Kompleksianalyysi II

1. lokakuuta 2007

Sisältö

Luku 1

Cauchyn integraalilause

Kompleksianalyysi I:ssä todettiin, että jos f:llä on alueessa $A \subset \mathbb{C}$ integraalifunktio F

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in A$$

niin

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

kun $\gamma = \{z(t) \quad | \quad t \in [a,b]\}$ paloittain säännöllinen

$\Rightarrow$ Jos γ on suljettu, niin $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$

Toisaalta, jos f on jatkuva alueessa A ja $\int_\gamma f(z)dz = 0$ jokaisella suljetulla paloittain säännöllisellä γ:lla $\Rightarrow$ f:lle integraalifunktio
($z_0 \in A$ kiinteä ja $z \in A$)

$$F(z) = \int_\gamma f(z)dz$$

jossa γ on (paloittain säännöllinen) polku $z \to z_0$ A:ssa

Analyysi II: Jos p ja q ovat alueessa $A \subset \mathbb{R}^2$ jatkuvia $\mathbb{R}$-arvoisia funktioita, joille osittaisderivaatat ovat olemassa, ja ovat jatkuvia.

Olkoon $\gamma_A \in A$ suunnistettu reunakäyrä

Greenin lause: $\displaystyle\int_{\gamma_A}(qdx + pdy) = \iint_A (Q_x + P_y)dxdy$

Olkoon nyt $f = u + iv$ alueessa A analyyttinen funktio, jolle $f'(z)$ on jatkuva A:ssa ja γ_A:lla
(γ_A on suljettu ja paloittain säännöllinen)

Tällöin $\displaystyle\int_{\gamma_A} f(z)dz = 0$ sillä

$$\int_{\gamma_A} f(z)dz = \int_{\gamma_A} (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_{\gamma_A} (udx + (-v)dy) + i \int_{\gamma_A} (vdx + udy)$$

toteuttaa Cauchy-Riemann yhtälöt

$$= \iint_A ((-v_x) - u_y)dxdy + i \iint_A (u_x - v_y)dxdy$$

Nyt A:ssa $\begin{array}{ll} u_x & = v_y \\ u_y & -v_x \end{array}$ (Cauchy-Riemann)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lll} u_x & -u_y & \equiv 0 \\ u_y & +v_x & \equiv 0 \end{array}\right\} A\text{:ssa}$$

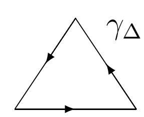
$$= \iint_A 0dxdy + i \iint_A 0dxdy = 0 + i0 = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_A} f(z)dz = 0$$

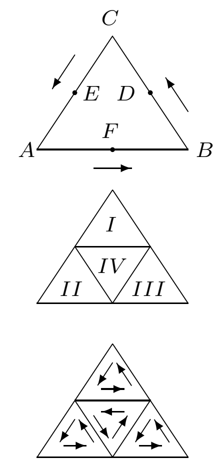
Lause 1.1. Cauchy-Coursat:

Olkoon f alueeessa A analyyttinen funktio ja olkoon Δ alueessa A sijaitseva mielivaltainen kolmio. Olkoon edelleen γ_Δ tämän kolmion suunnistettu reunakäyrä.

Tällöin $\displaystyle\int_{\gamma_\Delta} f(z)dz = 0$



Todistus.



Olkoon Δ:n kärkipisteet A, B, C, toisin sanoen $\Delta = ABC$

Olkoot E, D, F sivujen AC, BC, AB keskipisteet. Tällöin muodostuu neljä kolmiota $\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}, \Delta_{IV}$

Olkoot $\gamma_I, \gamma_{II}, \gamma_{III}, \gamma_{IV}$ positiivisesti suunnistetut reunakäyrät

Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_{\gamma_\Delta} f(z)dz$

$$= \int_{\gamma_I} f(z)dz + \int_{\gamma_{II}} f(z)dz + \int_{\gamma_{III}} f(z)dz + \int_{\gamma_{IV}} f(z)dz$$

koska integraali $\int_{ED} + \int_{DE} = 0$ ja $\int_{FE} + \int_{EF} = 0$ ja $\int_{FD} + \int_{DF} = 0$

Jos L_Δ on kolmion ABC piirin pituus niin $L_\Delta = 2L_{\Delta_k}$, missä $k = I, II, III, IV$

Arvioidaan lauseketta

$$|I| = \left| \int_{\gamma_\Delta} f(z)dz \right| = \left| \int_{\gamma_I} f(z)dz + \int_{\gamma_{II}} f(z)dz + \int_{\gamma_{III}} f(z)dz + \int_{\gamma_{IV}} f(z)dz \right|$$

$$\leq \left| \int_{\gamma_I} f(z)dz \right| + \left| \int_{\gamma_{II}} f(z)dz \right| + \left| \int_{\gamma_{III}} f(z)dz \right| + \left| \int_{\gamma_{IV}} f(z)dz \right|$$

Olkoon Δ_1 kolmioista se, jolle $\left| \displaystyle\int_{\gamma_k} f(z)dz \right|, \quad k = I, II, III, IV$ on suurin

$\Rightarrow \qquad |I| \leq 4|I_1|$

Tehdään vastaava prosessi kolmiolle Δ_1 jolloin saadaan Δ_1:sen osakolmio Δ_2, jolle pätee vastaavasti $|I_1| \leq 4|I_2|$

$\Rightarrow \qquad |I| \leq 4|I_1| \leq 4 \cdot 4|I_2|$

Jatketaan edelleen ja saadaan kolmioiden jono $\Delta_k, k = 1, 2, 3, ... \quad \Delta_{k+1} \subset \Delta_k$

$|I_{k+1}| \leq 4|I_k| \quad k = 1, 2, ...$

$|I| \leq 4^n |I_n|$ Jos L_k on kolmion Δ_k piirin pituus $\Rightarrow L_{k+1} = \frac{1}{2} L_k \quad k = 1, 2, ...$
ja yleisesti $L = 2L_1 = 2^2 L_2$

$\Rightarrow \quad L_n = \frac{1}{2^n} L \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$

Nyt f on analyyttinen A:ssa ja $z_0 \in A \Rightarrow \quad f'(z_0)$ on olemassa ja on olemassa funktio $\varepsilon(z - z_0) = 0$ jolle

$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z - z_0) = 0$ ja
$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)$ kun $z \in A$
Siten
$|I_n| = \Big| \int_{\gamma_n} f(z)dz \Big| = \Big| \int_{\gamma_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z - z_0))dz \Big|$

$\leq \Big| \int_{\gamma_n} f(z_0)dz \Big| + \Big| \int_{\gamma_n} f'(z_0)(z - z_0)dz \Big| + \Big| \int_{\gamma_n} (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)dz \Big|$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat nollia, sillä $f(z_0)$:lla on integraalifunktio $f(z_0)z$ (huomaa $f(z_0)$ on vakio) ja $f'(z - z_0)$:lla on integraalifunktio $f'(z_0)(\frac{1}{2}z^2 - z_0 z)$

Ja tällaisten funktioiden integraalit suljettujen paloittain säännöllisten käyrien yli ovat 0.

$\Rightarrow \quad |I_n| \leq \Big| \int_{\gamma_n} (z - z_0)\varepsilon(z - z_0)dz \Big| \leq \int_{\gamma_n} |z - z_0||\varepsilon(z - z_0)||dz|$

Nyt $z \in \gamma_n$ ja $z_0 \in \Delta_n \Rightarrow \quad |z - z_0| < \dfrac{L_\Delta}{2^n}$
koska $\varepsilon(z - z_0) \to 0$, kun $z \to z_0$

$\Rightarrow \quad |\varepsilon(z - z_0)| < \dfrac{L_\Delta}{2^n}$

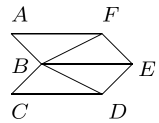
$\Rightarrow \quad |I_n| \leq \int_{\gamma_n} \dfrac{L}{2^n} \dfrac{\varepsilon}{L^2} |dz| \leq \dfrac{L}{2^n} \dfrac{\varepsilon}{L^2} \int_{\gamma_n} |dz| = \dfrac{L}{2^n} \dfrac{\varepsilon}{L^2} \dfrac{L}{2^n} = \dfrac{1}{4^n}\varepsilon$

$\Rightarrow \quad |I| < 4^n \dfrac{\varepsilon}{4^n} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I = 0$

$\square$

Seuraus 1.2. Jos $A_1 A_2 A_3 ... A_n \subset A$ on monikulmio ja γ on sen reunakäyrä ja f on analyyttinen A:ssa, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$



Esimerkiksi:
reunakäyrä $ABCDEFA = \gamma$

Laskemalla kuvion kolmioiden reunakäyrien yliotetut integraalit

$$\int_{ABFA} f(z)dz + \int_{BEFB} f(z)dz + \int_{BDEB} f(z)dz + \int_{CDBC} f(z)dz$$
$$= \int_{ABCDEFA} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

Sillä $\int_{BF} + \int_{FB} = 0$ et cetera

Lause 1.3. Olkoon f konveksissa alueessa A analyyttinen funktio. Tällöin
$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ pitkin jokaista säännöllistä suljettua polkua γ

($\gamma'(t)$ on jatkuva)

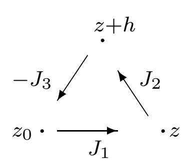
Todistus. Osoitetaan, että f:llä on integraalifunktio F alueessa A. Olkoon $z_0 \in A$ kiinteä piste.

