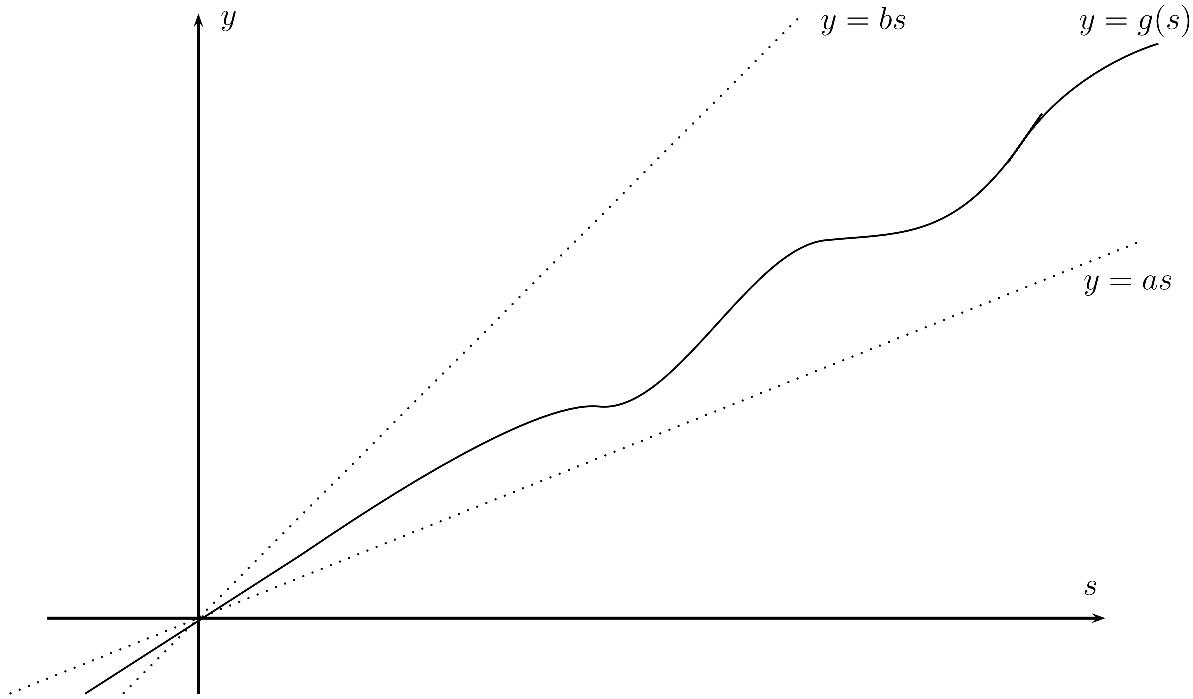
$$\|g_\eta(u)\| \leq r_2 \|u\|. \tag{3}$$

Arvioiden (1) ja (3) nojalla

$$\|u\| \leq \frac{r_\eta}{\operatorname{dist}(\eta, \sigma(L))} \|u\|, \text{ missä } \frac{r_\eta}{\operatorname{dist}(\eta, \sigma(L))} < 1,$$

joten $\|u\| = 0$. $\square$

Siis funktion $g$ kasvu on rajoitettu globaalisti suorilla $y = as$, $y = bs$ sekä lokaalisti ehdolla $a \leq g'(s) \leq b$.




Ehto $[a, b] \cap \sigma(L) \neq \emptyset$ on välttämätön, mutta ei kuitenkaan riittävä ehto ei-triviaalin ratkaisun olemassaololle. Lokaali kasvuehto voidaan korvata lievemmällä ehdolla $a \leq \frac{g(s)}{s} \leq b$ aina, kun $s \neq 0$, jolloin globaali kasvu on edelleen rajoitettua, mutta $g'(s)$ voi saada mielivaltaisen suuria arvoja.

**Huomautus.** Edellä ehto $[a, b] \cap \sigma(L) \neq \emptyset$ riippuu parametrista $\alpha$, joka taas riippuu aallonpituudesta, $\alpha = \frac{2\pi}{\tau} c$.

Jos $g = g(t, x, s)$ ja $g(\cdot, x, s)$ on $\tau$-periodinen, niin $\tau$ on kiinnitetty. Jos taas $g = g(x, s)$ eli $g$ on ajasta riippumaton, voidaan ongelmaa $(WE)_\alpha$ tarkastella parametrin $\alpha$ eri arvoilla, eli siis aallonpituus $\tau$ on tällöin vapaa parametri.

Yleensä on oletettava, että $g$ on kasvava. Seuraavaan on listattu muutama perustulos koskien ei-triviaalien ratkaisujen lukumäärää.

a) Olkoon $[a, b] \cap \sigma(L) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $g$ kasvava ja $a \leq \frac{g(s)}{s} \leq b$. Jos $m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_n)$ on pariton, niin yhtälöllä $(WE)_\alpha$ on ei-triviaali ratkaisu.

b) Jos $(j_0 - 1)^2 < a < j_0^2 < b < (j_0 + 1)^2$ niin on olemassa ääretön määrä sellaisia aallonpituuksia, että $[a, b] \cap \sigma(L) = \{j_0^2\}$. Tällöin $m(j_0^2) = 1$ ja 1)-kohdan tulosta voidaan parantaa, sillä voidaan osoittaa että yhtälöllä $(WE)_\alpha$ on ainakin 2 erisuurta ei-triviaalia ratkaisua.

