Kompleksianalyysi I

801385A

2011

Esipuhe

Tämän luentomonisteen ensimmäisen version kirjoitti Tero Knuutinen Jorma Arhippaisen kevään 2007 luentojen pohjalta. Uudistetun painoksen on toimittanut Markus Harju vuoden 2011 kesäkurssia varten.

Sisältö

Luku 1

Kompleksilukujen kunta

Lukujoukkoja merkitään seuraavasti:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	(luonnolliset luvut)
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$	(kokonaisluvut)
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$	(rationaaliluvut)
$\mathbb{R} = \{x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k} : l \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$	(reaaliluvut)

Määritelmä 1.1 (Kunta)**.** Olkoon $K \neq \emptyset$ joukko, jossa on määritelty laskutoimitukset $+$ (yhteenlasku) ja $\cdot$ (kertolasku[1]) seuraavina kuvauksina:

$$+ : K \times K \to K, \qquad K \times K \ni (a, b) \mapsto a + b \in K$$

$$\cdot : K \times K \to K, \qquad K \times K \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in K$$

Sanotaan, että $(K, +, \cdot)$ on *kunta*, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

$K1^\circ$ $(a + b) + c = a + (b + c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.

$K2^\circ$ Joukossa K on nolla-alkio 0, jolle pätee $a + 0 = 0 + a = a$ kaikilla $a \in K$.

$K3^\circ$ Jos $a \in K$, niin on olemassa vasta-alkio $-a \in K$, jolle pätee $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

$K4^\circ$ $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in K$.

$K5^\circ$ $(ab)c = a(bc)$ kaikilla $a, b, c \in K$.

$K6^\circ$ Joukossa K on ykkösalkio 1, jolle pätee $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ kaikilla $a \in K$.

$K7^\circ$ Jos $a \in K$ ja $a \neq 0$, niin on olemassa $a^{-1} \in K$, jolle $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Tässä 1 on ykkösalkio. Alkiota a^{-1} sanotaan alkion a käänteisalkioksi.

[1] Usein käytetään lyhennysmerkintää $a \cdot b = ab$

$K8^\circ$ $a \cdot b = b \cdot a$ kaikilla $a, b \in K$.

$K9^\circ$ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ kaikilla $a, b, c \in K$.

1.1 Kompleksilukujen kunta

Tarkastellaan joukkoa

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

missä (x, y) on järjestetty reaalilukujen pari, jolle pätee $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ jos ja vain jos $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Voidaan tulkita $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, kun alkio $x \in \mathbb{R}$ samaistetaan alkion $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ kanssa. Näin ajatellen $\mathbb{R}^2$ on $\mathbb{R}$:n laajennus joukkona.

Määritellään laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ joukossa $\mathbb{R}^2$ seuraavasti: jos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Huomautus. Laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat reaalilukujen tavanomaisten yhteen– ja kertolaskun laajennuksia joukkoon $\mathbb{R}^2$.

Merkitään $i = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Jos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + i(y, 0) = x + iy.$$

Täten voidaan samaistaen kirjoittaa

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}.$$

Huomautus. Joukon $\mathbb{R}^2$ kertolaskun määritelmän nojalla

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0) = (-1, 0)$$

eli $i^2 = -1$. Alkiota i kutsutaan *imaginääriyksiköksi*.

Määritelmä 1.2 (Joukko $\mathbb{C}$)**.** Jos $x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$ ja i on imaginääriyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$, niin merkitään $z = x + iy$. Jos $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2$, niin laskutoimitukset (1) ja (2) tulevat muotoon:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2) $z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Luvun $z \in \mathbb{C}$ *reaaliosaa* merkitään $x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ ja *imaginääriosaa* $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Kompleksiluvut z_1 ja z_2 ovat samat, merkitään $z_1 = z_2$, jos $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ ja $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

Lause 1.3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *on kunta.*

Todistus. Käydään läpi kunta-aksioomat.

$K1^\circ$ Selvä.

$K2^\circ$ Nolla-alkio on $0 = 0 + i0$.

$K3^\circ$ Jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, niin $(-z) = (-x) + i(-y) \in \mathbb{C}$.

$K4^\circ$ Selvä.

$K5^\circ$ Jos $z_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, 3$, niin

$$\begin{aligned}
(z_1z_2)z_3 &= [x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)](x_3 + iy_3) \\
&= [(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3] \\
&\quad + i[(x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3] \\
&= [x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1y_2x_3 - y_1x_2y_3] \\
&\quad + i[x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3] \\
&= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3)] \\
&\quad + i[x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)] \\
&= (x_1 + iy_1)[(x_2x_3 - y_2y_3) + i(x_2y_3 + x_3y_2)] = z_1(z_2z_3).
\end{aligned}$$

$K6^\circ$ Ykkösalkio on $1 = (1, 0) = 1 + i0$.

$K7^\circ$ Jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ja $z \neq 0 = 0 + i0$, niin $x \neq 0$ tai $y \neq 0$. Asettamalla

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \in \mathbb{C}$$

nähdään, että

$$z^{-1}z = \left[\frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\right](x + iy) = \cdots = 1 = zz^{-1}.$$

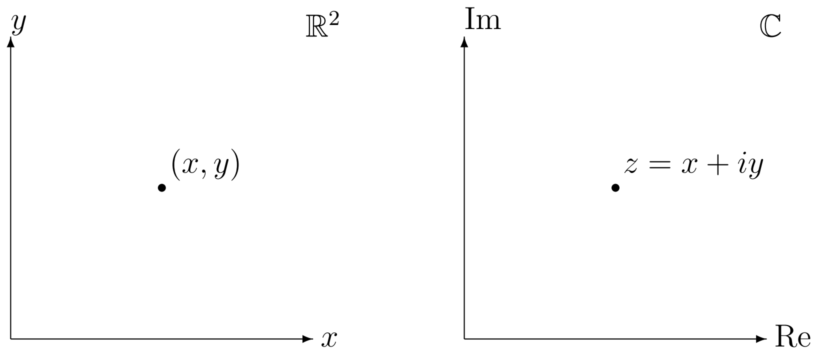
$K8^\circ$ $z_1z_2 = z_2z_1$.

$K9^\circ$ $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Täten joukko $\mathbb{C}$ varustettuna laskutoimituksilla $+$ ja $\cdot$ on kunta. $\square$

1.2 Kompleksitaso ja itseisarvo

Tunnetusti $\mathbb{R}^2$ voidaan kuvata xy-koordinaatiston avulla tasona. Samaistuksella $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ myös $\mathbb{C}$ voidaan esittää koordinaatiston avulla.



Määritelmä 1.4. Luvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$, joka vastaa pisteen (x, y) etäisyyttä origosta.

Itseisarvo $\mathbb{R}$:ssä antaa metriikan $\mathbb{R}$:ään, eli lukujen x ja y etäisyyden $d(x, y) = |x - y|$. Vastaavasti itseisarvo $\mathbb{C}$:ssä määrää metriikan $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Merkitään

- $d_{\mathbb{C}}$ = metriikka $\mathbb{C}$:ssä
- $d_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} = d_{\mathbb{R}}$ = metriikka $\mathbb{R}$:ssä.

Kunta $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ on näin myös kunnan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ metrinen (topologinen) kuntalaajennus.

Itseisarvolle pätee seuraavat ominaisuudet:

1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0.$
3) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ ja $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (kolmioepäyhtälö).

Määritelmä 1.5. Luvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *liittoluku* on $\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$.

Liittoluvulle pätee mm. seuraavat ominaisuudet:

1) $\overline{i} = -i$.
2) $z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 = |z|^2$.
3) Jos $z = \overline{z}$, niin $z \in \mathbb{R}$.

4) $|z| = |\overline{z}|$ kaikille $z \in \mathbb{C}$.

Jos $z = x + iy \neq 0$, niin edellä tavattu käänteisalkio voidaan laskea *laventamalla liittoluvulla* eli

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}.$$

Lisää ominaisuuksia:

1) $\overline{\overline{z}} = z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

5) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0$.

6) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ja $z - \overline{z} = i2\,\mathrm{Im}(z)$.

Määritelmä 1.6. Jos $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$, niin z_0-keskinen, ε-säteinen kompleksitason *ympyrä* on

$$S_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}.$$

Huomautus. 1) Jos $z_1, z_2 \in S_1(0)$, niin $z_1 z_2 \in S_1(0)$.

2) Jos $z_1 \in S_1(0)$, niin $\frac{1}{z_1} \in S_1(0)$.

Esimerkki 1.7. Olkoon $z_1 = 3 + 4i$ ja $z_2 = 2 + 3i$. Tällöin

a) $z_1 + z_2 = 3 + 2 + (4 + 3)i = 5 + 7i$

b) $z_1 z_2 = (3 + 4i)(2 + 3i) = 6 - 12 + (9 + 8)i = -6 + 17i$

c) $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{2 - 3i}{4 + 9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

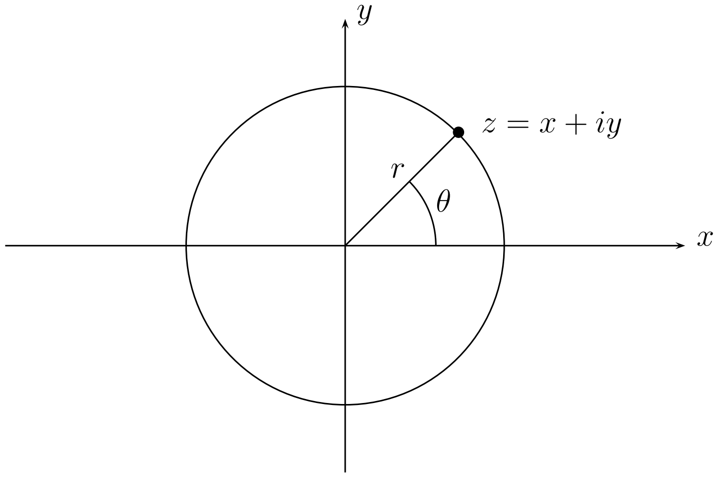
d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(3 + 4i)(2 - 3i)}{13} = \frac{(6 + 12) + (-9 + 8)i}{13} = \frac{18}{13} - \frac{i}{13}$.

