I LINEAARISET YHTÄLÖRYHMÄT

1. Lineaarinen yhtälöryhmä ja matriisi

Tällä kurssilla käytämme kirjainta K tarkoittamaan reaalilukuja $\mathbb{R}$, kompleksilukuja $\mathbb{C}$ tai rationaalilukuja $\mathbb{Q}$ (aluksi $K = \mathbb{R}$). Nämä lukujoukot ovat *kuntia*, mikä tarkoittaa sitä, että neljä peruslaskutoimitusta ovat määriteltyjä ja noudattavat tavallisia lukujen laskusääntöjä.

Lineaarialgebrassa joudutaan jatkuvasti tekemisiin lineaaristen yhtälöiden ja yhtälöryhmien kanssa. Muuttujien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *lineaarinen yhtälö* on muotoa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

missä a_j, b ovat annettuja kunnan K lukuja. Vastaavasti yleinen *lineaarinen yhtälöryhmä* on muotoa

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

missä $a_{ij}, b_i \in K$. Kunnan K luvut $s_1, s_2, \ldots, s_n$ muodostavat yhtälöryhmän (1) *ratkaisun*, jos jokainen ryhmän (1) yhtälö toteutuu, kun $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. Yhtälöryhmän ratkaisemisella tarkoitetaan sen kaikkia ratkaisujen, ns. *ratkaisujoukon*, määrittämistä. Yleensä ratkaisuja on yksi, äärettömän monta tai ei yhtään.

Yhtälöryhmien tarkastelu on helpointa *matriisien* avulla. Kunnan K alkioista a_{ij} muodostettua kaaviota

$$\text{(2)} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sanotaan *lajia* $m \times n$ olevaksi matriisiksi tai $m \times n$-matriisiksi. Usein merkitään $A = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij})$. Tämän matriisin *vaakavektorit* (tai *vaakarivit*) ovat

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

ja *pystyvektorit* (tai *sarakkeet*) vastaavasti

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Matriisia (2) sanotaan yhtälöryhmän (1) *kerroinmatriisiksi.* Täydentämällä tätä matriisia vakioista $b_1, b_2, \ldots, b_m$ koostuvalla sarakkeella

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

saadaan yhtälöryhmän (1) *täydennetty kerroinmatriisi*

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} = (a_{ij}, b_i).$$

2. Gaussin eliminointimenetelmä

Esitämme seuraavassa *Gaussin eliminointimenetelmän*, jolla lineaarinen yhtälöryhmä saadaan ratkaistua. Tarkastelemme aluksi esimerkkiä.

Esimerkki. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \end{cases}$$

jonka täydennetty kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisemme yhtälöryhmän muuntamalla sen yhtäpitävää muotoon, josta ratkaisu saadaan. Vieressä on aina vastaava täydennetty kerroinmatriisi.

Lisätään toiseen yhtälöön ensimmäinen luvulla -3 kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = -12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lisätään kolmanteen yhtälöön ensimmäinen luvulla -2 kerrottuna:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = -12 \\ \quad -7x_2 - 7x_3 = -14, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix}.$$

Vähennetään toinen yhtälö kolmannesta:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = -12 \\ \qquad\quad -2x_3 = -2, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nyt saamme kolmannesta yhtälöstä $x_3 = 1$, sen jälkeen sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön $x_2 = 1$, ja sitten sijoittamalla nämä arvot ensimmäiseen yhtälöön $x_1 = -2$. Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Olkoot nyt

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ja

$$(1') \qquad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

yhtälöryhmiä, joiden täydennetyt kerroinmatriisit ovat (A, B) ja (C, D). Edellisessä esimerkissä käytettiin ns. *elementaarisia (vaakarivi)muunnoksia.* Sanotaan, että yhtälöryhmä (1') on saatu ryhmästä (1) elementaarisella muunnoksella, joka on tyyppiä:

I (vaihto), jos yhtälöryhmien (1) ja (1') yhtälöt ovat muuten samat, mutta yhtälöt r ja s ovat vaihtaneet paikkaansa. Täydennetyssä kerroinmatriisissa rivit r ja s ovat vaihtaneet paikkaansa.

II (skaalaus), jos yhtälöryhmien (1) ja (1') yhtälöt ovat muuten samat, mutta ryhmän (1') yhtälö r on saatu kertomalla ryhmän (1) yhtälö r jollakin *nollasta eroavalla* luvulla $e \in K$. Yhtälöryhmän (1') täydennetyn kerroinmatriisin rivi r on $e\times$ ryhmän (1) täydennetyn kerroinmatriisin rivi r.

III (korvaus), jos yhtälöryhmien (1) ja (1') rivin ovat muuten samat, mutta ryhmän (1') yhtälö r on saatu lisäämällä ryhmän (1) yhtälöön r ryhmän (1) yhtälö s kerrottuna eräällä luvulla $e \in K$, ts. $c_{rj} = a_{rj} + ea_{sj}, d_r = b_r + eb_s$. Yhtälöryhmän (1') täydennetyn kerroinmatriisin rivi r on ryhmän (1) täydennetyn kerroinmatriisin rivi r lisättynä e kertaa rivi s.