Määritellään nyt $F : A \to \mathbb{C}$ asettamalla
$F(z) = \int_{J(z_0,z)} f(z)dz$ missä $z \in A$, $J(z_0, z) =$ jana $z \to z_0$
Merkitään $J_1 = J(z_0, z)$

Osoitetaan, että $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in A$
Olkoon $z \in A$ mielivaltainen ja olkoon $|h|$ tarpeeksi pieni, että $z + h \in A$

Nyt jos $z_0 \neq h$, niin $z_0, z, z + h$ muodostavat kolmion, jonka sivuina ovat janat:

$J(z_0, z) = J_1$
$J(z, z + h) = J_2$
$J(z + h, z_0) = -J_3$



Nyt $J_1 \cup J_2 \cup -J_3$ on kolmion reunakäyrä. Lauseesta 1.0.2 seuraa: $\int_{\gamma_\Delta} f(w)dw = 0$
$w \in \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_\Delta} f(w)dw = \int_{J_1} f(w)dw + \int_{J_2} f(w)dw + \int_{-J_3} f(w)dw$$

$$\Rightarrow \quad \int_{J_3} = \int_{J_1} + \int_{J_2} \quad \Leftrightarrow \quad F(z + h) = F(z) + \int_{J_2}$$

$J_2 = \{w \quad | \quad w = z + th, t \in [0,1]\} \quad \Rightarrow \quad J_2'(t) = h$

$$\Rightarrow \quad \int_{J_2} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt = h\int_0^1 f(z+th)dt$$

Siis $F(z+h) - F(z) = h\displaystyle\int_0^1 f(z+th)dt$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{z\to 0}\int_0^1 f(z+th)dt$$

(f jatkuva z:ssa $\Rightarrow \displaystyle\lim_{z\to 0} f(z+th) = f(z)$)

$$= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)dt = \int_0^1 f(z)dt = f(z)\int_0^1 dt = f(z)$$

Siis $F'(z) = f(z)$

$\square$

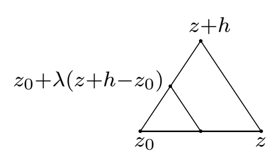
Lause 1.4. Olkoon f konveksissa alueessa A jatkuva funktio ja olkoon $z_0 \in A$ kiinteä piste, jolle f on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z_0\}$

Tällöin $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ kaikilla säännöllisillä suljetuilla poluille γ

Todistus. Osoitetaan, että f:llä on integraalifunktio A:ssa. Määritellään
$F(z) = \displaystyle\int_{J(z_0,z)} f(w)dw \quad z \in A$
$F(z+h) = \displaystyle\int_{J(z_0,z+h)} f(w)dw$, kun $z+h \in A$

Tarkastellaan nyt kolmiota, jonka kärkipistet ovat z_0, z ja $z+h$

Merkitään nyt Δ_γ:lla kolmiota jonka kärkipisteet ovat $z_0, z+\lambda(z-z_0), z_0+\lambda(z+h-z_0)$ ja T_λ:lla suorakulmiota, jonka kärkipisteet ovat $z_0+\lambda(z-z_0), z, z+h+\lambda(z+h-z_0) \quad 0<\lambda<1$



Nyt kolmion $z_0, z, z+h$ reunakäyrän γ_Δ yli otettu integraali

$$\int_{\gamma_\Delta} f(w)dw = \int_{\gamma_{\Delta_\lambda}} f(w)dw + \int_{\gamma_{T_\lambda}} f(w)dw$$

Nyt f on jatkuva A:ssa $\Rightarrow$
$r > 0, \quad |f(z)|$ on rajoitetussa kiekossa $D_r(z_0)$ eli $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in D_r(z_0)$

Valitaan nyt r niin, että $\Delta \subset D_r(z_0)$

$$\Rightarrow \quad \Big| \int_{\gamma_{\Delta_\lambda}} f(w)dw \Big| \leq \int_{\gamma_{\Delta_\lambda}} |f(w)||dw| \leq M \int_{\gamma_{\Delta_\lambda}} |dw| = ML_\lambda$$

Huomaa: kun $\lambda \to 0$ niin $L_\lambda \to 0$
Edelleen

$\displaystyle\int_{\gamma_{T_\lambda}} f(w)dw = 0$ sillä f on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z_0\}$ ja $\gamma_{T_\lambda} \subset A \setminus \{z_0\}$

Siis $\displaystyle\int_{\gamma_\Delta} f(w)dw = \underbrace{\int_{\gamma_{\Delta_\lambda}} f(w)dw}_{\to 0} + \underbrace{\int_{\gamma_{T_\lambda}} f(w)dw}_{\to 0} \quad$ kun $\lambda \to 0$

$$\Rightarrow \quad \int_{\gamma_\Delta} f(w)dw = 0$$

Kuten edellisessä lauseessa voidaan osoittaa, että

$\displaystyle\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) \quad$ kun $h \to 0$

$\Rightarrow \quad F'(z) = f(z) \quad \forall z \in A$
$\Rightarrow \quad f$ on analyyttinen A:ssa

$\square$

Esimerkki 1.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad f$ on jatkuva $\mathbb{C}$:ssä ja analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\Rightarrow \quad f$ on analyyttinen koko $\mathbb{C}$:ssä

Luku 2

Cauchyn integraalikaavat

Lause 2.1. Cauchyn integraalikaava kiekolle:
Jos f on analyyttinen alueessa A, joka sisältää kiekon $D_r(z_0) = D$ sulkeuman, toisin sanoen $\overline{D}_r(z_0) \subset A$

Tällöin, jos $z \in D_r(z_0)$, niin $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$\gamma_D = \{z \quad | \quad z = x_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]\}$

Todistus. Määritellään funktion $F(z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & q \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$
(Olkoon $z \in D_r(z_0)$ annettu.)

Tällöin F on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z\}$, ja jatkuva A:ssa.
(Koska $\lim\limits_{w \to z} F(w) = f'(z) = F(z)$.)

Lause I.4 $\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{\gamma_D} F(w) dw = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\gamma_D} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_D} \frac{f(z)}{w-z} dw \\
&= \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma_D} \frac{dw}{w-z}
\end{aligned}$$

Merkitään $G(z) = \int_{\gamma_D} \frac{dw}{w-z}$

Osoitetaan, että $G(z)$ on vakio $D_r(z_0)$:ssa.

Nyt $\quad G(z_0) = \displaystyle\int_{\gamma_D} \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$
$(w = z_o + re^{it}, t \in [0, 2\pi] \qquad dw = ire^{it} dt \qquad w - z_0 = re^{it})$

Jos $z \in D_r(z_0)$ ja $|h|$ on niin pieni, että $z + h \in D_r(z_0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
G(z+h) - G(z) &= \int_{\gamma_D} \frac{1}{w-(z+h)} dw - \int_{\gamma_D} \frac{1}{w-z} dw \\
&= \int_{\gamma_D} \Big(\frac{1}{w-(z-h)} - \frac{1}{w-z} \Big) dw \\
&= \int_{\gamma_D} \Big(\frac{w-z-(w-(z+h))}{(w-(z+h))(w-z)} \Big) dw \\
&= \int_{\gamma_D} \frac{h}{(w-(z+h))(w-z)} dw \\
&= h \int_{\gamma_D} \frac{1}{(w-(z+h))(w-z)} dw
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{G(z+h)-G(z)}{h} = \int_{\gamma_D} \Big(\frac{1}{(w-(z+h))(w-z)} \Big) dw$$

Nyt $\displaystyle\lim_{h \to 0} \int_{\gamma_D} \Big(\frac{1}{(w-(z+h))(w-z)} \Big) dw$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\gamma_D} \lim_{h \to 0} \frac{1}{(w-(z+h))(w-z)} dw \\
&= \int_{\gamma_D} \frac{1}{(w-z)^2} dw
\end{aligned}$$

Nyt funktiolla $\frac{1}{(w-z)^2}$ on integraalifunktio $\frac{-1}{(w-z)}$

Koska γ_D on suljettu käyrä $\Rightarrow \displaystyle\int_{\gamma_D} \frac{1}{(w-z)^2} dw = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{G(z+h)-G(z)}{h} = \int_{\gamma_D} \frac{1}{(w-z)^2} dw$$

$$\Rightarrow \quad G'(z) = 0 \qquad \forall z \in D_r(z_0)$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \text{vakio} \quad z \in D_r(z_0)$$

Koska $G(z_0) = 2\pi i \quad \Rightarrow \quad G(z) = 2\pi i, z \in D_r(z_0)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_D} \frac{1}{w-z} dw}_{2\pi i}$$

$$\Longrightarrow \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_D} \frac{w}{w-z} dw$$

$\square$

Esimerkki 2. Laske integraali $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \quad \gamma(t) = e^{it}, t \in [a, b]$

Ratkaisu:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^w}{w-0} = e^0$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

Esimerkki 3. Laske integraali $\int_\gamma \frac{e^z}{z-2} dz$ kun $\begin{array}{ll} \gamma_1 = 3e^{it} & t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_2 = e^{it} & t \in [0, 2\pi] \end{array}$

Ratkaisu:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| < 3\} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_D = D_1\text{:n reuna}$$

$$2 \in D_1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2$$

$$D_2 = \{z in \mathbb{C} \quad | \quad |z| < 1\} \quad \Rightarrow \gamma_2 = \gamma_D = D_2\text{:n reuna, ja } 2 \notin D_2$$

$\frac{e^z}{z-2}, z \in D_2$ on analyyttinen $\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z-2} dz = 0$

Esimerkki 4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cosh(z^2)}{z(z^2+4)}dz \qquad \gamma = \{z \quad | \quad |z| = 3\} = \{z \quad | \quad z(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$

Ratkaisu:

$$\frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{z(z-2i)(z+2i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}$$

$$= \frac{A(z-2i)(z+2i) + Bz(z+2i) + Cz(z-2i)}{z(z-2i)(z+2i)}$$

$$\Rightarrow \quad A(z-2i)(z+2i) + Bz(z+2i) + Cz(z-2i) = 1 \quad \forall z$$

Sijoitetaan $z = 0$	$A(-2i)(2i) = 1$	$\Leftrightarrow$	$A = \frac{1}{4}$
Sijoitetaan $z = 2i$	$B2i(4i) = 1$	$\Leftrightarrow$	$B = -\frac{1}{8}$
Sijoitetaan $z = -2i$	$C(-2i)(-4i) = 1$	$\Leftrightarrow$	$C = -\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{z-2i} + \frac{1}{z+2i}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma \frac{\cosh(z^2)}{z(z^2+4)}dz = \int_\gamma \Big[\frac{\cosh(z^2)}{4z} - \frac{1}{8}\Big(\frac{\cosh(z^2)}{z-2i} + \frac{\cosh(z^2)}{z+2i}\Big)\Big]dz$$

$$= 2\pi i(\tfrac{1}{4}\cosh(0^2) - \tfrac{1}{8}[\cosh(-2i)^2 + \cosh(2i)^2])$$

$$= \tfrac{2\pi i}{8}(2 - 2\cosh 4) = \tfrac{\pi i}{2}(1 - \cosh 4)$$

Esimerkki 5. $\int_0^\pi e^{a\cos t}\cos(a\sin t)dt \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

Ratkaisu:

Olkoon $\gamma(t) = \{z \quad | \quad z = e^{it}, t \in [-\pi, \pi]$

Tarkastellaan integraalia $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{az}}{z}dz = \int_\gamma \frac{e^{az}}{z-0} = 2\pi i e^0 = 2\pi i$

Toisaalta $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{az}}{z}dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ae^{it}}(ie^{it})}{e^{it}}$

$$
\begin{aligned}
&= i\int_{-\pi}^{\pi} e^{ae^{it}}dt = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{a(\cos t+i\sin t)}dt \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos t}e^{ai\sin t}dt = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos t}(\cos(a\sin t)+i\sin(a\sin t))dt \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)dt - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos t}\sin(a\sin t)dt}_{=0} \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)dt = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)dt = 2\int_{0}^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{0}^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)dt = \pi$$

Seuraus 2.2. Oletetaan, että f on analyyttinen alueessa A ja $z_0 \in A$. $\overline{D}_r(z_0)$.