# Luku 8

# Systeemit ja matriisispektri

Oletetaan tässä luvussa, että $H$ on separoituva reaalinen Hilbert-avaruus.

## 8.1 Diagonaalioperaattori

Olkoon $\mathcal{H} = H^n$. Tuloavaruudesta $\mathcal{H}$ saadaan Hilbert-avaruus, kun määritellään sisätulo asettamalla

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i \rangle_H,$$

missä $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathcal{H}$.

Olkoon $T_k : \mathcal{D}(T_k) \subset H \to H$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ lineaarinen. Määritellään *diagonaalioperaattori* $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ asettamalla

$$Tu = (T_1 u_1, \ldots, T_n u_n), \; u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{D}(T_1) \times \cdots \times \mathcal{D}(T_n).$$

Merkitään $T = \operatorname{diag}(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Pystyvektoreita käyttämällä voidaan kirjoittaa

$$Tu = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & T_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

On helppo todeta seuraavat

1) $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_1) \times \ldots \times \mathcal{D}(T_n)$.
2) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T_1 \times \cdots \times \operatorname{Ker} T_n$.
3) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T_1 \times \cdots \times \operatorname{Im} T_n$.
4) Jos $\overline{\mathcal{D}(T_k)} = H$ kaikilla $k$, niin $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$.

5) Jos $\operatorname{Ker} T_k = \{0\}$ kaikilla $k$, niin $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
6) Jos $\operatorname{Im} T_k = H$ kaikilla $k$, niin $\operatorname{Im} T = \mathcal{H}$.
7) Jos $T_k$ on suljettu kaikilla $k$, niin $T$ on suljettu.
8) Jos $\overline{\mathcal{D}(T_k)} = H$ kaikilla $k$, niin $T^* = \operatorname{diag}(T_1^*, \ldots, T_n^*)$ ja $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T_1^*) \times \cdots \times \mathcal{D}(T_n^*)$.
9) $T^{-1} = \operatorname{diag}(T_1^{-1}, \ldots, T_n^{-1})$, mikäli $T^{-1}$ on olemassa kaikilla $k$.

## 8.2 Matriisin indusoima kuvaus

Olkoon $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ reaalinen $n \times n$-matriisi. Määritellään lineaarinen kuvaus $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ asettamalla aina, kun $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{A}u = w = (w_1, w_2, \ldots, w_n),$$

missä

$$w_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kl} u_l.$$

Olkoon $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikanta ja $\{\varphi_k\} \subset H$ jokin avaruuden $H$ ortonormaali kanta. Tällöin jokainen $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}$ voidaan esittää muodossa

$$u = \sum_{l=1}^{n} u_l e_l = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k} \langle u_l, \varphi_k \rangle \varphi_k e_l.$$

On helppo nähdä, että $\{\varphi_k e_l\} \subset \mathcal{H}$ on ortonormaali kanta. Kun merkitään $\varphi_k e_l = \phi_{k,l}$, on $\langle u, \phi_{k,l} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_l, \varphi_k \rangle_H$ ja siis

$$u = \sum_{l,k} \langle u, \phi_{k,l} \rangle \phi_{k,l}.$$

Jatkon kannalta on hyödyllistä merkitä

$$\vec{u}_k = \sum_{l=1}^{n} \langle u_l, \varphi_k \rangle e_l \in \mathbb{R}^n,$$

jolloin saadaan esitys

$$u = \sum_{k} \vec{u}_k \varphi_k.$$

Suoraan laskemalla nähdään, että

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k} \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k$$

ja siis

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \sum_k \|\vec{u}_k\|^2_{\mathbb{R}^n}.$$

Nyt operaattorille $\mathcal{A}$ saadaan seuraava nk. blokkidiagonaaliesitys:

$$\begin{aligned} w = \mathcal{A}u &= \sum_{i=1}^n w_i e_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_j e_j = \sum_{j,i=1}^n a_{ij} \sum_k \langle u_j, \varphi_k\rangle \varphi_k e_j \\ &= \sum_k \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \langle u_j, \varphi_k\rangle \right) e_i \right] \varphi_k \\ &= \sum_k \left(\mathbf{A}\vec{u}_k\right) \varphi_k. \end{aligned}$$

Blokkidiagonaaliesityksen avulla on helppo todeta seuraavat.

1) $\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \sum\limits_k (\mathbf{A}\vec{u}_k) \cdot \vec{v}_k$.
2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ jos ja vain jos $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.
3) $\|\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\|u\| \le 1} \|\mathcal{A}u\| = \|\mathbf{A}\| = \sup\limits_{\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} \le 1} \|\mathbf{A}\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}$.
   Erityisesti $\mathcal{A}$ on rajoitettu.
4) Jos $\mathbf{A}$ on aidosti positiivinen ts. $\mathbf{A}\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$ aina, kun $\bar{x} \neq \bar{0}$, niin

   $$\langle \mathcal{A}u, u\rangle \ge \alpha \|u\|^2 \text{ aina, kun } u \in \mathcal{H},$$

   missä $\alpha = \min\limits_{\|\bar{x}\|=1} \mathbf{A}\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$ (jatkuva funktio $f(\bar{x}) = \mathbf{A}\bar{x} \cdot \bar{x}$ saa pienimmän arvonsa kompaktissa joukossa $\|\bar{x}\| = 1$).