Määritelmä. Yhtälöryhmiä (1) ja (1') sanotaan *ekvivalenteiksi*, jos ryhmä (1') saadaan ryhmästä (1) äärellisen monella elementaarisella muunnoksella. Tätä merkitään (1) $\sim$ (1'). Vastaavia täydennettyjä kerroinmatriiseja sanotaan myös ekvivalenteiksi ja tätä merkitään $(A, B) \sim (C, D)$.

Lause 2.1. Ekvivalenteilla yhtälöryhmillä on samat ratkaisut.

Tod. Riittää osoittaa, että yhtälöryhmäillä (1) ja (1') on samat ratkaisut, jos (1') on saatu ryhmästä (1) tyyppiä III olevalla muunnoksella (tyypit I ja II selviä). Olkoon $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yhtälöryhmän (1) ratkaisu. Se on myös ryhmän (1') ratkaisu, jos

$$c_{r1}s_1 + c_{r2}s_2 + \cdots + c_{rn}s_n = d_r,$$

missä $c_{rj} = a_{rj} + ea_{sj}, d_r = b_r + eb_s$. Tämä yhtälö pätee, koska

$$c_{r1}s_1 + c_{r2}s_2 + \cdots + c_{rn}s_n$$

$$= a_{r1}s_1 + a_{r2}s_2 + \cdots + a_{rn}s_n + e(a_{s1}s_1 + a_{s2}s_2 + \cdots + a_{sn}s_n)$$

$$= b_r + eb_s = d_r.$$

Vastaavasti jokainen yhtälöryhän (1') ratkaisu on myös ryhmän (1) ratkaisu (totea!). Jos ryhmällä (1) ei ole ratkaisua, ei sitä voi olla myöskään ryhmällä (1') (ryhmän (1') ratkaisu olisi myös ryhmän (1) ratkaisu) ja kääntäen. mot

Esitetään nyt menettely, jolla yhtälöryhmä (1) saadaan sellaiseen ekvivalenttiin muotoon, mistä ratkaisu on helposti nähtävissä (mikäli on olemassa). Tämä ns. Gaussin eliminointimenettely perustuu täydennetyssä kerroinmatriisissa (A, B) suoritettaviin elementaarisiin vaakarivimuunnoksiin.

Rajoituksetta voidaan olettaa, että ainakin yksi ensimmäisen sarakkeen alkioista a_{i1} on $\neq 0$ (muutoin x_1 ei esiinny yhtälöryhmässä (1)). Jos $a_{11} = 0$, niin suoritetaan sellainen tyyppiä(I) oleva muunnos, että ensimmäisen rivin ensimmäinen alkio tulee nollasta eroavaksi, olkoon se a'_{11}. Tämän jälkeen vähennetään kullakin arvolla $i = 2, 3, 4, \ldots, m$ rivistä i ensimmäinen rivi sellaisella vakiolla kerrottuna, että rivin i ensimmäiseksi alkioksi jää 0. (Tämä on tyyppiä (III) oleva elementaarinen vaakarivimuunnos.)
Näin täydennetty kerroinmatriisi saadaan ekvivalenttiin muotoon

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1k} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ & & a'_{2k} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a'_{mk} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix},$$

missä $k \geq 2$ on pienin sellainen indeksi, että muuttujan x_k kerroin a'_{ik} on $\neq 0$ jollakin riveistä $i = 2, 3, \ldots, m$. Pidetään nyt ensimmäinen rivi muuttumattomana ja tehdään ym tarkastelu uudelleen riveille $2, \ldots, m$ (ensimmäisen sarakkeen sijasta tarkastellaan saraketta k), jolloin päästään muotoon

$$\sim \cdots \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1k} & \ldots & a'_{1l} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ & & a''_{2k} & \ldots & a''_{2l} & \ldots & a''_{2n} & b''_2 \\ & & & & a''_{3l} & \ldots & a'_{3n} & b''_3 \\ & 0 & & & \vdots & \ldots & & \\ & & & & a''_{ml} & \ldots & a'_{mn} & b''_m \end{pmatrix},$$

missä $a''_{2k} \neq 0$ ja $l > k$. Näin jatkamalla päästään äärellisen monen elementaarimuunnoksen jälkeen ns. porrasmuotoon

$$\sim \cdots \sim \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & & & & & c_{1n} & d_1 \\ & c_{2k} & \ldots & & & & c_{2n} & d_2 \\ & & c_{3l} & \ldots & & & c_{3n} & d_3 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & c_{rs} & \ldots & c_{rn} & d_r \\ & & & & 0 & & 0 & d_{r+1} \\ & & & \ldots & 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & & \ldots & & & & \\ & & & \ldots & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

missä $c_{11}, c_{2k}, c_{3l}, \ldots, c_{rs}$ ovat kaikki $\neq 0$ ja $1 < k < l < \cdots < s \leq n$, $r \leq m$ ja porraskuvion alapuolella on pelkästään nollia. Jos $d_{r+1} \neq 0$, niin viimeiseltä sarakkeelta tulee vielä uusi porras.