Tällöin $f'(z)$ on olemassa $\forall z \in D_r(z_0)$ ja

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

Todistus. Olkoon $z \in D_r(z_0)$ ja $|h|$ niin pieni, että $z+h \in D_r(z_0)$.

Nyt Cauchyn integraalikaava $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
f(z+h) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-(z+h)}dw \text{ ja} \\
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-z}dw
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\begin{aligned}
f(z+h) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-(z+h)}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w-z}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\Big(\frac{1}{w-(z+h)} - \frac{1}{w-z}\Big)dw
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\Big(\frac{w-z-(w-(z+h))}{(w-(z+h))(w-z)}\Big)dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\frac{h}{(w-(z+h))(w-z)}dw$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w-(z+h))(w-z)}dw$$

Merkitään $g(w,h) = \frac{f(w)}{(w-(z+h))(w-z)}$

Siis $\quad \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w-(z+h))(w-z)}dw$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\int_{\gamma_D} g(w,h)dw = \int_{\gamma_D} \lim_{h\to 0} g(w,h)dw = \int_{\gamma_D} g(w,0)dw = \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

$$\Longrightarrow \quad f'(w) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

□

Seuraus 2.3. Edelleen tästä seuraa: $f''(z) = \dfrac{2}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^3}dw$

Todistus. $f'(z+h)-f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-(z+h))^2}dw - \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\Big(\frac{1}{(w-(z+h))^2} - \frac{1}{(w-z)^2}\Big)dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\Big(\frac{(w-z)^2-(w-(z+h))^2}{(w-(z+h))^2(w-z)^2}\Big)dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\frac{[(w-z-(w-(z+h)))(w-z+w-(z+h))]}{(w-(z+h))^2(w-z)^2}dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\frac{h\cdot(2w-wz+h)}{(w-(z+h))^2(w-z)^2}dw$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma_D} f(w)\frac{2w-wz+h}{(w-(z+h))^2(w-z)^2}dw$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)(2(w-z)+h)}{(w-(z+h))^2(w-z)^2}dw$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)2(w-z)}{(w-z)^4}dw=\frac{2}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^3}dw$$

$\Rightarrow\quad f''(z)$ on olemassa ja

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^3}dw$$

$\square$

Lause 2.4. Jos f ja A ovat kuten edellä ja $D_r(z_0)\subset A$, niin $f^{(n)}(z)$ on olemassa $\forall z\in D_r(z_0), \forall n=1,\ldots$ ja

$$f^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

Todistus. Induktiolla

Oletetaan, että $f^{(n)}(z)$ on olemassa ja yllä olevaa muotoa, kun $n=k$. Toisin sanoen

$$f^{(k)}=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_D}\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw$$

Nyt $f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_D}f(w)\Big(\frac{1}{(w-(z+h))^{k+1}}-\frac{1}{(w-z)^{k+1}}\Big)dw$$
$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_D}f(w)\Big(\frac{(w-z)^{k+1}-(w-(z+h))^{k+1}}{(w-(z+h))^{k+1}(w-z)^{k+1}}\Big)dw$$
$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_D}f(w)\Big(\frac{(w-z-(w-(z+h)))[\quad]}{(w-(z+h))^{k+1}(w-z)^{k+1}}\Big)dw$$

Jossa $[\quad]=(w-z)^k+(w-z)^{k-1}(w-(z+h))+(w-z)^{k+2}(w-(z+h))^2$
$+\ldots+(w-(z+h))^k.$

Ja kun $h \longrightarrow 0 \quad [\qquad] \longrightarrow \underbrace{(w-z)^k + (w-z)^k + \ldots + (w-z)^k}_{k+1 \text{ kpl}}$

$= (k+1)(w-z)^k$

Nyt $g(w,h) = \dfrac{f(w)[\qquad]}{(w-(z+h))^{k+1}(w-z)^{k+1}} dw$

$$\longrightarrow \frac{f(w)(k+1)(w-z)^k}{(w-z)^{k+1}(w-z)^{k+1}} = \frac{f(w)(k+1)}{(w-z)^{k+2}} \quad \text{kun } h \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_D} g(w,h) dw$$

$$\longrightarrow \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_D} \frac{f(w)(k+1)}{(w-z)^{k+1}} dw = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}} dw = f^{(k+1)}(z)$$

Induktiotodistus pätee $\Rightarrow$ Väite.

$\square$

Esimerkki 6. Määrää integraali $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{6})^2} dz$ ja $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{6})^3} dz$

$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi], \quad D_1(0)$ ja $\frac{\pi}{6} \in D_1(0)$

Ratkaisu:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \quad \Rightarrow \quad \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = 2\pi i f'(z)$$

Nyt $z = \frac{\pi}{6}$ niin $\displaystyle\int_\gamma \frac{fw}{(w-\frac{\pi}{6})^2} dw = 2\pi i f'(\frac{\pi}{6})$

jossa $f(z) = \sin z, \quad f'(z) = \cos z$

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{6})^2} dz = 2\pi i \cos\frac{\pi}{6} = 2\pi i \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\pi i$$

$$f^{(2)} = \frac{2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw = \int_\gamma \frac{\sin w}{(w-\frac{\pi}{6})^3}dw = \pi i f^{(2)}(z) = \pi i(-\sin\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi i}{2}$$

Luku 3

Cauchyn integraalikaavan sovelluksia

Lause 3.1. Moreran lause:
Oletetaan, että A on alue (yhdesti yhtenäinen).

Olkoon f A:ssa jatkua funktio, jolle

$\int_\gamma f(z)dz = 0$ pitkin jokaista paloittain säännöllistä suljettua käyrää $\gamma \subset A$.

Tällöin f on analyyttinen A:ssa.

Todistus. Oletuksella f:llä on integraalifuntio A:ssa. Tosiin sanoen on olemassa funtion $F : A \to \mathbb{C}$ jolle $F'(z)$ on olemassa $\forall V \in A$ ja $F'(z) = f(z)$.

Siis F on analyyttinen A:ssa.

$\Rightarrow \quad F'(z)$ on olemassa.

(Cauchyn-integraali kaavan mukaan.)

Nyt $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in A$
$F''(z) = f'(z) \quad \forall z \in A$
$\Rightarrow \quad f'(z) = F''(z)$ on olemassa $\forall z \in A$

$\square$

Lause 3.2. Cauchyn epäyhtälö:
Oletetaan, että f on analyyttinen kiekossa $D_r(z_0)$ ja myös sen reunakäyrällä.
$\gamma_D = \{z = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$.

Jos $|f(z)|| \leq M \quad \forall z \in \gamma_D$ niin

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Todistus. Cauchyn integraalikaava derivaatoille:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Nyt, jos $w \in \gamma_D \quad \Rightarrow w - z_0 = z_0 + re^{it} - z_0 = re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$.

$dw = ire^{it} dt$

$\Rightarrow \quad |w - z_0| = |re^{it}| = |r| = r$

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \Big|\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw\Big| \\
&= \frac{n!}{w\pi}\Big|\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw\Big| \leq \frac{n!}{w\pi} \int_{\gamma_D} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} |dw| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} r dt = \frac{Mn!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{Mn!}{r^n}
\end{aligned}$$

□

Lause 3.3. Gaussin keskiarvolause:
Oletetaan, että f on analyyttinen suljetussa kiekossa $\overline{D}_r(z_0)$ ja olkoon $\gamma_D = \{z = z_0 + re^{it}\}$

Tällöin $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$

Todistus. Nyt $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_D} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$

käyrällä $\gamma = \{w | w = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$ ja $dw = ire^{it}$ ja $w - z_0 = re^{it}$.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} \frac{f(z_0 + re^{it}) ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

□

Lause 3.4. Liouvillen lause:
Oletetaan, että f on koko kompleksitasossa analyyttinen funktio, jolle pätee

$$|f(z)| \leq M \quad \forall V \in A \text{ toisin sanoen } f \text{ on rajoitettu.}$$

Tällöin f on vakiofunktio.

Todistus. Olkoon $z \in \mathbb{C}$ mielivaltainen. Jos $r > 0$, niin

$$|f'(z)| \leq \frac{1!M}{r}.$$

Huom. Tämä pätee $\forall r > 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu.
Valitaan r niiin suureksi että

$$r > \frac{M}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Nyt $|f'(z)| \leq \frac{M}{2} < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$.

$\Rightarrow \quad |f'(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = 0.$
$\Rightarrow \quad f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$
$\Rightarrow \quad f(z) = a$ vakio $\mathbb{C}$:ssä.

$\square$

Esimerkki 7. $f(x) = \sin x \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad |f(z)| \leq 1 \text{ ja } f'(z) \text{ on olemassa koko } \mathbb{R}\text{:ssä.}$$

Mutta f ei ole vakiofunktio. Siis lause ei päde reaaliarvoisille funktioille.

Huom. Funktio $f(z) = \sin(z) \quad z \in \mathbb{C}$ ei ole rajoitettu (ei voi olla)!
$f'(z) = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ja jos olisi $|f(z)| \leq M$ jollain M niin, $f(z) =$ vakio $\Rightarrow$ ristiriita.

Lause 3.5. Algebran peruslause:
Olkoon p polynomifunktio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (p:n aste ≥ 1 eli ole vakiofunktio).

Töllöin yhtälölle $p(z) = 0$ on ainakin yksi ratkaisu.

Todistus. Jos on voimassa $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ niin funktio,

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$f'(z)$ on olemassa $\forall z \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow \quad f$ on analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

Tarkastellaan lauseketta $|f(z)| = |\frac{1}{p(z)} = \frac{1}{|p(z)|}$.

Osoitetaan aluksi, että $|p(z)| \to \infty$, kun $|z| \to \infty$.

Nyt $p(z) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ ja $a_n \neq 0 \quad \deg p(z) = n$.
$\Rightarrow \quad p(z) = z^n(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n)$.