**Esimerkki 21.** Kahden aaltoyhtälön systeemi on

$$(*) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - au - bv = f_1(x) \\ v_{tt} - v_{xx} - cu - dv = f_2(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ u(x,\cdot) \text{ ja } v(x,\cdot) \text{ ovat } 2\pi\text{-perioidisia.} \end{cases}$$

Matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

kuvaa *lineaarista kytkentää* ja $f_1$, $f_2$ ulkoisia voimia. Kun aalto-operaattorista käytetään merkintää $L$, on vastaava diagonaalioperaattori $\mathcal{L} = \operatorname{diag}(L, L)$ ja systeemiä $(*)$ vastaavaksi operaattoriyhtälöksi tulee

$$\mathcal{L}z - \mathcal{A}z = f,\ z = (u, v)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{L}),$$

missä $f = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H} = H^2$, $H = L^2(\Omega)$ ja $\Omega = ]0, \pi[\times]0, 2\pi[$.

Operaattoriyhtälön ratkaisut ovat systeemin $(*)$ heikkoja ratkaisuja. Lineaarisen operaattorin $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ riippuuvuus neljästä parametrista $a, b, c$ ja $d$ vaikuttaa operaattoriyhtälön ratkeavuuteen. Erikoistapauksessa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{I}$$

päädytään operaattorin $\mathcal{L}$ spektriin. Yleisessä tapauksessa voidaan määritellä nk. matriispektri, jota käsitellään seuraavaksi.

## 8.3 Matriisispektri

Olkoon $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineaarinen kuvaus ja $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ reaalinen matriisi. Olkoon $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ alaluvun 8.2 mukainen matriisin $\mathbf{A}$ indusoima lineaarinen kuvaus.

Määritellään lineaarisen kuvauksen $\mathcal{L}$ *matriisiresolventti*

$$\rho_M(\mathcal{L}) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n \times n} \mid \overline{\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A})} = \mathcal{H},\ (\mathcal{L} - \mathcal{A})^{-1} : \mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A}) \to \mathcal{H} \text{ on olemassa ja rajoitettu}\}$$

ja *matriisispektri*

$$\sigma_M(\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{n \times n} \mid \mathbf{A} \notin \rho_M(\mathcal{L})\big\}.$$

Koska $\mathbb{R}_{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, niin matriispektri voidaan ajatella avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ osajoukoksi. Kun $n = 2$, niin $\sigma_M(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}^4$.

Matriisispektri jaetaan, kuten tavallinenkin spektri, pistespektriin, jatkuvaan spektriin ja residuaalispektriin. Kuten jo luvussa 4 tehtiin, määritellään operaattorin tilat:

$I$ $\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

$II$ $\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A}) \neq \mathcal{H}$, $\overline{\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

$III$ $\overline{\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A})} \neq \mathcal{H}$.

1. $(\mathcal{L} - \mathcal{A})^{-1}$ on olemassa ja jatkuva.
2. $(\mathcal{L} - \mathcal{A})^{-1}$ on olemassa ja epäjatkuva.
3. $(\mathcal{L} - \mathcal{A})^{-1}$ ei ole olemassa.

Tehdään spektrin jaottelu vastaavalla tavalla kuin aikaisemmin.

**Määritelmä 8.1.** *Pistespektri* $P\sigma_M(\mathcal{L})$ koostuu niistä matriiseista $\mathbf{A}$, joilla operaattori $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ on tilassa $I_3$, $II_3$ tai $III_3$.

Siis $\mathbf{A} \in P\sigma_M(\mathcal{L})$ täsmälleen silloin, kun $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ ei ole injektio.

**Määritelmä 8.2.** *Jatkuva spektri* $C\sigma_M(\mathcal{L})$ koostuu niistä matriiseista $\mathbf{A}$, joilla operaattori $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ on tilassa $I_2$ tai $II_2$.

Nyt siis $\mathbf{A} \in C\sigma_M(\mathcal{L})$ jos ja vain jos $\overline{\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A})} = \mathcal{H}$, $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ on injektio, mutta $(\mathcal{L} - \mathcal{A})^{-1}$ ei ole rajoitettu.

**Määritelmä 8.3.** *Residuaalispektri* $R\sigma_M(\mathcal{L})$ koostuu niistä matrisiiseista $\mathbf{A}$, joilla operaattori $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ on tilassa $III_1$ tai $III_2$.

Siis $\mathbf{A} \in R\sigma_M(\mathcal{L})$ täsmälleen silloin, kun $\overline{\mathrm{Im}(\mathcal{L} - \mathcal{A})} \neq \mathcal{H}$ ja $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ on injektio.