Ylläolevan nojalla on voimassa:

Lause 2.2. Jokainen yhtälöryhmä (1) on ekvivalenttinen porrasmuodossa olevan yhtälöryhmän

$$(2) \qquad \begin{cases} c_{11}x_1 + \ldots + \qquad\qquad\qquad\qquad c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2k}x_k + \ldots + \qquad\qquad\qquad c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad c_{3l}x_l + \ldots \quad + \qquad\quad c_{3n}x_n = d_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rs}x_s + \ldots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

kanssa, missä $c_{11} \neq 0$, $c_{2k} \neq 0, \ldots, c_{rs} \neq 0$, $1 < k < l < \cdots < s \leq n$, $r \leq m$ (jos $r = m$, niin viimeisiä yhtälöitä ei ole).

Määritelmä. Yllä muuttujia $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$ sanotaan *päämuuttujiksi* ja muita muuttujia (jos niitä on olemassa) *vapaiksi muuttujiksi.* Edellä päämuuttujia on r kappaletta ja vapaita muuttujia $n - r$ kappaletta.

Lause 2.3. Yhtälöryhmällä (1) on ratkaisuja jos ja vain jos $d_{r+1} = 0$. Tällöin ratkai- suissa vapaille muuttujille voidaan antaa mielivaltaisia arvoja $\in K$, jonka jälkeen päämuuttujat määräytyvät yksikäsitteisesti.

Seuraus. Jos $r = n$ ja (1) on ratkeava, niin sillä on yksikäsitteinen ratkaisu, sillä vapaita muuttujia ei ole.

Lauseen 2.3 tod. Jos $d_{r+1} \neq 0$, yhtälöryhmässä (2) on yhtälö $0 = d_{r+1}$, joka ei toteudu millään muuttujien arvoilla. Lauseen 2.1 mukaan yhtälöryhällä (1) ei tällöin ole ratkaisua.

Jos $d_{r+1} = 0$, annetaan vapaille muuttujille (jos niitä on) mielivaltaiset arvot $\in K$. Tällöin ryhmän (2) alin yhtälö tulee muotoon $c_{rs}x_s = b \in K$, mistä saadaan $x_s = b/c_{rs} \in K$ (tarvitaan tietoa $c_{rs} \neq 0$). Sijoittamalla tämä arvo ryhmän (2) muihin yhtälöihin ja jakamalla samalla tavoin saadaan näin takaisinsijoituksilla peräkkäin ratkaistua $x_s, \ldots, x_l, x_k, x_1$. mot

Määritelmä. Yhtälöryhmää (1) sanotaan *homogeeniseksi*, jos $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Homogeenisille yhtälöryhmille (1) pätee

Lause 2.4. Homogeeninen yhtälöryhmä on aina ratkeava. Jos $r = n$, niin on olemassa vain *triviaali* ratkaisu $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Jos $r < n$, niin on olemassa myös epätriviaaleja ratkaisuja.

Tod. Homogeenisen yhtälöryhmän tapauksessa edellä $d_1 = d_2 = \cdots\ d_r = d_{r+1} = 0$, joten yhtälöryhmä on ratkeava Lauseen 2.3. nojalla. Jos $r = n$, niin kaikki muuttujat ovat päämuuttujia ja yhtälöryhmästä (2) saadaan takaisinsijoituksilla $x_n = 0,\ x_{n-1} = 0, \ldots,\ x_1 = 0$. Jos taas $r < n$, niin vapaita muuttujia löytyy ja niille voidaan antaa nollasta eroavia arvoja. mot

Huomautus. Koska $r \leq m$, niin Lauseen 2.4. nojalla homogeenisella yhtälöryhmällä on epätriviaaleja ratkaisuja aina, kun tuntemattomien lukumäärä n on suurempi kuin yhtälöiden lukumäärä m.

Yhtälöryhmä (1) ratkaistaan käytännössä seuraavasti:

1) Muunnetaan täydennetty kerroinmatriisi (A, B) elementaarisilla vaakarivimunnoksilla porrasmuotoon (C, D).

2) Kirjoitetaan porrasmuotoa (C, D) vastaava yhtälöryhmä (2).

3) Ratkaistaan (2) takaisinsijoituksilla (esitetään päämuuttujat vapaiden muuttujien avulla), jos (1) on ratkeava.

Vaihetta (3) ei tarvita, jos porrasmuodosta (C, D) jatketaan vaiheessa 1) ns. *pelkistettyyn* porrasmuotoon seuraavasti: Skaalauksella muunnetaan kaikki *porraspaikoilla* olevat alkiot $c_{11}, c_{2k}, \ldots, c_{rs}$ alkioiksi 1 ja sen jälkeen korvauksilla kaikki näiden ykkösten yläpuoliset alkiot nolliksi. Pelkistetyssä porrasmuodossa on siis porrassarakkeilla porraspaikalla 1 ja muut alkiot ovat 0.

Esimerkkejä.