1.3 Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys

Olkoon $z \in \mathbb{C}, z \neq 0, z = x + iy$. Merkitään $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z:n moduuli) ja olkoon θ positiivisen reaaliakselin ja z:n väliin jäävä kulma. Kulma θ voidaan rajoittaa välille $0 \leq \theta < 2\pi$. Tällöin

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

on luvun z (yksikäsitteinen) *napakoordinaattiesitys*. Kulmaa θ sanotaan luvun z *argumentiksi* ja sitä merkitään $\theta = \arg z$.



Kulman θ määrääminen voidaan jakaa seuraaviin tapauksiin:

- Tapaus $y = 0$ ja $x \neq 0$:
  - Jos $x > 0$, niin $\theta = 0$.
  - Jos $x < 0$, niin $\theta = \pi$.
- Tapaus $x = 0$ ja $y \neq 0$:
  - Jos $y > 0$, niin $\theta = \frac{\pi}{2}$.
  - Jos $y < 0$, niin $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
- Jos taas $x, y \neq 0$, niin

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

  Tällöin

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

eli

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

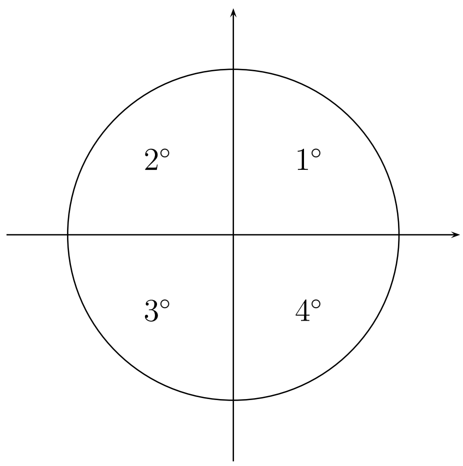
jossa kertoimen n valinta riippuu lukujen x ja y merkistä eli siitä, mihin tason *neljännekseen* z kuuluu:

1° Jos $x, y > 0$, niin $n = 0$

2° Jos $x < 0, y > 0$, niin $n = 1$

3° Jos $x, y < 0$, niin $n = 1$

4° Jos $x > 0, y < 0$, niin $n = 2$



Esimerkki 1.8. 1) Jos $z = 2$, niin $r = |2| = 2$ ja $\theta = 0$.

2) Jos $z = -2i$, niin $r = |-2i| = 2$ ja $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

3) Jos $z = 1 + i$, niin $r = \sqrt{2}$ ja $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Tulo napakoordinaattiesityksessä Olkoon $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Tällöin

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että jos $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, niin ns. *De Moivren kaava*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

pätee.

Esimerkki 1.9. Edellisen kaavan avulla voidaan mm. ratkaista yhtälö

$$z^3 = 1.$$

Kirjoitetaan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ja pyritään määräämään r ja θ. De Moivren kaavan nojalla

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0,$$

missä myös luku 1 on kirjoitettu napakoordinaateissa. Ottamalla itseisarvot puolittain saadaan $r^3 = 1$, joten $r = 1$. Vertaamalla reaali- ja imaginääriosia keskenään saadaan jaksollisuus huomioiden

$$3\theta = 0 + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

eli $\theta = \theta_k = k2\pi/3$. Täten yhtälön ratkaisut ovat ($r = 1$)

$$z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$$

eli

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ja

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Muilla arvoilla k saadaan jaksollisesti samoja ratkaisuja.

1.4 Kompleksitason analyyttistä geometriaa

Tunnetusti tason $\mathbb{R}^2$ *suora* voidaan aina esittää muodossa

$$L = \{\overline{r} \in \mathbb{R}^2 : \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{v}, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $\overline{r}_0$ on L:n kiinteä piste ja $\overline{v} \in \mathbb{R}^2, \overline{v} \neq 0$ on *virittäjävektori*. Vastaavasti pisteiden P_1 ja P_2 välinen jana on

$$[P_1, P_2] = \{\overline{r} \in \mathbb{R}^2 : \overline{r} = \overline{OP}_1 + t(\overline{OP}_2 - \overline{OP}_1), t \in [0,1]\},$$

missä $O = (0,0)$ on origo. Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ suora voidaan ilmaista myös muodossa

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = d\},$$

missä $(a,b) \neq (0,0)$. Vastaavasti kompleksitasossa $\mathbb{C}$ suora on

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + tw, t \in \mathbb{R}\},$$

missä $z_0 \in L$ on kiinteä piste ja $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ on virittäjävektori.

Jos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$, niin niiden välinen (suunnattu) jana on

$$[z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]\}.$$

Suoran L *normaalimuoto* on

$$L = \{x + iy : ax + by = d\},$$

missä $a, b, d \in \mathbb{R}$ ja $a^2 + b^2 > 0$.

Jos $z = x + iy$ eli

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

niin

$$\begin{aligned} L &= \{z \in \mathbb{C} : a\frac{z + \overline{z}}{2} + b\frac{z - \overline{z}}{2i} = d\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : az + a\overline{z} - biz + bi\overline{z} = 2d\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : (a - ib)z + (a + ib)\overline{z} = 2d\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \gamma\}, \end{aligned}$$

missä $\gamma = 2d \in \mathbb{R}$ ja $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

1.5 Kompleksitason topologiaa

Määritelmä 1.10. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ annettu ja $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

1) z_0-keskinen, r-säteinen *avoin kiekko* on joukko

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

(vrt. ympyrä).

2) Vastaavasti *suljettu kiekko* on

$$\overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

3) *Punkteerattu kiekko* on

$$D_r'(z_0) = D_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Määritelmä 1.11. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Sanotaan, että A on *avoin* jos joko

1) $A = \emptyset$ tai

2) jokaista $z \in A$ kohti on olemassa sellainen $r > 0$, että $D_r(z) \subset A$.

Määritelmä 1.12. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Sanotaan, että A on *suljettu*, jos sen komplementti $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ on avoin.

Huomautus. 1) $\mathbb{C}$ ja $\emptyset$ ovat sekä avoimia ja suljettuja joukkoja.

2) Avoin kiekko on avoin joukko.

Todistus. 1) $\mathbb{C}$ on selvästi avoin, ja lisäksi sen komplementti $\emptyset$ on määritelmän mukaan avoin, joten $\mathbb{C}$ on myös suljettu. Samoin $\emptyset$ on suljettu, koska sen komplementti $\mathbb{C}$ on avoin.

2) Olkoon $D_r(z_0)$ avoin kiekko ja $z \in D_r(z_0)$ sen mielivaltainen piste.

Valitaan $\delta = r - |z - z_0| > 0$, ja otetaan toinen avoin kiekko $D_\delta(z)$. Jos $w \in D_\delta(z)$, niin $|w - z| < \delta$. Siten

$$|w - z_0| \leq |w - z| + |z - z_0| < \delta + |z - z_0| = r - |z - z_0| + |z - z_0| = r.$$

Siis $w \in D_r(z_0)$. Täten $D_\delta(z) \subset D_r(z_0)$ ja $D_r(z_0)$ on avoin.

□

Huomautus. Olkoon I jokin indeksijoukko.

1) Jos $A_i \subset \mathbb{C}, i \in I$ ovat avoimia, niin

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ on avoin.}$$

2) Jos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \subset \mathbb{C}$ ovat avoimia, niin

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ on avoin.}$$

3) Jos $A_i \subset \mathbb{C}, i \in I$ ovat suljettuja, niin

$$\bigcap_{i \in I} A_i \text{ on suljettu.}$$

4) Jos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ovat suljettuja, niin

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ on suljettu.}$$

Määritelmä 1.13. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Jos $z \in A$, niin z on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $D_r(z) \subset A$. Kaikkia joukon A sisäpisteitä merkitään A° tai $\mathrm{Int}(A)$.

Voidaan osoittaa, että

$$A^\circ = \cup\{V : V \text{on avoin ja} \, V \subset A\}.$$

Huomautus. $A^\circ \subset A$ aina. Lisäksi A on avoin, jos $A = A^\circ$.

Määritelmä 1.14. Piste $z \in \mathbb{C}$ on joukon A *ulkopiste*, jos se on komplementin A^c sisäpiste. Kaikkia joukon A ulkopisteitä merkitään $\mathrm{Ext}(A)$.

Määritelmä 1.15. Piste $z \in \mathbb{C}$ on joukon A *reunapiste*, jos se ei ole joukon A sisäpiste eikä ulkopiste. Kaikkia joukon A reunapisteitä merkitään $\partial(A)$.

Määritelmä 1.16. Joukon $A \subset \mathbb{C}$ *sulkeuma* on

$$\bar{A} = \mathrm{cl}(A) = A \cup \partial(A) = A^\circ \cup \partial(A).$$

Joukko $\bar{A}$ on aina suljettu.

Huomautus. Voidaan osoittaa, että

$$\mathrm{cl}(A) = \cap\{E : E \, \text{suljettu}, A \subset E\}.$$

Täten $A \subset \mathrm{cl}(A)$ ja $A = \mathrm{cl}(A)$ jos ja vain jos A suljettu.