Jaon perusteella resolventtia $\rho_M(\mathcal{L})$ vastaavat tilat $I_1$ ja $II_1$.

Yleisessä tapauksessa matriisispektrin rakenteesta ei ole paljoa tietoa. Perustulos on

**Lause 8.1.** *$\sigma_M(\mathcal{L})$ on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon $\mathbf{A}_0 \in \rho_M(\mathcal{L})$. Tällöin

$$\mathcal{L} - \mathcal{A} = \mathcal{L} - \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0 - \mathcal{A} = (I + (\mathcal{A}_0 - \mathcal{A})(\mathcal{L} - \mathcal{A}_0)^{-1})(\mathcal{L} - \mathcal{A}_0),$$

missä $\mathcal{L} - \mathcal{A}_0$ on kääntyvä ja $I + (\mathcal{A}_0 - \mathcal{A})(\mathcal{L} - \mathcal{A}_0)^{-1}$ on kääntyvä, kun $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_0\| < \frac{1}{\|(\mathcal{L}-\mathcal{A}_0)^{-1}\|}$. Aikaisemmin esitetyn perusteella $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_0\| = \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_0\|$, joten $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ on kääntyvä eli $\mathbf{A} \in \rho_M(\mathcal{L})$, kun $\mathbf{A}$ on riittävän lähellä matriisia $\mathbf{A}_0$. Siis $\rho_M(\mathcal{L})$ on avoin. $\square$

Tarkastellaan erikoistapausta, jossa

$$\mathcal{L} = \mathrm{diag}(L, \ldots, L)$$

ja operaattorilla $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$ on spektraaliesitys

$$Lv = \sum_k \lambda_k \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

aina, kun $v \in \mathcal{D}(L)$. Nyt operaattori $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ voidaan siis esittää blokkidiagonaalimuodossa

$$(\mathcal{L} - \mathcal{A})u = \sum_k \left[(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})\vec{u}_k\right] \varphi_k$$

aina, kun $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, missä

$$\vec{u}_k = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, \varphi_k \rangle e_j.$$

**Lause 8.2.** *Kun $\mathfrak{L}$ on edellä määriteltyä tyyppiä ja spektrillä $\sigma(L)$ ei ole kasautumispisteitä, niin*

$$\mathbf{A} \in \rho_M(\mathfrak{L}) \text{ jos ja vain jos } \sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A}) = \emptyset.$$

*Todistus.* Oletaan aluksi, että $\mathbf{A} \in \rho_M(\mathfrak{L})$ ja osoitetaan, että tällöin $\sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A}) = \emptyset$. Blokkidiagonaaliesityksen perusteella $\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A}$ on kääntyvä kaikilla $k$, joten

$$\det(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$$

eli $\lambda_k \notin \sigma(\mathbf{A})$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A}) = \emptyset$ ja osoitetaan, että $\mathbf{A} \in \rho_M(\mathfrak{L})$. Nyt $\det(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$ kaikilla $k$, joten $(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ on olemassa. Siten $\mathfrak{L} - \mathcal{A}$ on injektio. Formaalisti voidaan laskea

$$\begin{aligned} w = (\mathfrak{L} - \mathcal{A})u &\iff \vec{w}_k = (\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})\vec{u}_k \text{ kaikilla } k \\ &\iff \vec{u}_k = (\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\vec{w}_k \text{ kaikilla } k \\ &\iff u = (\mathfrak{L} - \mathcal{A})^{-1} w = \sum_k (\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \vec{w}_k \varphi_k. \end{aligned}$$

Laskun tekee formaaliksi se, että ei tiedetä suppeneeko viimeinen sarja. Tarvitaan seuraavaa aputulosta.

**Aputulos.** *On olemassa sellainen positiivinen vakio $c$, että $\|(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| \leq c$.*

*Todistus.* Käytetään laskussa operaattorinormia. Merkitään $\mathbf{B}_k = (\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Nyt

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}_k(\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda_k \mathbf{B}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{A},$$

joten

$$|\lambda_k| \|\mathbf{B}_k\| \leq \|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}_k\|,$$

missä on käytetty operaattorinormin ominaisuutta $\|\mathbf{A}\mathbf{B}_k\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}_k\|$. Siten $(|\lambda_k| - \|\mathbf{A}\|)\|\mathbf{B}_k\| \leq \|\mathbf{I}\|$. Kun $|\lambda_k| \geq 2\|\mathbf{A}\|$, on

$$\|\mathbf{B}_k\| \leq \frac{\|\mathbf{I}\|}{|\lambda_k| - \|\mathbf{A}\|} \leq \frac{\|\mathbf{I}\|}{\|\mathbf{A}\|} := c_1.$$