Matriisin porrasmuoto ei ole yksikäsitteinen. Porrasrivien lukumäärä ja porraspaikkojen sijainti ovat kuitenkin aina samat. Matriisin pelkistetty porrasmuoto on yksikäsitteinen, kuten myöhemmin osoitamme.

Määritelmä. Matriisin A *asteeksi* kutsutaan matriisin A kanssa ekvivalenttisen porrasmuotoisen matriisin porrasrivien lukumäärää (joka on sama kuin porrassarakkeiden lukumäärä). Asteelle käytetään merkintää rank A.

Lauseesta 2.3. ja sen seurauksesta saadaan seuraava yhteys yhtälöryhmä ratkeavuuden ja sen kerroinmatriisin asteen välille.

Lause 2.5. Lineaarinen yhtälöryhmä (1) ratkeaa jos ja vain jos rank $A =$ rank (A, B). Edelleen ratkaisu on yksikäsitteinen jos ja vain jos tuntemattomien lukumäärä $n =$ rank $A =$ rank (A, B).

II K^n, LINEAARINEN RIIPPUVUUS

1. K^n, vektorien lineaarinen yhdiste

Käytämme seuraavassa merkintää K^n tarkoittamaan n-pituisten (pysty)vektorien

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \ u_i \in K,$$

joukkoa. Vastaavasti $K^{(n)}$ tarkoittaa n-pituisten vaakavektorien $(u_1, u_2, \ldots, u_n), u_i \in K$, muodostamaa joukkoa. Alkioita u_i sanotaan vektorin *koordinaateiksi.* Geometrisesti $\mathbb{R}$ voidaan tulkita suoraksi, $\mathbb{R}^2$ tasoksi ja $\mathbb{R}^3$ kolmiuloitteiseksi avaruudeksi.

Määritelmä. Olkoot U, $V \in K^n$ sekä

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Tällöin määritellään:

(i) $U = V$ jos ja vain jos $u_i = v_i$ aina, kun $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $U + V = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$, (iii) $cU = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$, $c \in K$.

Edellä määritellyt *summa* $U + V$ ja *skalaarilla kertominen* cU toteuttavat selvästi seuraavat laskusäännöt. Vastaavat tulokset pätevät myös vaakavektoreille.

Lause 1.1. Jokaisella $U, V, Z \in K^n$ ja $c, d \in K$ pätee

1) $U + V = V + U$,

2) $U + (V + Z) = (U + V) + Z$,

3) $U + \underline{0} = U$ (*nollavektorin* $\underline{0}$ kaikki koordinaatit ovat $= 0$),

4) $U + (-U) = \underline{0}$ ($-U = (-1)U$ on vektorin U *vastavektori*),

5) $c(U + V) = cU + cV$,

6) $(c + d)U = cU + dU$,

7) $c(dU) = (cd)U$,

8) $1U = U$.

Esimerkki. Suunnikassääntö, tason $\mathbb{R}^2$ ja avaruuden $\mathbb{R}^3$ suorat.

Määritelmä. Vektorien $U_1, U_2, \dots, U_p \in K^n$ *lineaariyhdisteeksi* kutsutaan vektoria

$$c_1U_1 + c_2U_2 + \cdots + c_pU_p,$$

missä $c_1, c_2, \dots, c_p \in K$. Kaikkien tälläisten lineaariyhdisteiden joukkoa sanotaan vektorien $U_1, U_2, \dots, U_p$ *virittämäksi* joukon K^n osajoukoksi ja sille käytetään merkintää

$$L(\{U_1, U_2, \dots, U_p\}) = \{c_1U_1 + c_2U_2 + \cdots + c_pU_p \mid c_i \in K\}.$$

Esimerkki. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tasot.

Esimerkki. Tutki, onko vektori B vektorien A_1 ja A_2 virittämässä avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukossa $L(\{A_1, A_2\})$, kun

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Elementaaristen muunnosten tärkeä ominaisuus on seuraava

Lause 1.2. Jos $m \times n$-matriisit A ja B ovat ekvivalentteja ja niiden vaakarivit ovat vastaavasti $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$ ja $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$, niin

$$L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}\}) = L(\{B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}\}).$$

Tod. Riittää todeta tulos kullekin muunnostyypille I, II ja III. Tyypit I ja II ovat selviä. Korvausta III koskeva väite saadaan suoraan seuraavasta yleisemmästä tuloksesta: Jos $Y \in K^{(n)}$ on vektorien $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$ lineaariyhdiste ja kukin vektori $A^{(i)}$ on vektorien $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$ lineaariyhdiste, niin Y on vektorien $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$ lineaariyhdiste. Jos nimittäin

$$Y = \sum_{i=1}^{m} a_i A^{(i)} \text{ ja } A^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} B^{(j)},$$

niin

$$Y = \sum_{i=1}^{m} a_i A^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} a_i (\sum_{j=1}^{m} b_{ij} B^{(j)}) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij}) B^{(j)}. \qquad \text{mot}$$

Yleinen lineaarinen yhtälöryhmä

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

jonka kerroimatriisi on $A = (A_1 A_2 \dots A_n)$ ja täydennetty kerroinmatriisi (A, B), voidaan esittää vektorimuodossa

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = B. \tag{2}$$

Näin ollen yhtälöryhmä (1) on ratkeava jos ja vain jos vakiovektori B on kerroinmatriisin A sarakkeiden lineaariyhdiste. Määritellään nyt matriisin ja vektorin tulo.