Nyt $|z| \to \infty \quad \Rightarrow \quad |\frac{a_0}{z^n}| = \frac{|a_0|}{|z|^n} \Rightarrow \frac{a_0}{z^n} \to 0$. Vastaavasti $\frac{a_1}{z^{n-1}} \to 0, \ldots, \frac{a_{n-1}}{z} \to 0$ kun $|z| \to \infty$.

$$|p(z)| = \underbrace{|z|^n}_{\to\infty} \underbrace{|\frac{a_0}{z^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n|}_{\to a_n} \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{|p(z)|} = 0.$$

$\Rightarrow$ Olkoon $M_1 > 0$. Jos $|z|$ on tarpeeksi suuri, toisin sanoen on olemassa $R > 0$ jolle pätee

$$\frac{1}{|p(z)|} < M_1 \quad \forall |z| > R.$$

Koska $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ on jatkuva $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \quad f$ on jatkuva kiekossa $|z| \leq R, \overline{D}_R(0)$.
$\Rightarrow \quad$ kiekko on kompakti, josta seuraa että $|f(z)|, z \in \overline{D}_R(0)$ on rajoitettu, tosin sanoen on olemassa $M_2 > 0$, jolle

$$|f(z)| \leq M_2 \quad \forall z \in \overline{D}_R(0).$$

Valitaan $M = \max\{M_1, M_2\}$.

$$\Rightarrow f(z) \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Liuovillen lauseesta seuraa

$$f(z) = \text{vakio} = a \quad z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \tfrac{1}{p(z)} = a \forall z \in \mathbb{C}.$$

$p(z) = \frac{1}{a} =$ vakio ja p:n aste on nyt 0. $\Rightarrow$ Ristiriita.

□

Huomautus. Seuraus:
Polynomilla $p(z)$ on n kappaletta nollakohita, jos p:n aste on n. (Huom. nämä voivat kuitenkin olla moninkertaisia nollakohtia.)

Todistus. $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$
$\Rightarrow \quad \exists z_0$ jolle $p(z_0) = 0$
$p(z) = (z - z_0) p_1(z)$
p_1:n aste $n - 1$
Jos $n - 1 \geq 1 \quad \Rightarrow p_1$:llä on nollakohta.
$z_1 \quad \Rightarrow p(z) = 0 \quad \Rightarrow p_1(z) = (z - z_1) p_2(z)$
Ja niin edelleen.

Lause 3.6. Maksimiperitaate:
Olkoon A rajoitettu alue. Olkoon $\text{cl}(A) = A \cap \delta A$.

Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio, joka on jatkuva joukossa $\text{cl}(A)$.

Jos f ei ole vakiofunktio, niin

$$\max_{z \in \text{cl}(A)} |f(z)| = \max_{z \in \delta A} |f(z)|.$$

Huom. Siitä että A on rajoitettu, seuraa $\text{cl}(A)$ on suljettu ja rajoitettu. Koska f on jatkuva $\text{cl}(A)$:ssa, niin myös $|f|$ on jatkuva. Tästä seuraa, että $|f|$ on saavuttaa suurimman arvonsa ja pienimmän arvonsa. Samoin on olemassa $z_0 \in \text{cl}(A)$ jolle

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \text{cl}(A)} |f(z)|.$$

Todistus. Nyt cl(A) on suljettu ja rajoitettu ja $|f|$ on jatkuva cl(A):ssa.
$\Rightarrow |f|$ saavuttaa sekä miniminsä, että maksiminsa.
Toisin sanoen on olemassa $z_0 \in$cl(A), jolle

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \mathrm{cl} A} |f(z)|$$

Jos f on vakiofunktio, niin $|f|$ on vakiofunktio
$\Rightarrow \max\limits_{z \in \mathrm{cl}(A)} |f(z)|$ on vakio ja $= \max\limits_{z \in \delta A} |f(z)|$.

Oletetaan, että $z \in A$ (toisin sanoen $z \notin \delta A$).

Merkitään $M = \max_{z \in \mathrm{cl}(A)} |f(z)| = |f(z_0)|$.

Jos nyt $\exists$ kiekko $D_r(z_0)$ jolle $|f(z)| < M \quad \forall z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Koska $|f|$ on jatkuva, niin on olemassa $\delta > 0$ siten että

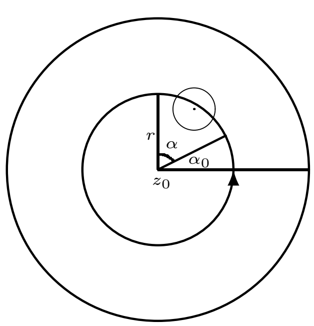
$$\begin{aligned} &||f(z)| - \underbrace{|f(z_0)|}_{M}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \forall z \in D_\delta(z_0) \\ \Leftrightarrow \quad &-\tfrac{1}{2}\varepsilon < |f(z)| - M < \tfrac{1}{2} \\ &|f(z)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + M \end{aligned}$$

Nyt koska $|f(z)| < M \quad \forall z \in D_r(z_0), z \neq z_0$
$\Rightarrow$ Jos $\varepsilon > 0$ annettu $\Rightarrow \exists a \in D_r(z_0)$ jolle $|f(a)| < M - \varepsilon$.

Koska f jatkuva cl(A):ssa $\Rightarrow$ on olemassa $\delta > 0$ siten että

$$||f(z) - |f(z_0)|| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ aina kun } |z - a| < \delta.$$

Tällöin $f(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon + |f(a)|\frac{1}{2}\varepsilon + M - \varepsilon = M - \frac{1}{2}\varepsilon$ aina kun $|z - a| < \delta$.



Olkoon $r_0 = |a - z_0| > 0$.
Tarkastellaan kiekkoa $D_{r_0}(z_0) \subset D_r(z_0)$.

Olkoon α kuten kuvassa. Nyt kiekon $D_r(z_0)$ reunakäyrä on

$$\gamma_{r_0} = \{z | z = z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]\}.$$

Nyt Gaussin keskiarvo lause $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
M = |f(z_0)| &= \Big| \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{it}) dt \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big| \int_0^{\alpha_0} f(z(t))dt + \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} f(z(t))dt + \int_{\alpha_0+\alpha}^{2\pi} f(z(t))dt \Big| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \Big(\Big| \int_0^{\alpha_0} f(z(t))dt \Big| + \Big| \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} f(z(t))dt \Big| + \Big| \int_{\alpha_0+\alpha}^{2\pi} f(z(t))dt \Big| \Big) \\
&\le \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{\alpha_0} \Big| f(z(t)) \Big| dt + \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} \Big| f(z(t)) \Big| dt + \int_{\alpha_0+\alpha}^{2\pi} \Big| f(z(t)) \Big| dt \Big) \\
&\le \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{\alpha_0} M dt + \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} (M - \frac{1}{2}\varepsilon) dt + \int_{\alpha_0+\alpha}^{2\pi} M dt \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} (M\alpha + (M - \frac{1}{2}\varepsilon)\alpha + M(2\pi - \alpha_0 - \alpha)) \\
&= \frac{1}{2\pi} (M\alpha_0 + M\alpha - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon + 2\pi M - M\alpha_0 - M\alpha) \\
&= M - \frac{1}{4\pi}\alpha\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$$
M = |f(z_0)| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt < M - \frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon < M.
$$

Siten aitoa paikallista maksimikohtaa ei voi olla A:ssa $|f|$:llä.

Siten $|f|$ saa maksimikohdansa reunalla δA.

$\square$

Luku 4

Sarjat, potenssisarjat

4.1 Funktiojonot

Määritelmä 4.1. Olkoon (f_n) joko joukossa $E \subset \mathbb{C}$ määriteltyjä $\mathbb{C}$-arvoisia funktioita.

Jos $f \in E$, niin $(f_n(z))$ on kompleksilukujono. Jos $f_n(z)$ suppenee kohti pistettä a_z, toisin sanoen $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = a_z$, $f_n(z) \to a_z$ ja kyseessä oleva ehto on voimassa kaikilla $z \in E$, niin tällöin saadaan funtio $E \to \mathbb{C}$. Merkitään:

$$f(z) = a_z.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in E.$$

Tällöin sanotaan, että $f_n \to f$ pisteittäin.

Siis $f_n \to f$ pisteittäin joukossa E, jos jokaista $\varepsilon > 0$ ja $z \in E$ kohti on olemassa $N = N(\varepsilon, z) \in N$ jolle

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ aika kun } n > N.$$

Jos f_n ei suppene jossain pisteessä $z \in E \Rightarrow (f_n)$ hajaantuu.
($\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ ei ole olemassa tai $\lim_{n\infty} |f_n(z)| \to \infty$.)

Esimerkki 8. $f_n(z) = z^n$ a) $E = \{z| \quad |z| \le \frac{1}{2}\}$
b) $E = \{z| \quad |z| \le 1\}$.

a) Nyt jos $|z| \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad |f_n(z)| = |z^n| \le (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n} \to 0$, kun $n \to \infty$.
$\Rightarrow \quad |f_n(z)| \to 0$, kun $n \to \infty \quad \forall z$, joille $|z| \le \frac{1}{2}$.

b) $E = \{|z| \le 1\}$.

$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \cos\varphi + i\sin\varphi$
$\Rightarrow \quad z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

Jos $\varphi \ne 0$, niin $\lim_{n\to\infty} \cos n\varphi$ ja $\lim_{n\to\infty} \sin n\varphi$ eivät ole olemassa.

Jos $\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1$, jolloin $\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

$\Rightarrow \quad f_n(z)$ ei suppenen, kun $E = \{z \quad | \quad |z| \le 1\}$.

Määritelmä 4.2. Tasainen suppeneminen:
Olkoon (f_n) jono E:ssä määriteltyjä $\mathbb{C}$-arvoisia funktioita joille pätee

$$f_n(z) \to f(z) \text{ pisteittäin } z \in E.$$

Tällöin sanotaan $f_n \to f$ tasaisesti E:ssä, jos $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in E} |f_n(z) - f(z)| = 0$

Toisin sanoen, $f_n \to f$ taisaisesti joukossa E, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (ei riipu z:sta), jolle

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ aina kun } n \ge N \quad \forall z \in E.$$

Esimerkki 9. Jos on olemassa jono $(a_n) \subset \mathbb{C}$, jolle $\forall z \in E$

$$|f_n(z) - f(z)| \le a_n \text{ ja}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad f_n \to f \text{ tasaisesti.}$$

Huomautus. Kuten reaalifunktioille niin myös $\mathbb{C}$:ssä pätee tulos:
Jos (f_n) on jono joukossa $E \subset \mathbb{C}$ jatkuvia funktioita, joille $f_n \to f$ tasaisesti, niin f on jatkuva.

Lause 4.1. Olkoon (f_n) jono alueessa A jatkuvia määriteltyjä funktioita ja olkoon $\gamma = \{\gamma(t), t \in [a,b]\}$ (paloittain) säännöllinen käyrä jolle pätee $f_n \to f$ taisaisesti käyrällä γ. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)fz.$$

Todistus. Joukko γ on kompakti osajoukko A:sta.
$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n \quad \Rightarrow \quad f$ on jatkuva.

$\Rightarrow \quad \exists \int_\gamma f(z)dz$

Merkitään $L = \int_\gamma |dz| =|$ käyrän γ pituus.