Koska spektrillä $\sigma(L)$ ei ole kasautumispisteitä, on välillä $[-2\|\mathbf{A}\|, 2\|\mathbf{A}\|]$ vain äärellinen määrä erisuuria ominaisarvoja. Siten

$$\max_{|\lambda_k| \leq 2\|\mathbf{A}\|} \|\mathbf{B}_k\| := c_2 < \infty.$$

Valitsemalla $c = \max\{c_1, c_2\}$ saadaan haluttu tulos. $\square$

Aputuloksen nojalla

$$\begin{aligned}\|u\|^2 = \|(\mathcal{L}-\mathcal{A})^{-1}w\|^2 &= \sum_k \|\mathbf{B}_k \vec{w}_k\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq c^2 \sum_k \|\vec{w}_k\|^2_{\mathbb{R}^n} = c^2\|w\|^2,\end{aligned}$$

jonka perusteella sarja $\sum_k \mathbf{B}_k \vec{w}_k \varphi_k$ suppenee ja $(\mathcal{L}-\mathcal{A})^{-1}$ on rajoitettu. Siis $\mathbf{A} \in \rho_M(\mathcal{L})$. □

Erityisesti, kun $n$ on parillinen, voi olla että $\sigma(\mathbf{A}) = \emptyset$, jolloin lauseen ehto $\sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A}) = \emptyset$ on triviaalisti voimassa.

**Seuraus.** *Edellisen lauseen oletuksilla $\sigma_M(\mathcal{L}) = P\sigma_M(\mathcal{L})$, toisin sanoen, matriisispektri on puhdas pistespektri.*

*Todistus.* Nyt määritelmän nojalla $\mathbf{A} \in \sigma_M(\mathcal{L})$ täsmälleen silloin, kun $\mathbf{A} \notin \rho_M(\mathcal{L})$ ja edellisen lauseen nojalla tämä on voimassa täsmälleen silloin, kun $\sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. On siis olemassa sellainen $\lambda_k$, että $\lambda_k \in \sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A})$. Tällöin $\lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{A}$ ei ole injektio, josta blokkiesityksen perusteella seuraa, että $\mathcal{L} - \mathcal{A}$ ei ole injektio eli se on tilassa $I_3$, $II_3$ tai $III_3$. Siis $\mathbf{A} \in P\sigma_M(\mathcal{L})$. □

Pistespektrin $P\sigma_M(\mathcal{L})$ alkioita voidaan kutsua ominaismatriiseiksi. Saadaksemme geometrisen mielikuvan matriispektristä, tarkastellaan yksinkertaisinta tapausta $n = 2$.

**Esimerkki 22.** Olkoon $n = 2$ ja $\mathcal{L} = \operatorname{diag}(L, L)$ sekä

$$Lv = \sum_k \lambda_k \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k \text{ aina, kun } v \in \mathcal{D}(L),$$

missä ominaisarvot ovat isoloituja eli spektrillä ei ole kasautumispisteitä. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix},$$

jota vastaa vektori $\vec{a} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Nyt $\mathbf{A} \in \sigma_M(\mathcal{L}) = P\sigma_M(\mathcal{L})$ jos ja vain jos $\sigma(L) \cap \sigma(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. Siis jollakin $l$ $\det(\lambda_l \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, toisin sanoen,

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \lambda_l - a & -b \\ -c & \lambda_l - d \end{pmatrix} &= (\lambda_l - a)(\lambda_l - d) - bc \\ &= \lambda_l^2 - (a+d)\lambda_l + ad - bc \\ &= \lambda_l^2 - (a+d)\lambda_l + \det \mathbf{A} = 0,\end{aligned}$$

missä $a + d = \operatorname{tr} \mathbf{A}$ on matriisin *jälki* (trace). Voidaan määritellä *ominaispinta*

$$\sigma_l = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2\times 2} \mid \det(\lambda_l \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda_l^2 - (a+d)\lambda_l + \det \mathbf{A} = 0 \right\}.$$

Siten $\sigma_l \subset \mathbb{R}^4$ ja $\mathbf{A} \in \sigma_M(\mathcal{L})$ jos ja vain jos se kuuluu johonkin ominaispintaan $\sigma_l$, toisin sanoen,

$$\sigma_M(\mathcal{L}) = \bigcup_l \sigma_l.$$

Kukin $\mathbf{A}$ voi kuuluua korkeintaan kahteen ominaispintaan $\sigma_l$, sillä $2\times 2$-matriisilla $\mathbf{A}$ on korkeintaan 2 erisuurta ominaisarvoa.

Ominaispinnat jakavat avaruuden $\mathbb{R}^4$ avoimiin polkuyhtenäisiin komponentteihin, joiden luonnehtiminen on avoin ongelma, jonka ratkaiseminen antaisi hyödyllistä tietoa ja auttaisi systeemejä koskevien ongelmien ratkaisussa.