Määritelmä 1.17 (Tiheä osajoukko)**.** Jos $A \subset \mathbb{C}$ on suljettu ja $B \subset A$, niin B on *tiheä* joukossa A, jos $\mathrm{cl}(B) = A$.

Huomautus. Jos $A = \overline{D}_r(z_0)$, niin

- $A^\circ = D_r(z_0)$
- $\mathrm{cl}(A) = A$
- $\partial(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} = S_r(z_0)$
- $\mathrm{Ext}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$.

Määritelmä 1.18 (Kasaantumispiste)**.** Piste $z \in \mathbb{C}$ on joukon A *kasaantumispiste*, jos pisteen z jokainen r-ympäristö (avoin kiekko) sisältää z:sta eroavia A:n pisteitä eli

$$D'_r(z) \cap A \neq \emptyset$$

kaikilla $r > 0$. Merkitään $A' = A$:n kasaantumispisteiden joukko.

Voidaan osoittaa että $\mathrm{cl}(A) = A \cup A'$.

Esimerkki 1.19. Jos $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, niin $A' = \{0\}$.

Määritelmä 1.20. Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *rajoitettu*, jos on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|z| \leq M$$

kaikille $z \in A$.

Määritelmä 1.21. Jos joukko on suljettu ja rajoitettu, niin sen sanotaan olevan *kompakti*.

Määritelmä 1.22 (Polkuyhtenäisyys)**.** Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *polkuyhtenäinen*, jos sen jokainen pistepari voidaan yhdistää joukkoon A sisältyvällä murtoviivalla.

Määritelmä 1.23 (Konveksi joukko)**.** Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *konveksi*, jos sen jokainen pistepari voidaan yhdistää janalla, joka sisältyy joukkoon A.

1.6 Jonoista

Funktiota $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sanotaan kompleksilukujen *jonoksi*. Yleensä merkitään

$$f(n) = a_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tai

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}.$$

Jono voidaan usein määritellä rekursiivisesti, esim.

$$z_{n+1} = z_n^2 + a,$$

missä $a =$ vakio ja z_0 on annettu.

Määritelmä 1.24 (Suppeneminen)**.** Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompleksilukujono. Jono (a_n) *suppenee* kohti pistettä a, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, jolle

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

eli $a_n \in D_\varepsilon(a)$ aina, kun $n \geq N$.

Jonoille $\mathbb{C}$:ssä pätevät samanlaiset tulokset kuin reaalijonoille. Olkoot

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

missä $(a_n), (b_n) \in \mathbb{C}$ ja $a, b \in \mathbb{C}$. Tällöin

1) raja-arvo a on yksikäsitteinen

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, kun $b \neq 0$

5) Jos $a_n = x_n + iy_n$ missä $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a = x + iy$, niin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Näin on, koska

$$|y_n - y|, |x_n - x| \leq |a_n - a| \to 0.$$

6) Jos $a_n = |a_n|(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ja $a = |a|(\cos\theta + i\sin\theta)$, niin

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta \pmod{2\pi}.$$

Määritelmä 1.25 (Cauchyn jono)**.** Jono $(a_n) \subset \mathbb{C}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassas sellainen $N = N(\varepsilon) > 0$, että

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

aina, kun $m, n > N$.

Esimerkki 1.26. Osoitetaan, että jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono. Olkoon

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \leq |a_m - a| + |a_n - a|.$$

Koska jono a_n suppenee, niin on olemassa sellaiset N_1, N_2, että

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kun $m > N_1$ ja $n > N_2$. Valitaan $N = \max\{N_1, N_2\}$, jolloin

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad m, n > N$$

eli a_n on Cauchyn jono.

Tunnetusti jokainen (reaalinen) Cauchyn jono $(a_n) \subset \mathbb{R}$ suppenee, toisin sanoen on olemassa $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Jokainen Cauchyn jono suppenee myös $\mathbb{C}$:ssä.

Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ epätyhjä. Tällöin $a \in \mathrm{cl}(A)$ jos ja vain jos on olemassa jono $(a_n) \subset A$ jolle

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

1.7 Sarjat

Olkoon $(a_n) \subset \mathbb{C}$ jono. Merkitään

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Tällöin saadaan osasummien jono $(S_n) \subset \mathbb{C}$. Jos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

on olemassa, niin sanotaan, että *sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee. Lisäksi tällöin $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ei ole olemassa, niin sanotaan, että sarja *hajaantuu*.

Kompleksilukujen sarjoille pätevät samat ominaisuudet kuin $\mathbb{R}$:ssä:

1) Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Osoitetaan tämä. Olkoon

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Koska $a_n = S_n - S_{n-1}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

2) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja $a_k = x_k + iy_k, (x_k), (y_k) \subset \mathbb{R}$, niin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenevat.

3) Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee (*itseinen suppeneminen*), niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

suppenee.

Esimerkki 1.27 (Geometrinen sarja)**.** Jos $|z| < 1$, niin $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ suppenee. Koska $|z^k| = |z|^k < 1$, niin $\sum_{k=0}^{\infty} |z^k|$ suppenee. Nyt

$$S_n = 1 + z + \cdots + z^n,$$

joten

$$zS_n = z + \cdots + z^n + z^{n+1}.$$

Puolittain vähentämällä saadaan

$$(1 - z)S_n = 1 - z^{n+1}$$

eli

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Jos $|z| < 1$, niin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Esimerkki 1.28. Tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Tiedetään, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Siten sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

suppenee (itseinen suppeneminen) kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Määritellään nyt

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Sijoittamalla $z = iy, y \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y, \end{aligned}$$

sillä

$$i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = (-1)^k i \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Siten

$$|e^{iy}|^2 = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

eli

$$|e^{iy}| = 1$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Näin ollen luvun $z \neq 0$ napakoordinaattiesitys voidaan kirjoittaa muodossa

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta) = |z| e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Huomautus. Jos $z \in \mathbb{C}$, niin

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Näistä keskimmäisen yhtäsuuruuden todistus sivuutetaan. Muut ovat edeltä tuttuja.

Luku 2

Kompleksimuuttujan funktioista

2.1 Kompleksiarvoiset funktiot

Määritelmä 2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{C}, A \neq \emptyset$. Vastaavuutta, joka liittää jokaiseen lukuun $z \in A$ yksikäsitteisen luvun $w \in \mathbb{C}$ sanotaan *funktioksi* $A \to \mathbb{C}$. Tällöin merkitään $w := f(z)$ ja A on funktion f *määritysjoukko*, merkitään $A = \mathcal{M}(f)$. *Arvojoukkoa* merkitään $\mathcal{A}(f) = \{f(z) : z \in A\} = f(A)$.

Määritelmä 2.2 (Toinen tapa määritellä funktio)**.** Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on joukon $A \times \mathbb{C}$ osajoukko f, jolle pätee:

1) $(z, w) \in f$ pätee kaikilla $z \in A$ ja jollain $w \in \mathbb{C}$

2) Jos $(z, w_1), (z, w_2) \in f$, niin $w_1 = w_2$, eli kohdan 1 alkio w on yksikäsitteinen.

Jos $(z, w) \in f$, niin merkitään $w = f(z)$.

Useimmiten funktio f määritellään tietyn säännön $f(z)$ avulla. Ellei toisin mainita, niin

$$\mathcal{M}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Lauseke } f(z) \text{ on määritelty}\}.$$

Määritelmä 2.3. Jos $f : A \to \mathbb{C}$ on funktio ja $E \subset A$, niin funktion f *rajoittuma* joukkoon E on funktio $f|_E$, jolle pätee

$$(f|_E)(z) = f(z)$$

kaikilla $z \in E$. Siten $\mathcal{M}(f|_E) = E$.

Funktion *kuvaaja* (graafi) on joukko

$$\{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in \mathcal{M}(f) \subset \mathbb{C}\}.$$

Usein tutkitaan jonkin osajoukon $B \subset \mathcal{M}(f)$ kuvajoukkoa.

Kompleksimuuttujan kompleksiarvoisen funktion lauseke $f(z)$ voidaan (ainakin periaatteessa) esittää seuraavassa muodossa:

Jos $z = x + iy \in \mathcal{M}(f)$, niin on olemassa sellaiset muuttujien $x, y \in \mathbb{R}$ reaaliarvoiset funktiot u ja v, että

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Esimerkki 2.4. 1) Jos $f(z) = z$, niin $u(x, y) = x$ ja $v(x, y) = y$.

2) Jos $f(z) = z^2$, niin $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja $v(x, y) = 2xy$.

3) Jos

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

niin

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}(u) = \mathcal{M}(v) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

4) Jos

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

niin $u(x, y) = e^x \cos y$ ja $v(x, y) = e^x \sin y$.

Määritelmä 2.5. Olkoot f ja $g : A \to \mathbb{C}$ funktioita. Asetetaan

1) $(f + g)(z) = f(z) + g(z), z \in A$, (summafunktio)

2) $(fg)(z) = f(z)g(z), z \in A$, (tulofunktio)

3) $(f/g)(z) = f(z)/g(z), z \in A, g(z) \neq 0$ (osamääräfunktio) ja

4) $(f \circ g)(z) = f(g(z)), z \in A$ (yhdistetty funktio).

Määritelmä 2.6. Olkoot $A, B \subset \mathbb{C}, A, B \neq \emptyset$ ja $f : A \to B$. Tällöin funktio f on

1) *surjektio* $A \to B$, jos jokainen $w \in B$ on muotoa $w = f(z)$ jollain $z \in A$ eli

$$f(A) = \{f(z) : z \in A\} = B.$$

2) *injektio*, jos ehdosta $f(z_1) = f(z_2), z_1, z_2 \in A$ seuraa $z_1 = z_2$.

3) *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio.