Määritelmä. Olkoon $A = (A_1 A_2 \dots A_n)$ lajia $m \times n$ oleva matriisi ja $X \in K^n$. Tulo AX määritellään yhtälöllä

$$AX = (A_1 A_2 \cdots A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n.$$

Huomautus. Tulo on määritelty vain, jos matriisin A sarakkeiden lukumäärä on vektorin X koordinaattien lukumäärä. Edelleen tulovektorin i:s alkio saadaan "kertomalla skalaaristi" matriisin A i:s vaakavektori ja X. Tulo toteuttaa ehdot: $A(X + Y) = AX + AY$ ja $A(cX) = c(AX)$.

Edellä olevan nojalla saadaan

Lause 1.3. Olkoon $A = (A_1 A_2 \dots A_n)$ lajia $m \times n$ oleva matriisi ja $B \in K^m$. Tällöin lineaarisella yhtälöryhmällä (1), vektoriyhtälöllä (2) ja matriisiyhtälöllä

$$AX = B \tag{3}$$

on samat ratkaisuvektorit X. Ratkaisujoukko saadaan Gaussin eliminointimenetelmällä.

Nyt voidaan täsmentää aikaisempaa luvun I Lausetta 2.4, jossa tarkastellaan yhtälöä (3) vastaavaa homogeenistä yhtälöä

$$AX = \underline{0}. \tag{3h}$$

Lause 1.4. Olkoon A $m \times n$-matriisi, jonka aste on $r = \operatorname{rank} A$. Jos $r = n$, niin homogeenisen yhtälön (3h) ainoa ratkaisu on $X = 0$. Jos $r < n$, niin on olemassa $h = n - r$ sellaista ratkaisua $X_1, X_2, \dots X_h$, että ratkaisujoukko on $L(\{X_1, X_2, \dots, X_h\})$.

Tod. Tapaus $r = n$ on selvä. Olkoon $h = n - r > 0$. Päämuuttujia on r kpl ja vapaita muuttujia h kpl, olkoot ne $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_h}$. Yhtälön (3h) ratkaisemiseksi muunnetaan matriisi A elementaarisilla muunnoksilla pelkistettyyn porrasmuotoon, josta päämuuttujat saadaan lausuttua vapaiden muuttujien avulla. Näin ratkaisut saadaan muotoon (ks. esimerkkejä)

$$X = x_{i_1} X_1 + x_{i_2} X_2 + \cdots + x_{i_h} X_h,$$

missä $X_1, X_2, \ldots, X_h \in K^n$ ja vapaille muuttujille x_{i_j} voidaan antaa mielivaltaisia arvoja $\in K$. Selvästi jokainen vektori $X_1, X_2, \ldots, X_h$ on ratkaisu ja kaikki ratkaisut saadaan niiden lineaariyhdisteinä. mot

Esimerkkejä.

Lause 1.5. Jos yhtälö (3) on ratkeava ja X_0 on eräs ratkaisu, niin ratkaisujoukko on

$$\{X_0 + Y \mid Y \text{ yhtälön (3h) ratkaisu}\}.$$

Tod. Oletetaan, että X_0 on yhtälön (3) ratkaisu, ts. $AX_0 = B$. Tällöin

$$A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B + \underline{0} = B,$$

joten vektorit $X_0 + Y$ ovat ratkaisuja. Jos taas X on mielivaltainen yhtälön (3) ratkaisu, niin

$$A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = \underline{0}.$$

Näin ollen $Y = X - X_0$ toteuttaa yhtälön (3h) ja $X = X_0 + Y$. mot

Lause 1.6. Olkoon $A = (A_1 A_2 \ldots A_n)$ $m \times n$-matriisi ja $r = \text{rank } A$. Ehdot

a) Yhtälö $AX = B$ on ratkeava aina, kun $B \in K^m$;

b) $K^m = L(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$;

c) $r = m$

ovat yhtäpitäviä.

Tod. Tulon AX määritelmän nojalla ehto a) tarkoittaa sitä, että jokaisella vektorilla $B \in K^m$ on esitys $B = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$, missä $x_i \in K$. Siten ehdot a) ja b) ovat yhtäpitäviä.