Olkoon $\sigma_l$ jokin ominaispinta. Merkitään

$$\sigma_l^+ = \left\{ \mathbf{A} \mid \det(\lambda_l \mathbf{I} - \mathbf{A}) > 0 \right\} \text{ ja}$$
$$\sigma_l^- = \left\{ \mathbf{A} \mid \det(\lambda_l \mathbf{I} - \mathbf{A}) < 0 \right\}.$$

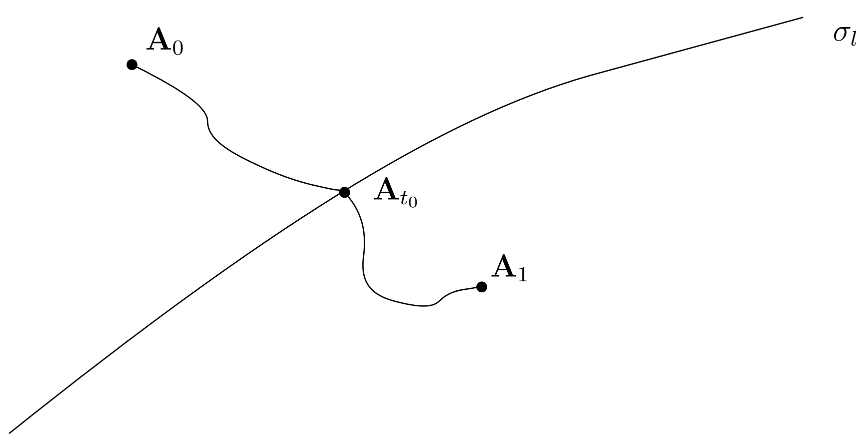
Jos $\mathbf{A}_0 \in \sigma_l^+$ ja $\mathbf{A}_1 \in \sigma_l^-$ ja ne yhdistetään jatkuvalla polulla $\mathbf{A}_t$, missä $0 \le t \le 1$, niin funktio

$$f(t) = \det(\lambda_l \mathbf{I} - \mathbf{A}_t), \ 0 \le t \le 1$$

on jatkuva, $f(0) > 0$ ja $f(1) < 0$, joten on olemassa sellainen $t_0 \in ]0, 1[$, että $f(t_0) = 0$, toisin sanoen,

$$\mathbf{A}_{t_0} \in \sigma_l.$$

Siten $\sigma_l$ jakaa avaruuden $\mathbb{R}^4$ ainakin kahteen erilliseen polkuyhtenäiseen komponenttiin.




Sovellusten kannalta olisi hyödyllistä tietää, ovatko kaksi resolventin matriisia samassa komponentissa. Ainoa tiedossa oleva tulos on seuraava.

**Lause 8.3.** *Olkoot* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \rho_M(\mathcal{L})$ *symmetrisiä (ja siten diagonalisoituvia). Olkoon*

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ ja } \sigma(\mathbf{B}) = \{\beta_1, \beta_2\}.$$

*Jos* $t\alpha_i + (1-t)\beta_i \notin \sigma(L)$ *aina, kun* $t \in [0,1]$, $i = 1, 2$, *niiin* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *ovat resolventin* $\rho_M(\mathcal{L})$ *samassa polkuyhtenäisessä komponentissa.*

1. Olkoon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineaarinen kuvaus, jolle $T(1,0,0) = (1,-1,0)$, $T(0,1,0) = (-1,1,0)$ ja $T(0,0,1) = (0,0,2)$.
   a) Esitä kuvauksen $T$ matriisi luonnollisten kantojen suhteen.

   b) Laske kuvauksen $T$ karakteristinen polynomi ja määrää ominaisarvot.

   c) Määrää ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

2. Asetetaan $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ kaikilla $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_2$.
   a) Osoita, että $\langle \cdot,\cdot\rangle$ on sisätulo.

   b) Osoita, että $\ell_2$ on täydellinen sisätulometriikan suhteen.

3. Olkoon $H$ ääretönulotteinen separoituva Hilbert-avaruus ja $\{e_n\}$ sen eräs ortonormaali kanta. Osoita, että $\{e_n\}$ ei ole avaruuden $H$ Hamelin kanta.

4. Olkoon $H$ sisätuloavaruus ja $S, S_1$ ja $S_2$ sen osajoukkoja. Osoita, että
   a) Jos $S_1 \subset S_2$, niin $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$.

   b) $S \subset S^{\perp\perp}$.

5. Olkoon $H$ separoituva Hilbert-avaruus ja $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Määrittelemme kuvauksen $T : H \to H$ asettamalla

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k+2} e_k,$$

   missä $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$.
   a) Osoita, että $T$ on lineaarinen ja rajoitettu. Laske $\|T\|$.

   b) määrää $\operatorname{Ker} T$ ja $\operatorname{Im} T$.

   c) Määrää $T^*$.

6. Olkoon $X$ reaalikertoiminen LNA, jonka normi toteuttaa suunnikassäännön. Määritellään kuvaus $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\} \text{ aina, kun } x, y \in X.$$

   a) Osoita, että $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ kaikilla $x, y \in X$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ ja $\langle x,x\rangle = 0$

joss $x = 0$.
b) Osoita, että $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ kaikilla $x, y, z \in X$. (tässä tarvitset suunnikassääntöä)
c) Osoita b)-kohdan avulla, että $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ kaikilla $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{Q}$. (ohje: tee vaiheittain 1) $\lambda$ positiivinen kokonaisluku 2) $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$ ja negatiiviset kokonaisluvut 3) $\lambda$ on muotoa $1/n$ 4) $\lambda$ rationaaliluku )
d) Osoita c)-kohdan avulla, että $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ kaikilla $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$. (ohje: normi on jatkuva ja rationaaliluvut ovat tiheässä joukossa $\mathbb{R}$)

7. Osoita, että jokainen separoituva ääretönulotteinen Hilbert-avaruus $H$ on kongruentti avaruuden $\ell_2$ kanssa.

8. Olkoot $E_1$ ja $E_2$ sisätuloavaruuksia (kertojakunta sama) ja $T : E_1 \to E_2$ lineaarinen isometria.
(a) Kun $K = \mathbb{R}$, osoita, että $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ aina, kun $x, y \in E_1$.
(b) Kun $K = \mathbb{C}$, osoita, että $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ aina, kun $x, y \in E_1$.

9. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $M$ sen lineaarinen aliavaruus. Osoita, että $M$ on suljettu jos ja vain jos se on täydellinen.

10. Määritellään vektorijono $S = (v_1, v_2, ...) \subset \ell_2$ asettamalla $v_k = e_1 + e_2 + ... + e_k$, kun $k \in \mathbb{Z}_+$, missä $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^{\infty}$.
(a) Tutki, onko $S$ lineaarisesti vapaa.
(b) Onko $\operatorname{sp} S$ tiheä avaruudessa $\ell_2$?

11. Olkoon $H$ separoituva Hilbert-avaruus ja $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Määrittelemme vektorijonon $S = (v_1, v_2, ...) \subset H$ asettamalla
$$v_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{j^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$
Tutki, onko $S$ lineaarisesti vapaa.

12. Olkoot $(x_n)$ ja $(y_n)$ sisätuloavaruuden $E$ jonoja. Osoita, että
(a) Jos $(x_n)$ ja $(y_n)$ ovat Caychyn jonoja niin $(\langle x_n, y_n\rangle)$ suppenee.
(b) Jos $\|x_n\| \to \|x\|$ ja $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$, niin $x_n \to x$.

13. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $A, T \in B(H)$. Oletetaan, että $AT = TA$ ja $AT$ on kääntyvä.
(a) Osoita, että $T$ on bijektio (ja siten kääntyvä).
(b) Määrää $T^{-1}$.

14. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $M$ sen lineaarinen aliavaruus. Olkoon $T : M \to H$ lineaarinen ja jatkuva.
(a) Osoita, että kuvauksella $T$ on yksikäsitteinen lineaarinen jatkuva laajennus $T_1 : \bar{M} \to H$, jolle $\|T_1\| = \|T\|$.
(b) Osoita, että kuvauksella $T_1$ on laajennus $T_2 \in B(H)$, jolle $\|T_2\| = \|T_1\|$. Onko laajennus yksikäsitteinen?

15. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T \in B(H)$. Osoita, että $TT^* = T^*T$ (ts, $T$ normaali) jos ja vain jos $\|Tx\| = \|T^*x\|$ aina, kun $x \in H$.

16. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T \in B(H)$. Osoita, että suljettu lineaarinen aliavaruus $M \subset H$ on $T$-invariantti ts. $T(M) \subset M$, jos ja vain jos $PTP = TP$, missä $P$ on ortogonaaliprojektio aliavaruudelle $M$.

17. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $S(H) = \{T \in B(H) \mid T \text{ kääntyvä}\}$. Osoita, että $S(H)$ on avoin joukossa $B(H)$.

18. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus, $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(H)$ ja $T \in B(H)$ sellainen, että $T_n \to T$ avaruudessa $B(H)$.
(a) Osoita, että $\langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ aina kun $x, y \in H$.
(b) Osoita, että $T_n^2 \to T^2$ avaruudessa $B(H)$.

19. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $P, Q \in B(H)$ ortogonaalisia projektioita.
(a) Osoita, että $PQ$ on ortogonaalinen projektio jos ja vain jos $PQ = QP$.
(b) Osoita, että $PQ = P$ jos ja vain jos $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$.

20. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $(P_n)$ jono ortogonaalisia projektioita. Oletetaan, että $P_n \to T \in B(H)$ avaruudessa $B(H)$. Osoita, että $T$ on ortogonaalinen projektio.

21. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T \in B(H)$. Oletetetaan, että $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$. Osoita, että $T$ ei ole kääntyvä.

22. Olkoon $H$ separoituva Hilbert-avaruus ja $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Määrittelemme kuvauksen $T : \mathcal{D}(T) \to H$ asettamalla

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k,$$

missä $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ja $|\lambda_k| \to \infty$, kun $k \to \infty$ ja $x \in \mathcal{D}(T)$ täsmälleen silloin, kun sarja suppenee.

a) Osoita, että $T$ on tiheästi määritelty.

b) Osoita, että $T$ on suljettu.

c) Määrää $T^*$.

23. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T \in B(H)$. Oletetaan, että $T^p = 0$ jollakin $p \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että mikään $\lambda \neq 0$ ei ole operaattorin $T$ ominaisarvo.

24. Olkoon $H$ separoituva Hilbert-avaruus ja $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Määrittelemme vektorijonon $S = (v_1, v_2, ...) \subset H$ asettamalla

$$v_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{j^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Osoita, että $\operatorname{sp} S$ on tiheä avaruudessa $H$.