Määritelmä 2.7 (Käänteisfunktio)**.** Jos $f : A \to B$ bijektio ja $w = f(z)$ jollain $z \in A$, niin luku z on yksikäsitteinen (injektiivisyys) ja jokainen $w \in B$ on muotoa $w = f(z), z \in A$ (surjektiivisuus). Nyt voidaan määritellä funktio $f^{-1} : B \to A$ asettamalla

$$f^{-1}(w) = z$$

kun $w = f(z), z \in A$.

Käänteisfunktion määritelmästä seuraa, että

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad \text{kaikilla}\, z \in A$$

ja

$$f(f^{-1}(z)) = z \quad \text{kaikilla}\, z \in B.$$

Huomautus. Myös f^{-1} on bijektio ja $(f^{-1})^{-1} = f$ ja $\mathcal{M}(f^{-1}) = \mathcal{A}(f)$.

Määritelmä 2.8 (Sektori)**.** Olkoon $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$, missä $0 < |\varphi_1 - \varphi_2| < 2\pi$. Joukkoa

$$S[\varphi_1, \varphi_2] = \{z \in \mathbb{C} : z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r \geq 0\}$$

sanotaan *suljetuksi sektoriksi*. Vastaavasti joukkoa

$$S]\varphi_1, \varphi_2[= \{z \in \mathbb{C} : z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2, r \geq 0\}$$

sanotaan *avoimeksi sektoriksi*. Huomaa, että $S[0, 2\pi[= \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.9. Funktion $f(z) = 2z + i, z \in \mathbb{C}$ käänteisfunktio on

$$f^{-1}(z) = \frac{z - i}{2}.$$

Esimerkki 2.10. Olkoon $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$. Tällöin f on surjektio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Todistus. Jos $w = 0$, niin valitaan $z = 0$, jolloin $f(z) = f(0) = 0^2 = w$. Jos $w \neq 0$, niin $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi[$, joten valitsemalla

$$z = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

nähdään, että

$$f(z) = z^2 = \sqrt{r}^2\left(\cos\frac{2\varphi}{2} + i\sin\frac{2\varphi}{2}\right) = w.$$

□

Funktio f ei kuitenkaan ole injektio, sillä jos $z \neq 0$ niin $f(-z) = (-z)^2 = z^2 = f(z)$, mutta $z \neq -z$.

Huomautus. Jos funktio f ei ole bijektio, voidaan tutkia sen rajoittumaa joukkoon $E \subset \mathcal{M}(f)$. Edellisessä esimerkissä funktio f olisi bijektio, jos $E = S[0, \pi[$.

2.2 Funktion raja-arvo

Määritelmä 2.11. Olkoon f kompleksiarvoinen funktio ja $z_0 \in \mathbb{C}$ sellainen, että $D'_r(z_0) \subset \mathcal{M}(f)$ jollain $r > 0$. Sanotaan, että luku $a \in \mathbb{C}$ on funktion f *raja-arvo* pisteessä z_0, merkitään

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a,$$

jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$, jolle

$$|f(z) - a| < \varepsilon$$

aina, kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Toisin sanoen $f(z) \subset D_\varepsilon(a)$ aina, kun $z \in D'_\delta(z_0)$.

Esimerkki 2.12. Tarkastellaan vakiofunktiota $f(z) = a, a \in \mathbb{C}$. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$. Nyt

$$|f(z) - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

aina, kun $0 < |z - z_0| < \delta$ ja $\delta > 0$ on mikä tahansa. Siis $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$ aina, kun $z_0 \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.13. Tarkastellaan funktiota $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$. Osoitetaan, että

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0^2.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lasketaan ensin

$$|f(z) - z_0^2| = |z^2 - z_0^2| = |(z + z_0)(z - z_0)| = |z + z_0||z - z_0|.$$

Riittää olettaa, että $0 < |z - z_0| < 1$. Tällöin

$$|z + z_0| = |(z - z_0) + 2z_0| \leq |z - z_0| + 2|z_0| < 1 + 2|z_0|,$$

joten

$$|f(z) - f(z_0)| < (1 + 2|z_0|)|z - z_0|.$$

Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\} \leq 1$. Jos $0 < |z - z_0| < \delta$, niin

$$|f(z) - z_0^2| < (1 + 2|z_0|)|z - z_0| < (1 + 2|z_0|)\frac{\varepsilon}{1 + 2|z_0|} = \varepsilon.$$

□

Esimerkki 2.14. Tarkastellaan funktion

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - i}, \quad z \neq i$$

raja-arvoa, kun $z \to i$. Jos $z \neq i$, niin

$$\frac{z^2 + 1}{z - i} = \frac{(z + i)(z - i)}{z - i} = z + i \to i + i = 2i$$

kun $z \to i$.

Kuten reaalifunktioille, myös kompleksifunktioille pätee seuraavat ominaisuudet.

Lause 2.15. *Jos* $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ *ja* $\lim_{z\to z_0} g(z) = b$, *niin*

1) a *on yksikäsitteinen.*

2) $\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = a \pm b$.

3) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = ab$.

4) $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{a}{b}$ *jos* $b \neq 0$.

5) Jos $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ *ja* $a = \alpha + i\beta$, *niin*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a$$

jos ja vain jos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \quad \textit{ja} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta.$$

6) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |a|$.

7) $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{a}$.

Määritelmä 2.16 (Yleinen määritelmä raja-arvolle; vertaa toispuoleiseen raja-arvoon $\mathbb{R}$:ssä.)**.** Olkoot $A, B \subset \mathbb{C}, A, B \neq \emptyset$ ja $f : A \to B$. Olkoon $z_0 \in \mathrm{cl}(A) = A \cup A'$. Sanotaan, että luku a on funktion f raja-arvo pisteessä z_0, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ jolle

$$|f(z) - a| < \varepsilon$$

aina, kun $0 < |z - z_0| < \delta, z \in A$. Toisin sanoen $f(D'_\delta(z_0) \cap A) \subset D_\varepsilon(a) \cap B$.

2.3 Jatkuvuus

Määritelmä 2.17. Olkoon f määritelty joukossa $D_r(z_0)$. Sanotaan, että f on *jatkuva* pisteessä z_0, jos

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Siis f on jatkuva pisteessä z_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$, jolle

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |z - z_0| < \delta.$$

Toisin sanoen $f(D_\delta(z_0)) \subset D_\varepsilon(f(z_0))$. Jos $A \subset \mathcal{M}(f)$, niin f on jatkuva joukossa A, jos se on jatkuva kaikissa joukon A pisteissä.

Yleisemmin: Jos $z_0 \in \mathrm{cl}(A)$, niin f on jatkuva z_0:ssa, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ aina, kun $z \in A$ ja, kun $|z - z_0| < \delta$. Toisin sanoen $z \in A \cap D_\delta(z_0)$.

Esimerkki 2.18. Vakiofunktio $f(z) = a, z \in \mathbb{C}$ on jatkuva koko kompleksitasossa.

Esimerkki 2.19. Funktio $f(z) = z, z \in \mathbb{C}$ on jatkuva koko kompleksitasossa.

Esimerkki 2.20. Funktio $f(z) = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on jatkuva joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nyt

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z_0 - z|}{|z||z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z||z_0|}.$$

Koska $z_0 \neq 0$, niin $|z_0| > 0$. Rajoitutaan joukkoon $|z - z_0| < \frac{1}{2}|z_0|$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$||z| - |z_0|| \leq |z - z_0| < \frac{1}{2}|z_0|$$

eli

$$-\frac{1}{2}|z_0| < |z| - |z_0| < \frac{1}{2}|z_0|.$$

Siten

$$|z| > |z_0| - \frac{1}{2}|z_0| = \frac{1}{2}|z_0|$$

eli

$$\frac{1}{|z|} < \frac{2}{|z_0|}$$

eli

$$\frac{1}{|z||z_0|} < \frac{2}{|z_0|^2}.$$

Valitaan $\delta = \min\{\frac{|z_0|}{2}, \frac{|z_0|^2}{2}\varepsilon\} > 0$. Jos nyt $|z - z_0| < \delta$, niin

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z||z_0|}|z - z_0| < \frac{2}{|z_0|^2}|z - z_0| < \frac{2}{|z_0|^2}\frac{|z_0|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Täten f on jatkuva pisteessä z_0. □

Lause 2.21. *Oletetaan, että f ja g ovat jatkuvia pisteessä z_0 (tai joukossa A). Tällöin seuraavat funktiot ovat jatkuvia pisteessä z_0 (joukossa A):*

1) $f \pm g$

2) fg

3) $\dfrac{f}{g}$, *kun* $g(z_0) \neq 0$ *(tai* $g(z) \neq 0$ *kaikilla* $z \in A$*)*

4) $\overline{f}$, *kun määritellään* $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$, $z \in \mathcal{M}(f)$

5) $|f|$

Huomautus. Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kompakti (suljettu ja rajoitettu) ja f on jatkuva, niin kohdan 5 nojalla $|f|$ on jatkuva A:ssa. Siten f saavuttaa suurimman ja pienimmän (itseis)arvonsa A:ssa.

Jatkuvuuden kanssa yhtäpitäviä ehtoja ovat:

1) f on jatkuva pisteessä $z_0 \in \mathcal{M}(f)$, jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(z_n) \subset \mathcal{M}(f)$ jolle $z_n \to z_0$ pätee $f(z_n) \to f(z_0)$.
   Seuraus: f on jatkuva A:ssa, jos ja vain jos $f(\mathrm{cl}(A)) \subset \mathrm{cl}(f(A))$.

2) f on jatkuva A:ssa, jos ja vain jos jokaiselle avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{C}$ on voimassa, että $f^{-1}(V)$ on avoin A:ssa.