Nyt jos $\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow$ on olemassa $N = N(\varepsilon)$, jolle

$$|f_n(z) - f(z)| < \tfrac{\varepsilon}{L} \quad \forall z \in \gamma, n \geq N.$$

Täten $\left| \int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|dz$

$< \int_\gamma \frac{\varepsilon}{L} dz = \frac{\varepsilon}{L} \int_\gamma dz = \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon$, aina kun $n \geq N$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

□

Lause 4.2. Olkoon (f_n) alueessa $A \subset \mathbb{C}$ määritelty analyyttisten funktioiden jono, jolle $f_n \to f$ tasaisesti jokaisessa An kompaktissa osajoukossa E.

Tällöin f on analyyttinen A:ssa ja $\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z)$ on tasaista jokaisessa A:n kompaktissa osajoukossa E.

Todistus. Olkoon $z_0 in A$ annettu ja r sellainen että $D_r(z_0) \subset A$. Jos $z \in D_r(z_0)$, niin

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(w)}{w - z} dw, \quad \gamma_r = \{z \quad | \quad z = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}.$$

$\gamma_r \subset A$ kompakti $\Rightarrow f_n(z) \to f(z)$ taisaisesti γ_r:ssä.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Jos $h \in \mathbb{C}$, jolle $z+h \in D_r(z_0)$, niin

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-(z+h)}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w-z}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(w)\Big(\frac{1}{w-(z+h)}-\frac{1}{w-z}\Big)dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(w)\frac{h}{(w-(z+h))(w-z)}dw \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-(z+h))(w-z)}dw$$

$$\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

$\Rightarrow$ $f'(z)$ on olemassa ja $\quad f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$

$\Rightarrow$ $f'(z)$ on olemassa $\forall z \in D_r(z_0)$,
$\Rightarrow$ $f'(z)$ on olemassa A:ssa,
$\Rightarrow$ f on analyyttinen A:ssa.

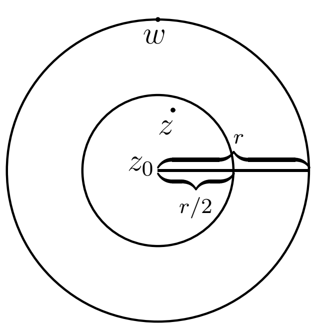
Edelleen $f_n'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw, \quad n = 1,2,\ldots, z \in D_r(z_0)$.
Jos $z \in D_{r/2}(z_0)$, niin

$$|f_n'(z)-f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r}\frac{|f_n(w)-f(w)|}{|w-z|^2}dw.$$

Koska $f_n(z) \to f(z)$ tasaisesti γ_r:llä, niin on olemassa $N = N(\varepsilon)$, jolle

$$|f_n(w)-f(w)| < \varepsilon \quad \forall w \in \gamma_r$$

Nyt $z \in D_{r/2}(z_0) \quad w \in \gamma_r \quad \Rightarrow \quad |w-z| > \frac{1}{2}r \quad \Rightarrow \frac{1}{|w-z|^2} < \frac{1}{(\frac{1}{2}r)^2} = \frac{4}{r^2}$



$$|f_n'(z)-f(z)| \le \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\varepsilon\frac{4}{r^2}dw$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\varepsilon\tfrac{4}{r^2}2\pi r = \varepsilon\tfrac{4}{r}$$

$f_n'(z) \to f'(z)$ tasaisesti joukossa $D_{r/2}(z_0)$.
$f_n'(z) \to f'(z)$ tasaisesti joukon A kompaktissa osajoukossa.

$\square$

4.2 Sarjoista

Määritelmä 4.3. Olkoon (f_n) funktiojono E:ssä $(f_n : E \to \mathbb{C})$. Tarkastellaan summalauseketta

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \quad z \in E, n = 1, 2, \ldots$$

Tällöin (S_n) on funktiojono E:ssä.

Jos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ on olemassa $\forall z \in E$, niin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ suppenee.

Merkitään $S(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad k \in E$.

Funktiota $S_n(z)$ sanotaan sarjan $S(z)$ n:ksi osasummaksi.

Jos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$ ei ole olemassa jollain $z \in E$, niin $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ei suppene E:ssä.

Jos $S(z)$ on olemassa $\forall z \in E$, niin sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ suppenee E:ssä.

Huomautus. Jos sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ suppenee, niin $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(z) = 0$.

$$((f_n(z) = S_n(z) - S_{n-1}(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(z) - S(z) = 0.)$$

Esimerkki 10. $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$.

$S_n(z) \;\; = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n,$

$zS_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n z + n + 1,$

$(1 - z)S_n(z) = 1 - z^{n+1},$

$S_n(z) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$

Jos $|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1}$

$\Rightarrow \quad |z|^{n+1} \to 0$, kun $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad |z| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = \dfrac{1}{z - 1} = S(z).$

Siis $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1 - z} \quad |z| < 1.$

Jos $|z| = 1$, niin $\lim_{z\to\infty} |z^k| \neq 0$ (tämä raja-arvo ei ole olemassa).
$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hajaantuu aina kun $|z| = 1$.
Vastaavasti $|z| > 1$ $\lim_{k\to\infty} |z|^k = \infty \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} z^k \neq 0$.
Siis sarja hajaantuu, kun $|z| \geq 1$.

Esimerkki 11. Tarkastellaan sarjaa

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad z \in D_1(0), \text{ toisin sanoen } |z| < 1.$$

Tällöin $S(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Nyt jokainen funktioista $f_k(z) = z^k, k = 0, 1, 2, \ldots$ $|z| < 1$ ovat jatkuvia ja analyyttisiä. Tästä seuraa $S(z)$ on jatkuva ja analyyttinen kiekossa $D_1(0)$.

Entä $z_0 \in \mathbb{C}?$, $z_0 \neq 1$.
Nyt

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(1-z_0)} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^k$$

$$\left(\text{kun } \left|\tfrac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| < |1-z_0|\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(1-z_0)^{k+1}}}_{a_k} (z-z_0)^k \text{ jatkuvia ja analyyttisiä.}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-z}$ on analyyttinen $D_{|1-z_0|}(z_0)$.

Esimerkki 12. Yleisesti summafunktio

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

on jatkuva ja analyyttinen, suppenee kiekossaan $D_R(z_0)$.

$S'(z)$ on olemassa $\forall z \in D_R(z_0) \quad \Rightarrow$
$S''(z)$ on olemassa $\quad \Rightarrow$
$S'''(z)$ on olemassa

Tarkastellaan nyt sarjaa

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in D_R(0) \quad \frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Tästä saadaa uusi sarja termeittäin derivoimalla

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Koska $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{1}{R}$ eli sarjoille on sama suppenemis säde.

Lause 4.3. Olkoon $S(z)$ ja $f(z)$ kuten edellä. Tällöin jos $z \in D_R(0)$, niin

$$S'(z) \text{ on olemassa ja } S'(z) = f(z) \quad \forall \in D_R(0). \text{ Sekä } S^{(k)} \text{ on olemassa.}$$

Todistus. Olkoon nyt $z_0 \in D_R(0)$. Tarkastellaan $\dfrac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0}$.

Koska $S'(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$, kun $z \in D_R(z_0)$.

$\Rightarrow S'(z)$ on analyyttinen kiekossa $D_R(z_0)$ ja $S''(z) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(z - z_0)^{k-2}$.

Näin jatkamalla nähdään, että $S^{(k)}(z)$ on olemassa $\forall z \in D_R(z_0)$ ja
$k = 1, 2, \ldots \quad S^{(k)}(z) = \frac{d}{dz}(S^{(k-1)}(z)$.

□

4.3 Analyyttisen funktion potenssisarjan kehitelmä

Lause 4.4. Olkoon f analyyttinen alueessa A, ja $z_0 \in A$, jolle kiekko $\overline{D}_r(z_0) \subset A$. Tällöin f:llä on kiekossa $\overline{D}_r(z_0)$ kehitelmä:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \text{ missä}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

Todistus. Nyt Cauchyn integraalikaavasta saadaan: Jos $z \in D_r(z_0)$, niin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad \gamma_r = \{z \quad | \quad z = z + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Nyt $\dfrac{1}{w-z} = \dfrac{1}{w-z_0-(z-z_0)} = \dfrac{1}{w-z_0} \cdot \dfrac{1}{w-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$

$$= \frac{1}{(w-z_0)} \cdot \Big[1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^2 + \ldots + \Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^{n+1} + \frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\Big]$$

$$= \frac{1}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(w-z_0)^3} + \ldots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n} + \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0^n(w-z)}$$

Nyt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)}dw + (z-z_0)\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw$$
$$+ (z-z_0)^2 \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^3}dw + \ldots + (z-z_0)^{n-1}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw$$
$$+ (z-z_0)^n \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}(w-z)}dw\Big].$$

Arvioidaan ylläolevaa summalausekkeen viimeistä termiä $w \in D_r(z_0) \quad \Rightarrow$ $|z-z_0|^n = r^n$.

f jatkuva käyrällä γ_r ja γ_r on kompakti, joten on olemassa $M > 0$ jolle $|f(w)| \le M \quad \forall w \in \gamma_r$.

$|w-z| \ge r - |z-z_0| \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{|w-z|} \le \dfrac{1}{r-|z-z_0|}$.

$$\Rightarrow \quad \Big|(z-z_0)^n \int_{\gamma_r} \tfrac{f(w)}{(w-z_0)^n(w-z)}dw\Big| \le |z-z_0|^n \int_{\gamma_r} \tfrac{|f(w)||dw|}{|w-z_0|^n|w-z|}$$
$$\le \frac{2\pi r M}{r-|z-z_0|^n} \cdot \Big(\Big|\frac{z-z_0}{r}\Big|^n\Big).$$

Koska $|z-z_0| < r \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n \to 0, n \to \infty$.

$\Rightarrow \quad f(z)$:lle on kehitelmä kiekossa $D_r(z_0) \quad f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, niin

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$$
$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$\square$

Seuraus 4.5. Alueessa A analyyttisillä funktioilla on A:n jokaisessa pisteessä kaikkien kertalukujen derivaatta. Tällöin

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Huomautus. Edellä kertoimet eivät riipu kiekon $D_r(z_0)$ säteestä.

Määritelmä 4.4. Siten f:lle pätee

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

Tämä on funktion f Taylor-kehitelmä pisteessä z_0 joka on voimassa kiekossa $D_r(z_0)$ (kehitelmä voi olla voimassa koko $\mathbb{C}$:ssä).