Riittää osoittaa, että ehdot a) ja c) ovat yhtäpitäviä. Jos c) pätee, on $m = \text{rank } A = \text{rank } (A, B)$ jokaisella vektorilla $B \in K^m$. Kappaleen I Lauseen 2.5. nojalla a) on voimassa. Oletetaan nyt, että a) pätee. Todistamme epäsuoralla todistuksella, että myös c) pätee. Teemme vastaoletuksen: c) ei ole voimassa. Tällöin välttämättä $r < m$ ja $A \sim U$, missä porrasmuotoisen matriisin U alin rivi on nollarivi. Valitaan nyt $D \in K^m$ siten, että alin alkio =1. Tällöin $r = \text{rank } U < \text{rank } (U, D)$ ja yhtälö $UX = D$ ei ole ratkeava. Koska $A \sim U$, on

$$(U, D) \sim (A, B)$$

eräällä $B \in K^m$. Koska yhtälö $UX = D$ ei ole ratkeava, ei myöskään yhtälö $AX = B$ ole ratkeava (I, Lause 2.1.). Tämä on mahdotonta, jos a) pätee. Saatu ristiriita osoittaa, että vastaoletus on väärä ja c) pätee. mot

2. Lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus

Lineaarisen riippuvuuden käsite osoittautuu myöhemmin erittäin hyödylliseksi. Joukon K^n tai $K^{(n)}$ vektorien lineaarinen riippuvuus liittyy läheisesti homogeenisiin yhtälöryhmiin, joten tarkastelemme tätä tapausta seuraavassa.

Määritelmä. Vektorijoukkoa $S = \{V_1, V_2, \dots, V_p\} \subseteq K^n$ (tai $K^{(n)}$) sanotaan *lineaarisesti riippuvaksi* tai *lineaarisesti sidotuksi*, jos vektoriyhtälöllä

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_pV_p = \underline{0}$$

on epätriviaali ratkaisu $x_1, x_2, \dots, x_p$ (ts. ratkaisu, missä ainakin yksi $x_i \neq 0$). Joukkoa S sanotaan *lineaarisesti riippumattomaksi* tai *lineaarisesti vapaaksi*, jos ylläolevalla yhtälöllä on vain triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$.

Jos merkitsemme $A = (V_1V_2 \dots V_p)_{n\times p}$, niin luvun 1 nojalla voimme sanoa: S on lineaarisesti riippumaton jos ja vain jos homogeenisella yhtälöllä

$$AX = 0$$

on vain triviaali ratkaisu $X = \underline{0}$.

Esimerkkejä.

Lause 2.1. Jos $\underline{0} \in S$, niin S on lineaarisesti riippuva.

Tod. Selvä.

Lause 2.2. Jos $S = \{V_1, V_2, \dots, V_p\} \subseteq K^n$ ja $p > n$, niin S on lineaarisesti riippuva.

Tod. Jos A on kuten edellä, niin rank $A \leq n < p$, joten Lauseen 1.4 nojalla yhtälöllä $AX = \underline{0}$ on epätriviaaleja ratkaisuja. Väite seuraa tästä. mot

Lause 2.3. $S = \{V_1, V_2, \dots, V_p\} \subseteq K^n$ on lineaarisesti riippuva jos ja vain jos jokin joukon S vektoreista voidaan esittää muiden lineaariyhdisteenä.

Tod. Jos S on lineaarisesti riippuva, niin on olemassa epätriviaalit $x_1, x_2, \dots, x_p$, joilla

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_pV_p = \underline{0}.$$

Olkoon j suurin indeksi, jolla $x_j \neq 0$. Jos $j = 1$, niin $V_1 = \underline{0} = 0\cdot V_2 + \cdots + 0 \cdot V_p$. Jos taas $j > 1$, niin

$$x_jV_j = -x_1V_1 - \cdots - x_{j-1}V_{j-1} \qquad (x_k = 0 \quad \text{aina, kun } k > j),$$

$$V_j = -\frac{x_1}{x_j}V_1 - \cdots - \frac{x_{j-1}}{x_j}V_{j-1}.$$

Siis jokin vektoreista on muiden lineaariyhdiste.

Oletetaan nyt, että jokin vektoreista, esimerkiksi V_p, on muiden lineaariyhdiste. Tällöin

$$V_p = c_1V_1 + \cdots + c_{p-1}V_{p-1}$$

ja

$$c_1V_1 + \cdots + c_{p-1}V_{p-1} - V_p = 0.$$

Joukko S on näin ollen lineaarisesti riippuva. mot

Nyt voimme osoittaa aikaisemmin mainitun (s.7) pelkistetyn porrasmuodon yksikäsitteisyyttä koskevan tuloksen. Tätä varten asetamme määritelmän.

Määritelmä. Matriisien $C = (c_{ij})_{m\times n}$ ja $D = (d_{ij})_{m\times n}$ yhtäsuuruus määritellään asettamalla

$$C = D \iff c_{ij} = d_{ij} \text{ aina, kun } i = 1, \ldots, m \text{ ja } j = 1, \ldots, n.$$

Lause 2.4. Jos $m \times n$-matriisi $A \sim C$ ja $A \sim D$, missä C ja D ovat pelkistetyssä porrasmuodossa, niin $C = D$.