Lause 2.22. *Oletetaan, että* f *on jatkuva pisteessä* z_0 *ja* g *on jatkuva pisteessä* $f(z_0)$. *Tällöin* $g \circ f$ *on jatkuva pisteessä* z_0.

Esimerkki 2.23. Tunnetusti $f(z) = z^2, z \in S[0, \pi[$ on bijektio $S[0,\pi[\to \mathbb{C}$. Siten $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$ on olemassa. Nyt $f(z) = z^2$ on jatkuva $\mathbb{C}$:ssä. Tarkastellaan funktion $f^{-1}(z)$ jatkuvuutta tilanteessa $\mathrm{Im}(\sqrt{z}) > 0$.

Olkoot $w = \sqrt{z} = a + ib, b > 0$ (z mielivaltainen), ja $w_0 = \sqrt{z_0} = a_0 + ib_0, b_0 > 0$. Tällöin $w^2 = z, w_0^2 = z_0$ ja

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |w^2 - w_0^2| = |(w + w_0)(w - w_0)| = |w + w_0||w - w_0| \\ &\geq |b + b_0||\sqrt{z} - \sqrt{z_0}| > b_0|\sqrt{z} - \sqrt{z_0}|. \end{aligned}$$

Siten

$$|\sqrt{z} - \sqrt{z_0}| < \frac{1}{b_0}|z - z_0|$$

eli $\sqrt{z}$ on jatkuva alueessa $\mathrm{Im}(\sqrt{z}) > 0$.

Määritelmä 2.24 (Tasainen jatkuvuus)**.** Olkoon $A \subset \mathcal{M}(f)$. Sanotaan, että funktio f on *tasaisesti jatkuva* joukossa A, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

aina, kun $z, z_0 \in A$ ja $|z - z_0| < \delta$.

Voidaan osoittaa: Jos A on kompakti (suljettu ja rajoitettu) ja f on jatkuva, niin f on tasaisesti jatkuva joukossa A:ssa.

Esimerkki 2.25. Osoitetaan, että funktio $f(z) = z^2$ on tasaisesti jatkuva joukossa $A = D_1(0)$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt

$$|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z + z_0||z - z_0|.$$

Olkoon $z, z_0 \in D_1(0)$ eli $|z| < 1, |z_0| < 1$. Tällöin

$$|z + z_0| \leq |z| + |z_0| < 1 + 1 = 2$$

eli $|f(z) - f(z_0)| < 2|z - z_0|$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Jos nyt $z, z_0 \in A$ ja $|z - z_0| < \delta$, niin

$$|f(z) - f(z_0)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.4 Analyyttiset funktiot (funktion derivaatta)

Määritelmä 2.26. Olkoot $A \subset \mathbb{C}, A^\circ \neq \emptyset$ ja $z_0 \in A^\circ$. Funktiolla $f : A \to \mathbb{C}$ on *derivaatta* pisteessä z_0 ja merkitään derivaattaa $f'(z_0)$, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \text{ on olemassa.}$$

Merkitsemällä $z - z_0 = h \in \mathbb{C}$ voidaan ehto kirjoittaa myös muodossa

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $f'(z)$ on olemassa kaikissa pisteissä $z \in D_\delta(z_0)$, niin f on *analyyttinen* pisteessä z_0.

Huomautus. Koska yllä $z_0 \in A^\circ$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että $D_r(z_0) \subset A$. Siten $z_0 + h \in A$, jos $|h|$ on tarpeeksi pieni.

Esimerkki 2.27. Vakiofunktion $f(z) = a, z \in \mathbb{C}$ derivaatta on $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tämä seuraa siitä, että

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Esimerkki 2.28. Funktion $f(z) = z, z \in \mathbb{C}$ derivaatta on

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} = 1.$$

Esimerkki 2.29. Olkoon $f(z) = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$. Jos $z_0 \in \mathbb{C}$, niin

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{z_0}+\overline{h}-\overline{z}_0}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Koska $\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ ei ole olemassa, niin f ei ole derivoituva!

Lause 2.30. *Jos f on analyyttinen joukossa $A \subset \mathcal{M}(f), A^\circ = A \neq \emptyset$, niin tällöin f on jatkuva A:ssa.*

Todistus. Jos $z_0 \in A$, niin

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0.$$

□

Huomautus. Jos funktio on jatkuva, niin se ei silti välttämättä ole derivoituva.

Esimerkki 2.31. Funktio $f(z) = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$ on jatkuva $\mathbb{C}$:ssä, mutta ei ole derivoituva.

Lause 2.32. *Olkoon f funktio, jolle $f'(z)$ on olemassa ja $f'(z) \neq 0$. Jos f:n käänteisfunktio on määritelty ja jatkuva eräässä pisteen $w = f(z)$ δ-ympäristössä, niin silloin $(f^{-1})'(w)$ on olemassa, ja*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Todistus. Koska $f'(z)$ on olemassa, niin[1]

$$f(z+h)-f(z) = f'(z)h + h\varepsilon(h),$$

missä $\varepsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Jos $w = f(z)$ eli $z = f^{-1}(w)$ ja $|k|$ on tarpeeksi pieni, niin $w+k \in D_\delta(w)$. Tällöin, jos $f^{-1}(w+k) = z+h$, niin $w+k = f(z+h)$.

Siten

$$k = f(z+h) - w = f(z+h) - f(z) \to 0,$$

kun $h \to 0$, ja edelleen

$$f^{-1}(w+k) \to f^{-1}(w) = z$$

käänteisfunktion jatkuvuuden nojalla. Siis

$$\frac{f^{-1}(w+k)-f^{-1}(w)}{k} = \frac{h}{f(z+h)-f(z)} = \frac{h}{f'(z)h+h\varepsilon(h)} = \frac{1}{f'(z)+\varepsilon(h)}$$
$$\to \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

kun $h \to 0$. □

[1] Tässä on ensin kirjoitettu $\varepsilon(h) := (f(z+h)-f(z))/h - f'(z)$.

Myös yhdistettyä funktiota $f \circ g$ koskeva *ketjusääntö*

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

on voimassa.

Esimerkki 2.33. Funktion $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3$ derivaatta on ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} f'(z) &= 3\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \cdot \frac{1\cdot(z+1) - 1\cdot(z-1)}{(z+1)^2} \\ &= 3\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \cdot \frac{2}{(z+1)^2} = 6\frac{(z-1)^2}{(z+1)^4}. \end{aligned}$$

Huomautus. Vaikka f ja g eivät kumpikaan olisi derivoituvia pisteessä z_0, niin $f \circ g$ voi silti olla derivoituva pisteessä z_0.

Esimerkki 2.34. Funktiot $f(z) = g(z) = \overline{z}$ eivät ole derivoituvia missään pisteessä, mutta $(f \circ g)(z) = \overline{\overline{z}} = z$ on derivoituva koko kompleksitasossa.

2.5 Cauchyn–Riemannin yhtälöt

Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$, jolle $f = u + iv$.

Jos $f'(z), z \in A$ on olemassa, niin raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

on olemassa ja se on $f'(z), z \in A$. Palautetaan mieleen joukkojen samaistus

$$\mathbb{C} \supset \mathcal{M}(f) = A = \{x + iy : x + iy \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in A\}.$$

Koska raja-arvo on (olemassa ollessaan) yksikäsitteinen, niin

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

on sama riippumatta reitistä, jota pitkin kompleksiluku h lähestyy origoa.

Tarkastellaan tapausta, kun $h \to 0$ reaaliakselia pitkin eli $h = h + i0, h \in \mathbb{R}$. Olkoon $z = x + iy \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+h+iy)-f(x+iy)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{[u(x+h,y)+iv(x+h,y)]-u(x,y)-iv(x,y)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \left(\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\right) \\
&= u_x(x,y) + iv_x(x,y).
\end{aligned}$$

Siis $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y), z = x + iy$ eli lyhyemmin $f' = u_x + iv_x$.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, missä $h \to 0$ imaginääriakselia pitkin eli $h = ik, k \in \mathbb{R}$. Olkoon $z = x + iy \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ h=ik}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k)+iv(x,y+k)-u(x,y)-iv(x,y)}{ik} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{1}{i}\left(\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k} + i\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k}\right) \\
&= \frac{1}{i}[u_y(x,y) + iv_y(x,y)] = v_y(x,y) - iu_y(x,y).
\end{aligned}$$

Siis $f'(z) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$ eli $f' = v_y - iu_y$.

Nämä ovat samat eli $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$, jos

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} \quad A\text{:ssa.}$$

Nämä ovat niin sanotut *Cauchyn–Riemannin yhtälöt*. Olemme siis todistaneet seuraavan tuloksen.

Lause 2.35. *Olkoon f on analyyttinen alueessa $A \subset \mathbb{C}, A \neq \emptyset$ ja $f = u + iv$. Tällöin u ja v toteuttavat Cauchyn–Riemannin yhtälöt A:ssa.*

Tämä tulos pätee myös kääntäen seuraavassa muodossa.