Esimerkki 13. $e^z \quad \Rightarrow \quad f'(z) = e^z, f^{(k)}(z) = e^z, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, \quad z_0 = 0$

$$e^z = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Esimerkki 14. $f(z) = \cos z \quad \Rightarrow f'(z) = -\sin z,$
$f(z) = \sin z \quad \Rightarrow f'(z) = \cos z.$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Lause 4.6. Yksikäsitteisyyslause:
Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio, jolle $f(z_n) = 0$ pistejoukossa $E = \{z_n\} \subset A$, jolle on kasaantumispiste $z' \in A$. Merkitään $D'_r(z') = D_r(z') \setminus \{z'\}$. Toisin sanoen $D'_r(z') \cap E \neq \emptyset \quad \forall r > 0$.

Tällöin $f(z) = 0 \quad \forall z \in A$.

Todistus. Olkoon z' E:n kasaantumispiste.

Koska f on analyyttinen A:ssa, ja $z' \in A$, niin f:llä on kehitelmä

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z')^k \text{ eräässä kiekossa } D_r(z_0).$$

Osoitetaan, että $a_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$
Jos löytyy kertoimia a_k, joille $a_k \neq 0$, valitaan näistä ensimmäinen. Olkoon tämä a_m. Siis $a_k = 0$ kun $k < m$.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z')^k = (z - z')^m \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z')^{k-m}$$
$$= (z - z')^m [a_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k (z - z')^{k-m}].$$

Merkitään $g(z) = a_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k (z - z')^{k-m}$.

Nyt $g'(z') = a_m \neq 0$, koska g on jatkuva.
$\Rightarrow$ On olemassa $\delta > 0$ siten että $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in D_\delta(z_0)$.
Koska $f(z) = (z - z')^m g(z) \quad \Rightarrow \quad f(z) \neq 0$ aina kun $z \in D'_\delta(z')$.
Mutta koska $E \cap D'_\delta(z') \neq \emptyset$ niin seuraa ristiriita.

Näin ollen $a_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$ ja $f(z) = 0 \quad \forall z \in D_r(z')$.

$\square$

Seuraus 4.7. Jos f ja g ovat alueessa A analyyttisiä funktioita joille $f(z) = g(z)$ joukossa $\{z_n\}$, jolle on kasaantumispiste Assa, niin

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in A.$$

Tämän tuloksen avulla voidaan määritellä funktion f analyyttinen jatkuminen.

Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio ja olkoon $E \subset A$ (Oletetaan, että E:llä kasaantumispiste A:ssa). Jos määritellään $f_0 : E \to \mathbb{C}$ asettamalla $f_0(z) = f(z), z \in E$.

Huomautus. Tällöin on olemassa z:n kasaantumispisteiden ympäristö, jossa f_0 on analyyttinen.

f on funktion $f_0 : D_r(z') \to \mathbb{C}$ analyyttinen jatke.

Esimerkki 15. Tunnetusti, jos $|z| < 1, (D_1(0)$, niin

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} = f_0(z) \text{ ja } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_0)^k}(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k = g(z),$$

sillä $\left|\dfrac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1$.

$g(z)$ on määritelty kiekossa $D_{|1-z_0|}(z_0)$.

$\Rightarrow \quad g$ on f:n analyyttinen jatke kiekossa $D_{|1-z_0|}(z_0)$, ja $g(z) = f(z)$
$z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Esimerkki 16. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Toisaalta $g(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

g on f:n jatke $\mathbb{C}$:hen ja analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.
Täten jatke g on yksikäsitteinen.

Vastaavat tulokset pätevät myös funktioille $f(x) = \sin x \Rightarrow g(z) = \sin z$ ja $f(x) = \cos x \Rightarrow g(z) = \cos z$, ovat ainoat analyyttiset yksikäsitteiset jatkeet.

4.4 Analyyttisen funktion nollakohdat

Määritelmä 4.5. Jos p on $\mathbb{C}$:n polynomi, toisin sanoen

$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, z \in \mathbb{C}.$

Jos $p(z_0) = 0 \quad \Rightarrow$

$p(z) = (z - z_0)p_1(z)$, missä p_1 on polynomi, jonka aste on $n - 1$.

Jos $p_1(z_0) = 0 \quad \Rightarrow p_1(z) = (z - z_0)p_2(z) \quad \Rightarrow (pz) = (z - z_0)^2 p_2(z)$
Jos $p(z) = (z - z_0)^k p_k(z)$ niin z_0 on $p(z)$:n k-kertainen nollakohta.

Tarkastellaan nyt vastaavaa tilannetta analyyttiselle funktiolle.
Olkoon f alueessa $A \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolle $f(z_0) = 0$ eräällä $z_0 \in A$.
Nyt f:llä on pisteessä z_0 kehitelmä

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Lause 4.8. Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio, jolle $f(z_0) = 0 \quad (z_0 \in A)$. Tällöin

$$f(z) = (z - z_0)g(z), \quad z \in A,$$

missä g on analyyttinen A:ssa.

Todistus. Kun $z \neq z_0$ asetetaan

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^k}{(z - z_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-1}$$

Jos tämä funktio on analyyttinen $A \setminus \{z_0\}$:ssa ja lisäksi $g(z_0) = a_1 = f'(z_0)$.

$$\Rightarrow \quad g(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-1}, & z \neq z_0 \\ a_1, & z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad g$ on analyyttinen A:ssa.

$\square$

Esimerkki 17. $f(z) = \sin z, \quad z \in \mathbb{C}$.
$f(0) = 0 \quad \Rightarrow f(z) = zg(z)$, missä g on analyytinen $\mathbb{C}$:ssä.

$$g(z) = 1 - \tfrac{z^2}{3!} + \tfrac{z^4}{5!} - \tfrac{z^6}{7!} + \dots$$

Esimerkki 18. Olkoon $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f$ analyyttinen $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:ssä ja koska $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1 = f(0)$

$\Rightarrow \quad f$ jatkuva 0:ssa $\quad \Rightarrow \quad f$ analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

Nyt f on funktion $\frac{\sin z}{z}, z \neq 0$ analyyttinen jatke $\mathbb{C}$:hen.

4.5 Funktion napa

Määritelmä 4.6. Olkoon A alue ja $z_0 \in A$. Jos f on alueessa $A \setminus \{z_0\}$ analyyttinen funktio, tällöin funktioille f on pisteessä $z = z_0$ n:nnen kertaluvun napa ($n \geq 1$), jos

$$\exists \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \text{ on olemassa ja } \neq 0 \text{ ja } \neq \infty.$$

$g(z) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |g(z)| = \infty$.

Esimerkki 19. $f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$.
Tällöin $z = 0$ on 1-kertainen napa, sillä $\lim\limits_{z \to 0} zf(z) = 1$.

Lause 4.9. Jos f:llä on pisteessä $z_0 \in A \quad n$:nnen kertaluvun napa, niin f voidaan esittää muodossa

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} + g(z), \text{ missä } g(z) \text{ on analyyttinen } A\text{:ssa.}$$

Todistus. Olkoon $\hat{f}$ funktio, jolle $\hat{f} = \begin{cases} (z - z_0) f(z), & \text{kun} z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) & \text{kun} z = z_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \hat{f}$ on analyyttinen $A \setminus \{z_0\}$:ssa ja jatkuva A:ssa.
$\Rightarrow \quad \hat{f}$ on analyyttinen A:ssa, siten $\exists$ kiekko $D_r(z_0) \subset A$.

$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, z \in D_r(z_0).$

Jos $z = z_0$, niin $f(z) = \dfrac{\hat{f}(z)}{(z-z_0)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n}$

$$\frac{\hat{f}(z)}{(z-z_0)^n} = \frac{a_0}{(z-z_0)^n} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z-z_0} + a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n}.$$

Valitaan $c_k = a_{n-k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$ ja $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n}$

g analyyttinen kiekossa $D_r(z_0) \quad \Rightarrow \quad g$ analyyttinen A:ssa.

$\square$

Huomautus. Summalauseketta $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{(z-z_0)^k}$ sanotaan f:n singulaari osaksi navassa z_0.

Esimerkki 20. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, jossa 0 on 2-kertainen napa.

$\lim_{|z| \to 0} z^2 f(z) = 1 \neq 0$ tai ∞.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}_{\text{singulaarinen}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}}_{\text{analyyttinen}}$$

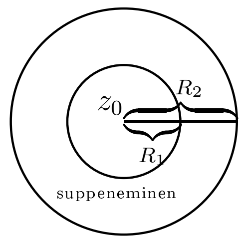
4.6 Funktion Laurent-kehitelmä

Määritelmä 4.7. Sarja $b_0 + b_1(z-z_0)^{-1} + b_2(z-z_0)^{-2} + \dots$
$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k$
Tämä sarja suppenee, kun

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < r \text{ jollain } r > 0, \quad z \neq z_0 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| > \tfrac{1}{r} = R.$$

Siis yllä oleva sarja suppenee kiekon $D_R(z_0)$ kiekon ulkopuolella.

Laurent sarjalla tarkoitetaan sarjaa



(1) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Tämä sarja voidaan jakaa kahdeksi sarjaksi

(2) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}.$$

Nyt jos (1):sen sarja suppenee niin siitä seuraa, että kumpikin (2):sen sarja suppenee. Tällöin (1) suppenee rengasalueessa $R_1 < |z-z_0| < R_2$, missä $R_1 < R_2$.

Esimerkki 21. Sarja $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{|k|!}$.

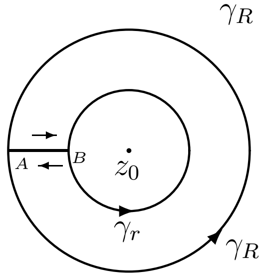
Nyt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{|-k|!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^k}{k!} = e^{\frac{1}{z}} - 1.$

Siten $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{|k|!} e^z + e^{\frac{1}{z}} - 1$ suppenee, kun $z \neq 0$ eli $0 < |z| < \infty$.

Huomautus. Olkoon nyt f rengasalueessa $r_0 < |z-z_0| < R_0$, missä $0 \leq r_0 < R_0 \leq \infty$. Pyritään määräämään f:n kehitelmä Laurent-sarjana alueessa $r_0 < |z-z_0| < R_0$.

Olkoot r ja $R > 0$, joille $r_0 < r < R < R_0$ (voi olla $r_0 = 0, R_0 = \infty$).