Tod. Selvästi $C \sim D$, joten yhtälöillä $CX = \underline{0}$ ja $DX = \underline{0}$ on samat ratkaisut X. Näin ollen

$$(1) \qquad x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n = \underline{0} \iff x_1D_1 + x_2D_2 + \cdots + x_nD_n = \underline{0},$$

missä on merkitty $C = (C_1C_2 \ \ldots \ C_n)$ ja $D = (D_1D_2 \ \ldots \ D_n)$. Siis matriisien C ja D sarakkeet toteuttavat samat lineaarisen riippuvuuden ehdot. Koska porrassarakkeet ovat tarkalleen ne sarakkeet, joita ei voida esittää niiden vasemmalla puolella olevien sarakkeiden lineaariyhdisteenä, ovat matriisien D ja C porrassarakkeet samoilla paikoilla (kullakin nollarivistä poikkeavalla rivillä on porraspaikalla 1 ja sen vasemmalla puolella alkiot $= 0$). Jos porrassarakkeita on r kpl, ne ovat $E_1, E_2, \ldots, E_r$, missä

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{:s alkio.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Siis porrassarakkeet ovat samoilla paikoilla ja samat. Tarkastellaan nyt matriisin C saraketta C_j, joka ei ole porrasarake (jos tällainen on olemassa). Tämä sarake on joko nollasarake tai sen vasemmalla puolella olevien porrassarakkeiden lineaariyhdiste, joten $C_j = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_{j-1}C_{j-1}$, missä $x_k = 0$, jos C_k ei ole porrassarake. Ehdon (1) nojalla

$$D_j = x_1D_1 + x_2D_2 + \cdots + x_{j-1}D_{j-1}.$$

Koska porrassarakkeet ovat samat ja $x_k = 0$, jos C_k ei ole porrassarake, on $C_j = D_j$. Siis $C = D$. mot

III MATRIISIALGEBRAA

1. Matriisien laskutoimitukset

Määritellään aluksi matriisien summa ja skalaarilla (kunnan K alkiolla) kertominen.

Määritelmä. Matriisien $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{m\times n}$ sekä $c \in K$ summa ja skalaarilla kertominen määritellään asettamalla

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \qquad cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Lause 1.1. Jos A, B ja C ovat $m \times n$-matriiseja, niin

$A + B = B + A$ (vaihdannaisuus),

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (liitännäisyys),

$A + 0 = A, \qquad 0 = (0)_{m\times n}$ on ns. *nollamatriisi*,

$A + (-A) = 0, \qquad -A = (-1)A$ on matriisin A *vastamatriisi.*

Tod. Selvä.

Tutkitaan seuraavaksi matriisien tuloa. Olkoot $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Jos $X \in K^p$, niin tulo

$$BX = (B_1 B_2 \dots B_p)X = x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_pB_p \in K^n.$$

Siis myös matriisin A ja tämän vektorin tulo $A(BX) \in K^m$ on määritelty ja on

$$\begin{aligned} A(BX) &= A(x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_pB_p) = A(x_1B_1) + A(x_2B_2) + \cdots + A(x_pB_p) \\ &= x_1AB_1 + x_2AB_2 + \cdots + x_pAB_p \\ &= (AB_1 AB_2 \dots AB_p)X. \end{aligned}$$

Kahden matriisin tulo on nyt luontevaa määritellä seuraavasti.

Määritelmä. Matriisien $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n\times p}$ tulo AB on $m \times p$-matriisi, jonka sarakkeet ovat $AB_1, AB_2, \dots, AB_p$ missä $B = (B_1 B_2 \dots B_p)$. Siis

$$AB = (AB_1 AB_2 \dots AB_p)_{m\times p}.$$

Huomautus. 1) AB on määritelty vain, jos matriisin A sarakkeiden lukumäärä on sama kuin matriisin B rivien lukumäärä.

2) $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, missä

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

ts. tulomatriisin ij-alkio saadaan "kertomalla skalaaristi" matriisin A i:s vaakarivi ja matriisin B j:s sarake.

3) Yleensä $AB \neq BA$, joten matriisien kertolasku ei ole vaihdannainen.

Jos $AB = BA$, niin matriisit *kommutoivat*.

4) Ylläolevan määritelmän ja sitä edeltävän tarkastelun nojalla

$$A(BX) = (AB)X \quad \text{aina, kun } X \in K^p.$$

Esimerkkejä.

Lajia $n \times n$ olevaa matriisia

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

sanotaan *yksikkömatriisiksi*. Nimitys tulee siitä, että se on $n \times n$-neliömatriisien kertolaskun ns. neutraalialkio, eli

$$I_n A = A I_n = A \quad \text{aina, kun } A = (a_{ij})_{n \times n}.$$

Matriisilla I_n on siis samanlainen rooli $n \times n$-matriisien joukossa matriisikertolaskun suhteen kuin luvulla $1 \in \mathbb{R}$ reaalilukujen joukossa tavanomaisen lukujen kertolaskun suhteen.