25. Olkoon $H$ kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus ja $T : \mathcal{D}(T) \to H$ lineaarinen, tiheästi määritelty ja suljettu. Oletetaan, että $T$ on symmetrinen ts. $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ aina, kun $u, v \in \mathcal{D}(T)$.

a) Osoita, että $T + iI$ on injektio.

b) Osoita, että $(T + iI)^{-1} : \operatorname{Im}(T + iI) \to H$ on rajoitettu.

26. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus, $T : \mathcal{D}(T) \to H$ lineaarinen ja suljettu sekä $S \in B(H)$. Osoita, että $T + S$ on suljettu.

27. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus, $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$, $S : D(S) \subset H \to H$ lineaarinen, tiheästi määriteltyjä ja suljettuja. Oletetaan, että $D(T) \cap D(S)$

on tiheä avaruudessa $H$. Osoita, että $(T+S)^*$ on kuvauksen $T^*+S^*$ laajennus.

28. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus, $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen, tiheästi määritelty ja suljettu ja $S \in B(H)$. Osoita, että $(aT+bS)^* = \bar{a}T^* + \bar{b}S^*$, kun $a$ ja $b$ ovat skalaareja.

29. Aalto-operaattorin spektri ($\alpha = 1$) koostuu ominaisarvoista $\lambda_{j,k} = j^2 - k^2, j \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}$.
(a) Laske kertaluku $m(48)$.
(b) Osoita, että kertaluku $m(\lambda_{j,k}) = 1$ joss $\lambda_{j,k} = 1$ tai $\lambda_{j,k} = 4$.

30. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T : H \to H$ lineaarinen. Oletetaan, että operaattori $T$ on symmetrinen ts. $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ aina, kun $u, v \in H$.
a) Osoita, että $T$ on suljettu.
b) Osoita, että $T$ on rajoitettu.

31. Olkoon $H$ kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus ja $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen, tiheästi määritelty ja suljettu. Oletetaan, että $T$ on symmetrinen ts. $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ aina, kun $u, v \in \mathcal{D}(T)$.
a) Osoita, että kuvauksen $T$ ominaisarvot ovat reaalisia.
b) Oletetaan lisäksi, että $T$ on itseadjungoitu. Osoita, että $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

32. Olkoon $H$ kompleksikertoiminen Hilbert-avaruus ja $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen, tiheästi määritelty ja suljettu. Olkoon $\lambda \in \rho(T)$. Osoita, että $\bar{\lambda}I - T^*$ on injektio ja $\mathrm{Im}(\bar{\lambda}I - T^*)$ on tiheä avaruudessa $H$. (Itseasiassa $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$)

33. Olkoon $H$ separoituva reaalinen Hilbert-avaruus ja $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Olkoon $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ reaalinen $n \times n$-matriisi. Määrittelemme kuvauksen $\mathcal{A} : H^n \to H^n$ asettamalla $w = \mathcal{A}u$ jos ja vain jos

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} u_k, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

kun $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in H^n$ ja $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in H^n$.
(a) Osoita, että $\mathcal{A} \in B(H^n)$.

(b) Oletetaan, että $A = A^T$. Osoita, että $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

(c) Osoita, että $\mathcal{A}$ on kääntyvä, jos $A$ on kääntyvä.

(d) Oletetaan, että $A$ on aidosti positiividefiniitti ts. $A\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ aina kun $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Osoita, että $\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq r\|u\|^2$ kaikilla $u \in H^n (r > 0$ vakio).

34. Olkoon $H$ Hilbert-avaruus ja $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ lineaarinen, tiheästi määritelty ja suljettu. Oletetaan, että $T = T^*$ ja $\operatorname{Im} T$ on suljettu.
a) Osoita, että $\operatorname{Im} T \cap \mathcal{D}(T)$ on tiheä avaruudessa $\operatorname{Im} T$.

b) Olkoon $T_0 : \operatorname{Im} T \cap D(T) \to \operatorname{Im} T$ operaattorin $T$ rajoittuma. Osoita, että $T_0^* = T_0$.

# Kirjallisuutta

[1] G. Bachman - L. Narici: *Functional analysis.* Dover Publications, Mineola, 2000.

[2] J. Berkovits: A note on the imbedding theorem of Browder and Ton. *Proc. Am. Math. Soc.*, 131(9) (2003),2963–2966.

[3] J. Berkovits - P. Drabek - H. Leinfelder - V. Mustonen - G. Tajcova: Time-periodic oscillations in suspension bridges: existence of unique solutions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 1 (2000),345–362.

[4] J. Franklin: *Matrix theory.* Prentice-Hall, New Jersey, 1968.

[5] I. Gohberg - S. Goldberg: *Basic operator theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[6] I. Gohberg - S. Goldberg - M. Kaashoek: *Classes of linear operators Vol I.* Birkhäuser, Basel, 1990.

[7] J. Goldberg: *Matrix theory with applications.* McGraw-Hill, New York, 1991.

[8] E. Kreyszig: *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley and Sons, New York, 1989.

[9] V. Mustonen: *Analyysi III, luentomoniste.* 1999.

[10] A. E. Taylor - D. C. Lay: *Introduction to functional analysis 2.ed.* John Wiley and sons, New York, 1980.

[11] P. Turakainen: *Matriisiteoria, luentomoniste.*