Merkitään
$$\begin{aligned} \gamma_r &= z_0 + re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi] \\ \gamma_R &= z_0 + Re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



Muodostetaan nyt suljettu paloittain säännöllinen käyrä γ asettamalla:

$\gamma = \gamma_R \cup AB \cup -\gamma_r \cup BA.$

Cauchy intergraalikaavasta seuraa $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int\limits_{AB} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int\limits_{-\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw + \int\limits_{BA} \frac{f(w)}{w-z}dw\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw\Big). \end{aligned}$$

Nyt $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, missä

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw \text{ (Taylor kehitelmä).}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(w-z_0^{k+1}}{(z-z_0)^k} + \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n(z-w)} \quad || \cdot \frac{1}{2\pi i}f(w) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + R_n(z),$$

missä $\displaystyle a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(w)(w-z_0)^{k-1}dw, \quad k = 1, 2, \ldots,$ ja

$$|R_n(z)| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)(w-z)^n}{(z-z_0^n(z-w)}dw\Big|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r} \frac{|f(w)|}{(|z-z_0|-r)} \cdot \frac{r^n}{|z-z_0|^n}|dw|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r} \frac{M_r}{(|z-z_0|-r)} \Big(\frac{r}{|z-z_0|}\Big)^n |dw|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{M_r 2\pi r}{(|z-z_0|-r)}\Big(\frac{r}{|z-z_0|}\Big)^n \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Edellä $M_r = \max_{w\in\gamma_r} |f(w)|$.
Tämä maksimi on olemassa, koska f on jatkuva γ_r:llä, ja γ_r on kompakti.

$\Rightarrow \quad |R_n(z)| \to 0$, kun $n \to \infty$
$\Rightarrow \quad R_n(z) \to 0$, kun $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\frac{1}{(z-z_0)^k} \quad \text{suppenee.}$$

Nähdään, että ympyrän renkaassa $r < |z-z_0| < R$ on voimassa molemmat sarjakehitelmät.

Tämä kehitelmä on yksikäsitteinen, sillä jos on olemassa lisäksi

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0), \text{ niin}$$

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^{k-n-1}.$$

Jos $\gamma_\rho = z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow$

$$2\pi i a_n = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \int_{\gamma_\rho} \sum_{k=-\infty}^{infty} b_k(z-z_0)^{k-n-1}dw$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_\rho} b_k(w-z_0)^{k-n-1}dw = 2\pi i b_n$$

$\Rightarrow \quad b_n = a_n$

Usein oletetaan, että f on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z_0\}$.
$\Rightarrow$ suppenemisalue $0 < |z-z_0| < d$, jossa $d = \inf\{|z-z_0| \quad |z \in \delta A\}$.

4.7 Funktion erikoispisteistö (singulaaripisteistö)

Määritelmä 4.8. Olkoon f funktio, joka on analyyttinen alueessa $A \setminus \{z_0\}$, mutta ei pisteessä z_0. Tällöin z_0 on f:n singulaaripiste (erikoispiste).

Jos on olemassa $\delta > 0$, jolle $f$llä ei ole muita erikoispisteitä kiekossa $D_\delta(z_0)$ kuin z_0. Tällöin z_0 on f:n eristetty (isoloitu) singulaaripiste.

Jos nyt f on rajoitettu kiekossa $D_\delta(z)$ niin z_0 on f:n näennäinen singulaaripiste.

Tällöin f:n Laurent-sarjassa termien $(z - z_0)^k, k = -1, -2, -3, \ldots$ kertoimet a_k ovat kaikki nollia. Josta seuraa, että Laurent-kehitelmä on sama kuin Taylor-kehitelmä.

Jos z_0 on n-kertoiminen napa, niin

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} + g(z),$$

missä $g(z)$ on analyyttinen osa. Siis

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

Tämä on funktion f Laurent-kehitelmä.

Jos f:n Laurent-kehitelmässä on ääretön määrä $(z - z_0)$:n negatiivisia potensseja, niin z_0 on f:n oleellinen singulaaripiste.

Esimerkki 22. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$, jossa 0 on f:n erikoispiste.

Nyt $\lim\limits_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} e^z = 1 \neq 0 \neq \infty \quad \Rightarrow \quad$ 0 on 4-kertainen napa.

Nyt $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$.

Kun $z \neq 0$, niin $\dfrac{e^z}{z^4} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{k-4}}{k!} = \dfrac{1}{z^4} + \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z} + \sum\limits_{k=4}^{\infty} \dfrac{1}{k!} z^{k-4}$.

Tämä on f:n Laurent-kehitelmä alueessa $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Esimerkki 23. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, jossa $z_0 = 1$ on 3-kertainen napa.

Merkitään $z - 1 = u, \quad z = u + 1, \quad e^{2z} = e^{2u}e^2$.

Nyt

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2 e^{2u}}{u^3} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2u)^k}{k!}\frac{1}{u^3} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} u^{k-3}$$

$$= e^2 \frac{1}{(z-1)^3} + 2e^2 \frac{1}{(z-1)^2} + 2e^2 \frac{1}{(z-1)} + \sum_{k=3}^{\infty} e^2 \frac{2^k}{k!}(z-1)^{k-3}$$

Tämä on f:n Laurent-kehitelmä.

Esimerkki 24. Määärää funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ Laurent-kehitelmä, kun

a) $1 < |z| < 3$ b) $|z| > 3$

a) Nyt $\dfrac{1}{(z+1)(z+3)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+3}$ jossa

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{z})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2}\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2} z^{-k-1},$$

ja

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot 3^{k+1}} z^k$$

Siis

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^k z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2\cdot 3^{k+1}} z^k$$

on funktion Laurent-kehitelmä, kun $1 < |z| < 3$.

b) $|z| > 3$.

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^k z^{-(k+1)}$$

ja $\displaystyle \frac{1}{2}\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(-\frac{3}{z}\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2}3^k z^{-(k+1)}$

Siis

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2}z^{-(k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2}3^k z^{-(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}3^k\Big)z^{-(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}3^k\Big)z^{-(k+1)} \end{aligned}$$

Tämä on funktion Laurent-kehitelmä, kun $|z| > 3$.

Luku 5

Residyn lause ja sovelluksia

Määritelmä 5.1. Olkoon f funktio, joka on analyyttinen joukossa $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Tällöin kerrointa a_{-1} sanotaan f:n residyksi pisteessä $z = z_0$.
Merkitään $(z_0)_{-1}$.

Lause 5.1. Residyn lause:
Olkoon f suljetun (paloittain) säännöllisen käyrän rajaamassa alueessa määritelty funktio, joka on analyyttinen yllä olavassa alueessa paitsi lukuunottamatta singulaaripisteitä $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (voi olla myös ääretön määrä, oletetaan kuitenkin äärellinen).

Tällöin $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i((z_1)_{-1} + (z_2)_{-1} + \ldots + (z_n)_{-1})$

Todistus. Olkoon γ_i z_i-keskinen ympyrä ja oletetaan, että $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{-1+1}} dz = (z_k)_{-1} \quad \forall k = 1, 2, \ldots.$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i((z_1)_{-1} + \ldots + (z_n)_{-1})\text{-}$$

$\square$

5.1 Residyjen laskeminen

z_0 on 1-kertainen napa:

$$\Rightarrow \quad (z_0)_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z).$$

z_0 on n-kertainen napa:

$$\Rightarrow \quad (z_0)_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_0)^n f(z))$$

Todistus.
$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad (z-z_0)^n f(z) &= a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1}\\ &\quad + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \ldots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_0)^n f(z)) = a_{-1}(n-1)! + C[(z-z_0)] \to a_{-1} \text{ kun } z \to z_0.$$

$\Rightarrow$ Väite.

$\square$

Esimerkki 25. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2} = \dfrac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{z^2} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{3!} + \dfrac{z^3}{5!} - \ldots$

$z_0 = 0$ on 1-kertainen napa, ja $\lim_{z\to 0} z\dfrac{\sin z}{z^2} = 1$.

Esimerkki 26. $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} = \dfrac{z^2-2z}{(z+i)(z+2i)(z-2i)}$, jolle

$z_0 = -1$ on 2-kertainen napa,
$z_1 = 2i$ on 1-kertainen napa,
$z_2 = -2i$ on 1-kertainen napa.

$$\begin{aligned}(-1)_{-1} &= \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\frac{((z^2+1)(z^2-2z))}{(z^2+1)(z^2+4)}\\ &= \lim_{z\to -1} \frac{(2z-2)(z^2+4) - 2z(z^2-2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{15}.\end{aligned}$$

$$(2i)_{-1} = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)(z^2-2z)}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2\cdot 4i} = \frac{-i+1}{-3+4i} = \frac{7+i}{25}.$$

$$(-2i)_{-1} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)(z^2-2z)}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{7-i}{25}.$$

Esimerkki 27. $f(z) = \dfrac{e^z}{1-\cos z}$

$z=0$ on f:n napa. Sen kertaluku kertaluku:

Nyt $\displaystyle \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{\underbrace{\left(\frac{1-\cos z}{z}\right)}_{\to 0}}$, kun $z\to 0$.

$\left|\dfrac{ze^z}{1-\cos z}\right| \to \infty$, kun $z\to 0 \quad \Rightarrow \quad 0$:n kertaluku ≥ 2.

$$\lim_{z\to 0} z^2\frac{e^z}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{\underbrace{\left(\frac{1-\cos z}{z^2}\right)}_{\to\frac{1}{2}}} = 2 \neq 0 \neq \infty.$$

Lisäksi $\lim\limits_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} z(\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)) = 0\cdot 2 = 0$

$\Rightarrow \quad$ Navan $z=0$ kertaluku on 2.

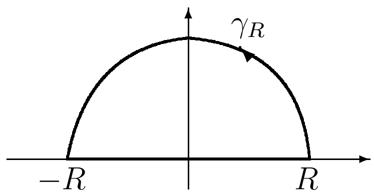
$$(0)_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2e^z}{1-\cos z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{(2ze^z + z^2e^z)(1-\cos z) - (\sin z)(e^z z^2)}{(1-\cos z)^2}$$
$$= \lim_{z\to 0} e^z \frac{[(2z+z^2)(1-\cos z) - z^2\sin z]}{(1-\cos z)}.$$

Nyt jos merkitään $[z^k]$:llä cos:inia ja sin:inia vastaavia summia k:sta eteenpäin, $\dfrac{z^k}{k!} \pm \dfrac{z^{k+2}}{(k+2)!} \pm \ldots$. Nyt

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{(2z+z^2)(\frac{z^2}{2} + [z^4]) - z^2(z - \frac{z^3}{6} + [z^4])}{(\frac{z^2}{2} + [z^4])^2}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{z^3 + \frac{z^4}{2} + [z^5] - z^3 + \frac{z^5}{6} + [z^7]}{z^4(\frac{1}{2} + [z^2])^2}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{2} + [z] + \frac{1}{6}z + [z^3]}{(\frac{1}{2} + [z^2])^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$$

5.2 Residy-laskennan sovelluksia määritettyjen integraalien laskemiseen

Olkoon F funktio, jolle $|F(z)| < \frac{M}{R^k}$ $\quad \forall z = Re^{it}, t \in [0, \pi]$, missä $k > 1$.