Lause 2.36. *Oletetaan, että funktiot $u, v : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, A^\circ = A \neq \emptyset$ ovat jatkuvasti derivoituvia, toisin sanoen u_x, u_y, v_x, v_y, ovat olemassa ja jatkuvia. Tällöin, jos u ja v toteuttavat Cauchyn–Riemannin yhtälöt, niin $f'(z)$ on olemassa kaikilla $z = x + iy \in A$. Lisäksi $f' = u_x + iv_x$.*

Todistus. Koska $u : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $(x, y) \in A$, niin

$$u(x+k, y+l) = u(x, y) + u_x(x, y)k + u_y(x, y)l + |h|\varepsilon_1(h),$$

missä $h = (k, l) \in \mathbb{C}, |h| = \sqrt{k^2 + l^2}$. Vastaavasti,

$$v(x+k, y+l) = v(x, y) + v_x(x, y)k + v_y(x, y)l + |h|\varepsilon_2(h).$$

Merkitään $h = k + il$. Olkoon $z = x + iy \in A$ ja valitaan h niin, että $z + h \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u(x+k, y+l) + iv(x+k, y+l) - u(x, y) - iv(x, y) \\ &= u(x+k, y+l) - u(x, y) + i(v(x+k, y+l) - v(x, y)) \\ &= u_x(x, y)k + u_y(x, y)l \\ &\quad + i(v_x(x, y)k + v_y(x, y)l) + |h|\varepsilon_1(h) + i|h|\varepsilon_2(h), \end{aligned}$$

missä $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \to 0$, kun $h = (k, l) \to (0, 0)$.

Merkitään $\varepsilon_1(h) + i\varepsilon_2(h) = \varepsilon(h) \in \mathbb{C}$. Koska funktiot u ja v toteuttavat Cauchyn–Riemannin yhtälöt, niin

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u_x(x, y)k - v_x(x, y)l + i(v_x(x, y)k + u_x(x, y)l) + |h|\varepsilon(h) \\ &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))(k + il) + |h|\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Siten

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h).$$

Nyt

$$\left|\frac{|h|}{h}\varepsilon(h)\right| = \frac{|h|}{|h|}|\varepsilon_1(h) + i\varepsilon_2(h)| = \sqrt{\varepsilon_1^2(h) + \varepsilon_2^2(h)}.$$

Koska $\varepsilon_1(h) \to 0$ ja $\varepsilon_2(h) \to 0$, niin $\varepsilon_1^2(h) \to 0$ ja $\varepsilon_2^2(h) \to 0$. Siten

$$\sqrt{\varepsilon_1^2(h) + \varepsilon_2^2(h)} \to 0,$$

kun $h \to 0$. Näin ollen raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = f'(z)$$

on olemassa. □

Esimerkki 2.37. Olkoon $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}, z = x + iy$. Tällöin $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tässä

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{ja} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Siten

$$\begin{cases} u_x(x,y) = 2x \\ v_y(x,y) = 2x \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} u_y(x,y) = -2y \\ v_x(x,y) = 2y. \end{cases}$$

Siis Cauchyn–Riemannin yhtälöt toteutuvat. Lisäksi $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2x + i2y = 2z$.

Huomautus (Laplacen yhtälö). Jos $f = u + iv$ ja f on analyyttinen joukossa $A \subset \mathbb{C}$ ja funktioilla u ja v on kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat ja ne ovat jatkuvia, niin u ja v toteuttavat Cauchyn–Riemannin yhtälöt A:ssa eli

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Tällöin $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$ eli $u_{xx} + u_{yy} = 0$ joukossa A. Tämä on niin sanottu *Laplacen yhtälö*. Sanotaan, että u on *harmoninen* funktio. Vastaavasti myös $v_{xx} + v_{yy} = 0$ joukossa A.

Huomautus. Jos C_1 ja C_2 ovat vakioita, niin yhtälöt $u(x,y) = C_1$ ja $v(x,y) = C_2$ määräävät $\mathbb{R}^2$:n käyrät. Nämä käyrät leikkaavat toisiaan kohtisuorasti.

2.6 Eräitä funktioita

2.6.1 Polynomifunktiot

Funktiota

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

sanotaan *polynomiksi*.

Jos $a_n \neq 0$, niin polynomin p *aste* on n. Jos $p(z_0) = 0$, niin $p(z) = (z - z_0)p_1(z)$, missä p_1 on astetta $n-1$ oleva polynomi.

2.6.2 Rationaalifunktiot

Funktiota

$$r(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, p_2(z) \neq 0,$$

missä p_1 ja p_2 ovat polynomeja sanotaan *rationaalifunktioksi*.

2.6.3 Juurifunktiot

Olkoon $f(z) = z^m, z \in \mathbb{C}, m = 2, 3, 4, \ldots$ ja $S_k = S[k\frac{2\pi}{m}, (k+1)\frac{2\pi}{m}[, k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Jos $w = z^m$ ja $w = r(\cos(\varphi+k2\pi)+i\sin(\varphi+k2\pi)), \varphi \in [0, 2\pi[$, niin (vrt. Esimerkki 2.10)

$$\sqrt[m]{w} = \sqrt[m]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{m}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Näin saadaan eri ratkaisu jokaisella k:n arvolla. Jos $k = 0$, saadaan *pääarvo*. Yleisesti voidaan asettaa:

$$f_k = f|_{S_k}, \quad f_k^{-1} : \mathbb{C} \to S_k, \quad f_k(S_k) = \mathbb{C}$$

ja

$$f_k^{-1}(w) = \sqrt[m]{w} \in S_k.$$

2.6.4 Eksponenttifunktio

1) Eksponenttifunktio voidaan määritellä jollakin seuraavista tavoista:

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

2) Jos $z \in \mathbb{R}$, niin $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$ eli e^z laajentaa tutun funktion e^x käsitettä.

3) $|e^z| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = |e^x||\cos y + i\sin y| = e^x > 0$. Siten $0 \notin \mathcal{A}(e^z)$.

4) Koska $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, niin tutusti

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

5) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

6) Koska $\cos(y + k2\pi) = \cos y$ ja $\sin(y + k2\pi) = \sin y$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, niin

$$e^{z+ik2\pi} = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}.$$

Siis e^z on jaksollinen ja sen jakso on $i2\pi$. Erityisesti e^z ei ole injektio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Osoitetaan, että $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, kun $f(z) = e^z$.

Osoitetaan, että $f(T[0, 2\pi[) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, missä

$$T[0, 2\pi[= \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y < 2\pi\}$$

on *jaksovyö*. Yleisesti merkitään

$$T_k = T[2k\pi, 2(k+1)\pi[= \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, 2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi\}.$$

Olkoon $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Kirjoitetaan

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Jos nyt $e^z = e^x e^{iy} = w$, niin $e^x = r$ ja $\varphi = y + k2\pi$. Jos siis

$$z = \ln r + i\varphi,$$

niin $e^z = w$. Jokaiselta jaksovyöltä löytyy siis yksi sellainen z, että $e^z = w$ eli $\mathcal{A}(e^z) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Siis eksponenttifunktio saa kaikki muut kompleksiarvot paitsi nollan.

2.6.5 Logaritmi

Tarkastellaan funktiota $g = f|_{T_0}$, kun $f(z) = e^z$. Edellä olevan nojalla $g(T_0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lisäksi g on bijektio $T_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, joten $g^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to T_0$ on olemassa. Tarkastellaan tätä käänteisfunktiota g^{-1}. Olkoon

$$f(z) = e^z, z \in T_0, z = f^{-1}(w)$$

eli $w = e^z$. Tällöin asetetaan (vrt. edellä)

$$f^{-1}(w) = \ln|w| + i\varphi,$$

missä $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Siis

$$f^{-1}(z) = \ln|z| + i\arg z = \operatorname{Log} z$$

ja tätä sanotaan (luonnollisen) *logaritmin päähaaraksi*.

Yleisesti, jos $f_k = f|_{T_k}, f_k : T_k \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin

$$f_k^{-1}(z) = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi = \log z.$$

Tämä on ns. k-haara. Tällaisia haaroja on ääretön määrä eli $\log z$ on *monihaarainen funktio*.

Tarkastellaan vielä logaritmin derivaattaa. Jos $f(z) = \operatorname{Log} z$ ja $g(z) = e^z, z \in T_0$, niin $f = g^{-1}$ ja Lauseen 2.32 nojalla

$$(g^{-1})'(z) = \frac{1}{g'(g^{-1}(z))} = \frac{1}{g(g^{-1}(z))} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0.$$

Siis

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Yleisesti: jos $f(z) = \log z = \operatorname{Log} z + i2k\pi$, niin $f'(z) = \frac{1}{z}$. Kaikki (reaali)logaritmin laskusäännöt eivät kuitenkaan päde moniarvoisuuden takia.

2.6.6 Trigonometriset funktiot

Koska $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ja $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, niin

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \in \mathbb{R}$$

ja

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \in \mathbb{R}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Asetetaan nyt *määritelmät*:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Edelleen:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cos z \neq 0,$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sin z \neq 0.$$

Ominaisuuksia:

1) Jos $z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4i^2}(e^{i2z} - 2\cdot 1 + e^{-i2z}) + \frac{1}{4}(e^{i2z} + 2\cdot 1 + e^{-i2z}) \\ &= \frac{1}{4}(2+2) = 1.\end{aligned}$$

2) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

3) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

4) Sinin nollakohdat määrätään ratkaisemalla yhtälö

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

eli

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0.$$

Laventamalla tämä saadaan muotoon

$$\frac{e^{2iz}-1}{e^{iz}}=0$$

eli

$$e^{2iz}=1=e^{i(0+k2\pi)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Täten $2z=k2\pi$ eli nollakohdat ovat $z=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Vastaavasti,

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0$$

jos ja vain jos $z=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

5) $\sin(-z)=-\sin z$ ja $\cos(-z)=\cos z$.

6) $\sin\overline{z}=\overline{\sin z}$ ja $\cos\overline{z}=\overline{\cos z}$.

7) Määrätään joukot $\{\cos iy : y\in\mathbb{R}\}$ ja $\{\sin iy : y\in\mathbb{R}\}$. Jos $y\in\mathbb{R}$ on mielivaltainen, niin

$$\cos iy=\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\cosh y.$$

Siten $\{\cos iy : y\in\mathbb{R}\}=[1,\infty[$. Vastaavasti

$$\sin iy=\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i}=\frac{i}{i}\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right)=i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)=i\sinh y,$$

joten $\{\sin iy : y\in\mathbb{R}\}=\{iy|y\in\mathbb{R}\}=$ Imaginääriakseli.