Tällöin $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} F(z)dz = 0.$

$$\Big|\int_{\gamma_R} F(z)dz\Big| \le \int_{\gamma_R} |F(z)||dz| \le \int_{\gamma_R} \frac{M}{R^k}|dz| = \frac{M}{R^k}\int_{\gamma_R} |dz|$$
$$= \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{M\pi}{R^{k-1}} \longrightarrow 0, \text{ kun } R \to \infty \text{ ja } k > 1.$$

Tätä tulosta voidaan käyttää hyväksi eräiden epäoleellisten integraalien laskemisessa.

Esimerkki 28. Laske integraali $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx.$

Olkoon γ suljettu käyrä $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$. Olkoon A_γ $\quad\gamma$:n rajaama alue. Olkoon $F(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$.

$$\int_\gamma F(z)dz = ?$$

Funktiolle $F(z)$ on 1-kertaiset navat $z = i$ ja $z = -i$ joista $z = i$ on alueessa A_γ (jos $R > 1$).

Residyn lause sanoo:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz = 2\pi i((i)_{-1}).$$

$$(i)_{-1} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz = 2\pi i\frac{1}{2i} = \pi.$$

$$\Rightarrow \quad \pi = \int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1}dz.$$

Ja $\quad \Big|\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz\Big| = \int_{\gamma_R} \Big|\frac{1}{z^2+1}\Big||dz| = \int_{\gamma_R} \frac{1}{|R^2e^{i2t}+1|}|dz| \longrightarrow 0.$

$$\Rightarrow \quad \pi = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_R}\frac{1}{z^2+1}dz\Big) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx + 0 = 2\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx.$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Huomautus. Voidaan laskea myös

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{M\to\infty}\Big|_0^M \arctan x = \lim_{M\to\infty}\arctan M = \frac{\pi}{2}.$$

Esimerkki 29. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx = ?$

$F(z) = \dfrac{1}{z^4+1} \qquad \gamma = [-R,R]\cup\gamma_R$, kuten edellä.

$z^4+1=0 \quad \Rightarrow \quad z^4 = -1 = e^{i(\pi+k2\pi)}$

$z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4})} \quad k = 0,1,2,3$ eri ratkaisua.

Näistä z_0 ja z_1 kuuluvat A_γ:aan. Nyt

$$\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i((z_0)_{-1} + (z_1)_{-1}).$$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi}.$

$$(z_0)_{-1} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-e^{i\frac{3}{4}\pi})}{z^4+1} = \frac{"0"}{0} \overset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{3}{4}}.$$

$$(z_1)_{-1} = \lim_{z\to z_1}\frac{z-e^{i\frac{3}{4}\pi}}{z^4+1} = \frac{"0"}{0} \overset{\text{L'Hosp}}{=} \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{9}{4}}.$$

$$
\begin{aligned}
(z_0)_{-1}+(z_1)_{-1} &= \frac{1}{4}(e^{-i\frac{3}{4}\pi}+e^{-i\frac{9}{4}\pi}) = \frac{1}{4}(\cos\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{9}{4}\pi - i(\sin\frac{3}{4}\pi+\sin\frac{9}{4}\pi))\\
&= \frac{1}{4}(\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}-i(\sin\frac{3}{4}\pi+\sin\frac{\pi}{4})\\
&= \frac{1}{4}(\cos\pi(-\cos\frac{\pi}{4})+\cos\pi 4 - i(-\cos\pi\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}))\\
&= \frac{1}{4}(-i2\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}(-i2\frac{\sqrt{2}}{2}) = -i\sqrt{2}\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i(-i\frac{\sqrt{2}}{4}) = -i^2\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.
$$

$$
\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \int_\gamma \frac{1}{z^4+1}fz = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}dx + \int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}dz\Big).
$$

Nyt kun merkitään $\quad z = Re^{it}, t\in[0,\pi]$.

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}dz\Big| &\le \int_{\gamma_R}\Big|\frac{1}{z^4+1}\Big||dz| \le \int_{\gamma_R}\Big|\frac{1}{R^4e^{i4t}}\Big||dz|\\
&\le \int_{\gamma_R}\Big|\frac{1}{R^4-1}\Big||dz| \le \frac{1}{R^4-1}\pi R \le \frac{2}{R^4}\pi R = \frac{2\pi}{R^3}\to 0.
\end{aligned}
$$

$$
\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx + 0 \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
$$

$$
\Rightarrow\quad \int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
$$

Huomautus. Otetaan muotoa $\int_0^{2\pi} R(\sin t,\cos t)dt = I$ oleva integraali. ($R(\sin t,\cos t)$ on rationaaline lauseke $\sin t$:stä ja $\cos t$:stä.)

Sijoittamalla $z = e^{it}, t\in[0,2\pi]$, saadaan

$$
\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i},
$$

$$
\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2},
$$

$$
dz = ie^{it}dt = izdt \quad dt = \frac{1}{iz}dz.
$$

$$
I = \int_\gamma R(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{1}{iz}dz, \quad \text{jossa } \gamma = \{e^it | t\in[0,2\pi]\}.
$$

Tämä on rationaalifunktion integraali z:n suhteen: $\dfrac{p_1(z)}{p_2(z)}$.

$I = 2\pi i \sum\limits_{z_k \in D_1(0)} (z_k)_{-1}$, missä z_k on 1-ympyrän sisäpiste ja $\frac{p_1(z)}{p_2(z)}$:n napa.

Esimerkki 30. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t}$, johon nyt sijoitetaan $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

$$I = \int_\gamma \frac{\frac{1}{iz}dz}{3 + \frac{2(z+\frac{1}{z})}{2i}} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{1}{z}\frac{dz}{\frac{6i+2z-\frac{2}{z}}{2i}} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{\frac{z(2z^2+6iz-2)}{2zi}}$$
$$= 2\int_\gamma \frac{dz}{2z^2+6iz-2}.$$

Navat $2z^2 + 6iz - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-6i \pm \sqrt{-36+16}}{4} = \frac{-6i \pm \sqrt{-20}}{4} = \frac{-6i \pm 2\sqrt{5}i}{4} = \frac{-3i \pm \sqrt{5}i}{2}.$$

$$z_0 = \frac{-3ii\sqrt{5}i}{2} \in D_1(0).$$

$$(z_0)_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{2z^2+6iz-2} \overset{\text{L'Hosp}}{=} lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z+6i} = \frac{1}{4z_0+6i}$$
$$= \frac{1}{-6i+2i\sqrt{5}+6i} = \frac{1}{2i\sqrt{5}}.$$

$$I = 2\int_\gamma \frac{1}{2z^2+6iz-2}dz = 2\cdot 2\pi i((z_0)_{-1}) = 4\pi i\frac{1}{2i\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Huomautus. Tarkastellaan muotoa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$, missä $g(x)$ on $\cos ax$ tai $\sin ax$ ja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ olevaa intergraalia. Nyt

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^k} \text{ jollain } k > 0 \text{ ja } \forall z = Re^{it}, t \in [0, \pi].$$

Tällöin $I_R = \displaystyle\int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)dz \to 0$, kun $R \to \infty$.

$$|I_R| = \Big|\int_0^\pi e^{iaRe^{it}}f(Re^{it})iRe^{it}dt\Big| \le \int_0^\pi \Big|e^{iaRe^{it}}\Big||f(Re^{it})|Rdt$$

$$\le \int_0^\pi \left|e^{iaR\cos t - aR\sin t}\right| \frac{M}{R^k} R dt = \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi \underbrace{\left|e^{iaR\cos t}\right|}_{=1} \left|e^{-aR\sin t}\right| dt$$

$$= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-aR\sin t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t} dt$$

$$\le \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2a}{\pi}Rt} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2aR} e^{-\frac{2a}{\pi}Rt}$$

$$= \frac{M}{R^k}\Big(- e^{-\frac{2a}{\pi}R\frac{\pi}{2}} + 1\Big) \longrightarrow 0, \text{ kun } R \to \infty.$$

Esimerkki 31. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx \quad a \in \mathbb{R}, a > 0, R > 0.$

Olkoon $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R, \gamma_R = Re^{it}, t \in [0, \pi]$.

$f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$, ja jos $x \in \mathbb{R}$, niin

$f(x) = \dfrac{e^{iax}}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}(\cos ax + i \sin ax)$

Nyt f:n navat $z^2+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = i$ tai $z = -i$, joista i on γ:n rajaamassa alueessa.

$\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i (i)_{-1}.$

$(i)_{-1} = \displaystyle\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iaz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-a}}{2i}$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}.$

$\pi e^{-a} = \displaystyle\lim_{R\to\infty}(\pi e^{-a}) = \lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_{-R}^R \frac{e^{iax}}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_R}\frac{e^{iax}}{z^2+1}dz\Big).$

$g(z) = \dfrac{1}{z^2+1} \quad z = Re^{it},$

$|g(z)| \le \dfrac{1}{R^2-1} \le \dfrac{2}{R^2}.$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$, kun $R \to \infty$.

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{x^2+1}dx + 0 = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax + i\sin ac}{x^2+1}dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+1} dx$$

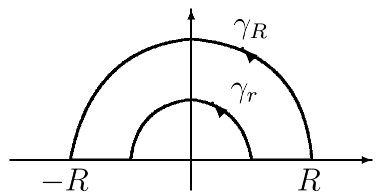
$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \pi e^{-a} \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+1} dx = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Esimerkki 32.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx,$$

$\gamma = [-R, -r] \cup -\gamma_r \cup [r, R] \cup \gamma_R$.



$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$, joka on analyyttinen A_γ:ssa, joten $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Toisaalta

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\gamma f(z)dz = & \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\gamma_r} f(z)dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz \\ = & \quad I_1 \quad + I_2 \quad + I_3 \quad + I_4. \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \text{ (sijoitetaan } x = -t, dx = -dt) \\ &= \int_R^r \frac{e^{-it}}{-t}(-dt) = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx. \end{aligned}$$

$$I_1 + I_3 = \int_r^R \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{x} dx = \int_r^R \frac{2i \sin x}{x} dx.$$

$$I_2 = \int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} ire^{it} dt = -i \int_0^\pi e^{ire^{it}} dt.$$

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} f(z)dz = \lim_{r\to 0^+} -i \int_0^\infty e^{ire^{it}} dt = -i \int_0^\pi \lim_{r\to 0^+} e^{ire^{it}} dt = -i \int_0^\pi dt = -\pi i.$$

Nyt

$$0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_1 - \pi i + I_3 + 0 \longrightarrow 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dz - \pi i, \text{kun } R \to \infty.$$

$$\Rightarrow \quad 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$