8) Derivaatat. Jos

$$f(z)=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

niin

$$f'(z)=\frac{ie^{iz}-(-i)e^{iz}}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että

$$\frac{d}{dz}(\cos z)=-\sin z,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Funktion

$$f(z)=\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\qquad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

derivaatta on

$$f'(z)=\frac{\cos z\cos z-(-\sin z)\sin z}{\cos^2 z}=\frac{1}{\cos^2 z}=1+\tan^2 z.$$

9) Käänteisfunktiot. Olkoon $f(z) = \sin z$ ja $z = f^{-1}(w) = \arcsin w$. Siis

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Yhtäpitävästi

$$2iw = e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}$$

eli

$$(e^{iz})^2 - 2iwe^{iz} - 1 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan nojalla

$$e^{iz} = \frac{2iw + \sqrt{4i^2w^2 + 4}}{2} = \frac{2iw + 2\sqrt{1 - w^2}}{2} = iw + \sqrt{1 - w^2}.$$

Siten

$$iz = \log(iw + \sqrt{1 - w^2})$$

eli

$$z = \frac{1}{i}\log(iw + \sqrt{1 - w^2}),$$

missä $\log z = \mathrm{Log}\, z + i2k\pi$. Siis

$$f^{-1}(w) = \arcsin w = -i\log(iw + \sqrt{1 - w^2}).$$

Tämä(kin) funktio on äärettömän morihaarainen funktio. Päähaaraksi sovitaan usein se haara, jolle $\arcsin 0 = 0$. Derivaatta on

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\arcsin z) &= \frac{1}{i}\Big(\frac{d}{dz}\log(iz + \sqrt{1 - z^2})\Big) \\
&= \frac{1}{i}\Big(\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\Big)\Big(i + \frac{1}{2\sqrt{1 - z^2}} \cdot (-2z)\Big) \\
&= \frac{1}{i}\Big(\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\Big)\Big(\frac{i\sqrt{1 - z^2} - z}{\sqrt{1 - z^2}}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad z \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

2.6.7 Hyperboliset funktiot

Asetetaan

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{ja} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Esimerkki 2.38. 1) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

2) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$.

Huomautus. Jos $z \in \mathbb{C}$, niin määritelmien mukaan

1) $\sin(iz) = i \sinh z$
2) $\cos(iz) = \cosh z$.

2.6.8 Yleistetty potenssifunktio

Jos $a \in \mathbb{C}$ on vakio, niin asetetaan

$$z^a = e^{a \log z},$$

kun $z \neq 0$. Tässä $\log z = \operatorname{Log} z + ik2\pi$, missä edelleen $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z$. Logaritmin vuoksi myös potenssifunktio on monihaarainen (moniarvoinen).

Esimerkki 2.39. Lasketaan i^i. Koska $i = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$, niin $\operatorname{Log} i = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\pi/2$. Siten

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\operatorname{Log} i + i2k\pi)} = e^{i(i\frac{\pi}{2} + i2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} - k2\pi} = e^{-\frac{\pi}{2} + k2\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

2.7 L'Hospitalin sääntö raja-arvon laskemiselle

Lause 2.40. *Oletetaan, että f ja g ovat analyyttisiä pisteessä z_0 ja $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Tällöin*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Todistus. Koska f ja g ovat analyyttisiä z_0:ssa, niin (kuten aiemmin)

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon_1(z)$$

ja

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon_2(z),$$

missä $\varepsilon_1(z) \to 0$ ja $\varepsilon_2(z) \to 0$, kun $z \to z_0$. Siten

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon_1(z)}{g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon_2(z)} = \frac{f'(z_0) + \varepsilon_1(z)}{g'(z_0) + \varepsilon_2(z)} \longrightarrow \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

kun $z \to z_0$. □

Luku 3

Käyräintegraali $\mathbb{C}$:ssä

3.1 Kompleksitason käyristä

Määritelmä 3.1. Olkoot $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ (yhden reaalimuuttujan) funktioita. Tällöin joukko

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]\}$$

on kompleksitason $\mathbb{C}$ *suunnistettu käyrä*. Luku $z(a)$ on käyrän γ *alkupiste*, $z(b)$ *loppupiste* ja $[a, b]$ on käyrän *parametriväli*. Tämä on γ:n parametrimuotoinen esitys, eikä se ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 3.2. Olkoon käyrä parabelin osa $\gamma = \{z : z(t) = t+it^2, t \in [0, 1]\}$. Tällöin γ:n alkupiste on $z(0) = 0 + i0 = 0$ ja γ:n loppupiste $z(1) = 1 + i$.

Esimerkki 3.3. Käyrillä

$$\gamma_1 = \{z : z(t) = t + it^2, t \in [0, 1]\}$$

ja

$$\gamma_2 = \{z : z(t) = t^2 + it^4, t \in [0, 1]\}$$

on täsmälleen samat pisteet ja sama suunnistus. Tätä merkitään $\gamma_1 = \gamma_2$.

Jos käyrillä γ_1 ja γ_2 on samat pisteet, mutta eri suunta, niin merkitään

$$\gamma_1 = -\gamma_2.$$

Olkoon

$$\gamma = \{z(t) : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]\}.$$

Tällöin käyrä $-\gamma$ voidaan esimerkiksi esittää muodossa

$$-\gamma = \{z(-t) : t \in [-b, -a]\},$$

jolloin käyrän $-\gamma$ alkupiste on $z(-(-b)) = z(b) = \gamma$:n päätepiste. Vastaavasti käyrän $-\gamma$ päätepiste on $z(-(-a)) = z(a) = \gamma$:n alkupiste.

Huomautus. Parametriväli $[a, b]$ voidaan valita miksi tahansa väliksi $[c, d]$ seuraavan päättelyn mukaan. Olkoon $h : [c, d] \to [a, b]$ aidosti kasvava bijektio,

$$\{z(t) : t \in [a, b]\} = \gamma$$

ja $\{h(t) : t \in [c, d]\} = [a, b]$. Jos $\gamma_1 = \{z(h(t)) : t \in [c, d]\}$, niin $\gamma_1 = \gamma$.

Jos puolestaam $h : [c, d] \to [a, b]$ on aidosti vähenevä, niin

$$\{z(h(t)) : t \in [c, d]\} = -\gamma.$$

Esimerkki 3.4. Olkoon $h : [0, 1] \to [0, 1], h(t) = t^2$ (kasvava) bijektio. Tällöin

$$\{z(h(t)) : t \in [0, 1]\} = \{z(t) : t \in [0, 1]\}.$$

Esimerkki 3.5. Jos $h : [0, 1] \to [0, 1], h(t) = 1 - t$ on (vähenevä) bijektio, niin

$$\{z(h(t)) : t \in [0, 1]\} = -\{z(t) : t \in [0, 1]\}.$$

Huomautus. Pisteiden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ välistä (suunnistettua) *janaa* merkitään

$$\gamma_{[z_1,z_2]} = [z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0, 1]\}.$$

Tällöin

$$-\gamma_{[z_1,z_2]} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + (1 - t)(z_2 - z_1), t \in [0, 1]\}.$$

Määritelmä 3.6. Käyrä $\gamma = \{z(t) : t \in [a, b]\}$ on *sulkeutuva*, jos $z(a) = z(b)$.

Esimerkki 3.7. Ympyrä $\gamma = \{z : |z| = r\} = S_r(0)$ voidaan esitää käyränä, kun

$$z(t) = r(\cos t + i \sin t)) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

tai $z(t) = re^{i2\pi t}, t \in [0, 1]$. Yleisemmin, z_0-keskinen r-säteinen ympyrä voidaan esittää käyränä

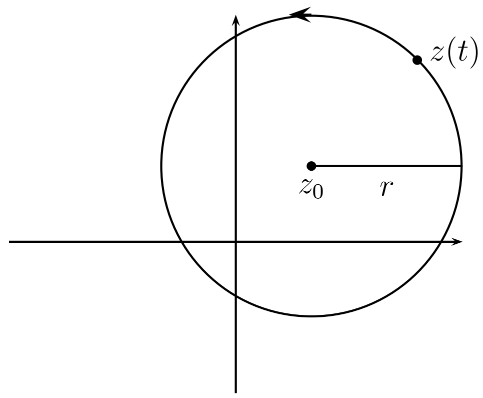
$$\gamma = \{z(t) : z = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\} = S_r(z_0).$$

Käyrien yhdistäminen Olkoot γ_1 ja γ_2 käyriä, joille γ_1:sen loppupiste kuin γ_2:sen alkupiste (suunnistus olemassa). Yhdistetty käyrä

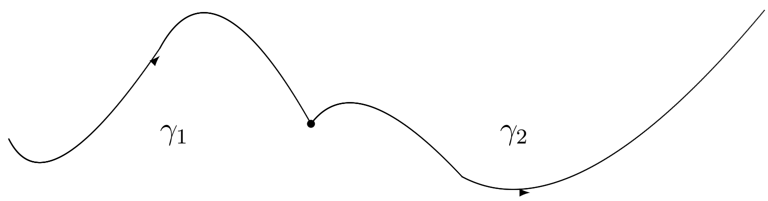
$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

voidaan parametrisoida esimerkiksi seuraavasti: Jos

$$\gamma_1 = \{z_1(t) : t \in [0, 1]\}$$



Kuva 3.1: Ympyrän parametrisointi



Kuva 3.2: Käyrien yhdistäminen

ja

$$\gamma_2 = \{z_2(t) : t \in [0,1]\},$$

niin asettamalla

$$h_1(t) = 2t, \quad t \in [0, \frac{1}{2}],$$

ja

$$h_2(t) = 2t - 1, \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

voidaan kirjoittaa

$$\gamma = \{z(t) : t \in [0,1]\},$$

missä

$$z(t) = \begin{cases} z_1(h_1(t)) & , t \in [0, \frac{1}{2}[\\ z_2(h_2(t)) & , t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tämä voidaan yleistää useammille käyrille eli

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n.$$

Käyrän tangentti Jos

$$\gamma = \{z(t) : z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]\},$$

niin derivaatta pisteessä $z(t)$ on

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

jos $x'(t)$ ja $y'(t)$ ovat olemassa välillä $t \in]a,b[$ ja toispuoleiset raja-arvot $x'_+(a), x'_-(b)$ sekä $y'_+(a), y'_-(b)$ ovat olemassa.

Huomautus. Tärkeitä käyriä ovat:

- janat $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2$:

$$[z_1, z_2] = \{z : z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0,1]\}$$

- ympyrät $z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r > 0$:

$$\{z : z(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$$

tai

$$\{z : z(t) = z_0 + re^{i2\pi t}, t \in [0,1]\}.$$

Huomautus. Jos käyrä γ on sulkeutuva eikä leikkaa itseään, niin γ on niin sanottu *Jordan–käyrä.*

3.2 Käyräintegraali

Olkoon f funktio $A \to \mathbb{C}$ ja $A \subset \mathbb{C}$ *alue* eli avoin ja polkuyhtenäinen joukko. Olkoon $\gamma = \{z(t) : t \in [a,b]\}$ alueessa A sijaitseva säännöllinen käyrä. Oletetaan, että $z'(t)$ on olemassa välillä $]a,b[$ ja toispuoleisena päätepisteissä, sekä $z'(t) \neq 0$ ja jatkuva.

Oletetaan, että f on jatkuva käyrällä γ. Olkoon

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

välin $[a,b]$ *jako.* Merkitään $z_k = z(t_k), t_k \in P, k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Yhdistämällä peräkkäiset pisteet z_{k-1} ja $z_k, k = 1, 2, \ldots, n$ janoilla saadaan murtoviiva.

Tarkastellaan summalauseketta

$$S_P(f, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}),$$

missä $\xi_k = z(u_k)$ ja u_k on jokin piste välillä $[t_{k-1}, t_k]$. Nyt

$$z_k - z_{k-1} = (x(t_k) - x(t_{k-1})) + i(y(t_k) - y(t_{k-1})).$$

Väliarvolauseen nojalla

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(r_k)(t_k - t_{k-1})$$

ja

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(s_k)(t_k - t_{k-1}),$$

missä $r_k, s_k \in]t_{k-1}, t_k[$.

Summalauseke tulee siten muotoon

$$S_P(f, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x'(r_k) + iy'(s_k))(t_k - t_{k-1}).$$

Tämä summalauseke vastaa funktion $f(z(t))z'(t)$ Riemannin summaa yli välin $[a, b]$ jaolla P. Merkitään $h = \max_i |t_i - t_{i-1}|$ ja asetetaan

$$\lim_{h \to 0} S_P(f, \{\xi_k\}) = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_\gamma f(z)dz.$$

Jos edellä $f = u + iv, u, v : A_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (u + iv)(x'(t) + iy'(t))dt \\
&= \int_a^b [ux'(t)dt - vy'(t)dt] + i \int_a^b [uy'(t)dt + vx'(t)dt] \\
&= \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx).
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.8. Olkoon $f(z) = z^2$ ja γ jana $[0, 1 + i]$. Janan esitys käyränä on

$$\gamma = \{z : z(t) = 0 + i0 + t(1 + i - 0), t \in [0, 1]\} = \{z : z(t) = t(1 + i), t \in [0, 1]\}.$$

Nyt $x(t) = t$ ja $y(t) = t$ sekä $dz = (x'(t) + iy'(t))dt = (1 + i)dt$. Siten

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(z(t))z'(t)dt = \int_0^1 [t(1 + i)]^2(1 + i)dt = \int_0^1 (t^2 - t^2 + 2itt)(1 + i)dt \\
&= \int_0^1 2it^2(1 + i)dt = \int_0^1 (i2t^2 - 2t^2)dt = \frac{2}{3}i - \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Eräitä ominaisuuksia

1)
$$\int_\gamma (f(z)+g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz$$

2)
$$\int_\gamma af(z)dz = a\int_\gamma f(z)dz,$$

missä $a \in \mathbb{C}$ on vakio.

3)
$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

Lause 3.9. *Olkoon* $\gamma_1 = \{z : z(t), t \in [a,b]\}$ *ja* $\gamma_2 = \{z : z(h(s)), s \in [c,d]\}$, *missä* $h : [c,d] \to [a,b]$ *on jatkuvasti derivoituva, aidosti kasvava ja* $h'(t) > 0$. *Tällöin*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Todistus. Nyt $dz = d(z(h(s))) = z'(h(s))h'(s)ds$, $t = h(s), dt = h'(s)ds$. Siten

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_{\gamma_2} f(z(h(s)))dz = \int_c^d f(z(h(s)))z'(h(s))h'(s)ds \\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_{\gamma_1} f(z)dz.\end{aligned}$$

□

Huomautus (Yhdistetyn käyrän integraali). Olkoot γ_1 ja γ_2 käyriä, ja γ_1:n loppupiste $= \gamma_2$:n alkupiste.

Jos yhdistetyn käyrän $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ integraali on olemassa, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Yleisemmin, jos $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$, missä kukin γ_i on säännöllinen, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Esimerkki 3.10. Olkoon $f(z) = \overline{z}$,

$$\gamma_1 = \{z : z(t) = t + it^2, t \in [0,1]\},$$

$$\gamma_2 = [1+i, 0] = \{z : z(t) = (1-t) + i(1-t), t \in [0,1]\}$$

ja $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Integraali yli käyrän γ_1 on

$$\int_{\gamma_1} \overline{z} dz = \int_0^1 (t - it^2)(1 + i2t) dt = \cdots = 1 + \frac{i}{3}.$$

Vastaavasti integraali yli käyrän γ_2 on

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \overline{z} dt &= \int_0^1 ((1-t) - i(1-t))(-1-i) dt \\
&= -(1+i) \left[\int_0^1 (1-t) dt - i \int_0^1 (1-t) dt \right] \\
&= (1+i) \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(1+i)(1-i) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.
\end{aligned}$$

Siten integraali yli yhdistetyn käyrän γ on

$$\int_{\gamma} \overline{z} dz = \left(1 + \frac{i}{3}\right) + 1 = 2 + \frac{i}{3}.$$

Lause 3.11. *Jos γ on paloittain säännöllinen käyrä ja jos f on jatkuva funktio, jolle $|f(z)| \le M$ kaikilla $z \in \gamma, M > 0$ vakio, niin*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \le \int_{\gamma} |f(z)| dz \le M L_{\gamma},$$

missä $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ on käyrän γ pituus.

Määritelmä 3.12. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : A \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Jos on olemassa funktio $F : A \to \mathbb{C}$, jolle $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in A$, niin sanotaan, että F on funktion f *integraalifunktio* A:ssa.

Huomautus. 1) Reaalitapauksesta tiedetään, että jos $g : [a,b] \to \mathbb{R}, g'(t) = 0$ kaikilla $t \in]a,b[$, niin $g(x) = g(a) =$ vakio kaikilla $x \in [a,b]$.

2) Olkoon $f : A \to \mathbb{C}, A$ alue, $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in A$. Tällöin $f(z) =$ vakio kaikilla $z \in A$.

Todistus. Jos $f'(z) = 0$ ja $f = u + iv$, niin

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = 0 = u_y(x, y) = v_x(x, y) = 0.$$

Täten u ja v ovat edellisen kohdan nojalla vakioita eli f on vakio. □

3) Integraalifunktion määritelmä ei kerro kuinka se määrätään. Usein (alkeisfunktioiden tapauksessa) se kuitenkin löytyy kokeilemalla. Esimerkiksi, jos $f(z) = 2z$, niin tutusti $F(z) = z^2$.

Integraalifunktion (mahdollinen) olemassaolo tarjoaa seuraavan lauseen kautta toisen tavan laskea käyräintegraaleja (vrt. reaalitapaukseen).

Lause 3.13. *Olkoon funktiolla f on integraalifunktio F alueessa A ja olkoon*

$$\gamma = \{z(t) : t \in [a, b]\}$$

paloittain säännöllinen käyrä alueessa A. Tällöin

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Todistus. Olkoon $z = z(t) \in \gamma, t \in [a, b]$. Koska

$$\frac{d}{dt}(F(z(t))) = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t),$$

niin

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b d(F(z(t))) = \Big|_a^b F(z(t)) = F(z(b)) - F(z(a)).$$

□

Huomautus. Yllä olevan integraalin arvo ei riipu γ:sta muuten kuin päätepisteiden kautta. Jos erityisesti γ on sulkeutuva, niin integraali on 0.

Esimerkki 3.14. Lasketaan vielä Esimerkin 3.8 integraali käyttämällä Lausetta 3.13. Nyt $f(z) = z^2$ ja siten $F(z) = z^3/3$. Täten

$$\int_\gamma f(z)dz = F(1 + i) - F(0) = \frac{(1 + i)^3}{3} = \frac{1 + 3i + 3i^2 + i^3}{3} = \frac{2i - 2}{3}$$

eli todellakin saatiin sama arvo kuin edellä.

Hakemisto