Lause 1.2. Aina, kun seuraavat laskutoimitukset ovat määriteltyjä, niin

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$c(AB) = (cA)B = A(cB) \quad \text{aina, kun } c \in K,$$

$$I_m A = A I_n = A \text{ jokaisella } m \times n\text{-matriisilla } A.$$

Tod. Osoitetaan ensimmäinen väite. Jos $C = (C_1 C_2 \ldots C_q)$, niin kertolaskun määritelmän ja huomautuksen 4) nojalla

$$\begin{aligned} A(BC) &= A(BC_1 BC_2 \cdots BC_q) = (A(BC_1) A(BC_2) \cdots A(BC_q)) \\ &\underset{4)}{=} ((AB)C_1 (AB)C_2 \cdots (AB)C_q) \\ &= (AB)(C_1 C_2 \cdots C_q) = (AB)C. \quad \text{mot} \end{aligned}$$

Määritelmä. Matriisin $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *transpoosiksi* tai *transponoiduksi matriisiksi* kutsutaan matriisia A^{T}, joka saadaan matriisista A vaihtamalla tämän rivit sarakkeiksi, ts.

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ & & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

Transpooseille pätee

Lause 1.3. Jos laskutoimitukset ovat määriteltyjä, niin

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A,$$

$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}},$$

$$(cA)^{\mathrm{T}} = cA^{\mathrm{T}} \text{ aina, kun } c \in K,$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

Tod. Viimeisen kohdan todistus jätetään harjoituksiin, muut kohdat ovat selviä.

2. Käänteismatriisi

Olkoon A $n \times n$-matriisi. Selvitämme nyt käänteisalkion olemassaoloa matriisikertolaskun suhteen. Koska yksikkömatriisi I_n on kertolaskun neutraalialkio, on luonnollista etsiä sellaista $n \times n$-matriisia B, että

$$AB = BA = I_n. \tag{1}$$

Määritelmä. Jos $n\times n$-matriisi B toteuttaa yhtälöt (1), niin matriisia B sanotaan matriisin A *käänteismatriisiksi*, merkitään $B = A^{-1}$. Matriisia A sanotaan *säännölliseksi*, jos A^{-1} on olemassa. Muulloin neliömatriisia A sanotaan *singulaariseksi* eli *epäsäännölliseksi.*

Esimerkki. 2×2-matriisit.

Lause 2.1. Oletetaan, että A ja B ovat säännöllisiä $n \times n$-matriiseja. Tällöin

1) A^{-1} on yksikäsitteinen,

2) $(A^{-1})^{-1} = A$,

3) AB on säännöllinen ja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

4) A^{T} on säännöllinen ja $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Tod. 1) Jos B ja C toteuttavat käänteismatriisin määritelmän ehdot (1), niin

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

3) Koska

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

ja

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

niin $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ määritelmän nojalla.

Kohdat 2) ja 4) jätetään harjoitustehtäviksi. mot

Edellisessä esimerkissä määritimme 2×2-matriisien käänteismatriisin. Tarkastellaan nyt yleistä $n \times n$-matriisia A. Tulisi siis löytää sellainen $n \times n$-matriisi X, että

$$AX = XA = I_n.$$

Merkitsemällä $X = (X_1X_2 \dots X_n),\ I_n = (E_1E_2 \dots E_n)$ nähdään, että

(2) $\quad AX = I_n$ jos ja vain jos $AX_j = E_j$ aina, kun $j = 1, \dots, n$.

Matriisi X voi siis olla olemassa vain, jos yhtälö $AX_j = E_j$ on ratkeava jokaisella $j = 1, \dots, n$. Kukin näistä yhtälöistä voidaan selvittää muuntamalla täydennetty kerroinmatriisi (A, E_j) pelkistettyyn porrasmuotoon. Kaikki yhtälöt voidaan käsitellä samanaikaisesti saattamalla $n \times 2n$-matriisi $(A, E_1E_2 \dots E_n) = (A, I_n)$ pelkistettyyn porrasmuotoon (C, B), jolloin

$$(A, I_n) \sim (C, B),\ B = (B_1B_2 \dots B_n).$$

Nyt $A \sim C$, matriisi C on pelkistetyssä porrasmuodossa ja

$$AX_j = E_j \text{ jos ja vain jos } CX_j = B_j$$

aina, kun $j = 1, \dots, n$.

Lause 2.2. Olkoon C ylläoleva pelkistetyssä porrasmuodossa oleva matriisi, jolle $A \sim C$.

1) Jos $C = I_n$ eli $A \sim I_n$, niin A on säännöllinen. Tällöin $A^{-1} = B$, missä $(A, I_n) \sim (I_n, B)$.

2) Jos $C \neq I_n$ niin A on singulaarinen (ja käänteismatriisia A^{-1} ei ole olemassa).

Tod. Luvun II Lauseen 2.4. mukaan ylläoleva C on yksikäsitteinen.

1) Olkoon $C = I_n$. Tällöin ylläolevan mukaan $X_j = B_j$ toteuttaa yhtälön $AX = E_j, j = 1, \dots, n$, joten matriisi $X = B$ toteuttaa yhtälöiden (2) nojalla yhtälön $AX = I_n$.
Koska $(A, I_n) \sim (I_n, B)$, on myös $(B, I_n) \sim (I_n, A)$. Kuten edellä todetaan, että $X = A$ toteuttaa yhtälön $BX = I_n$.

Nyt $AB = BA = I_n$, joten $B = A^{-1}$.

2) Jos $C \neq I_n$, niin matriisin C alin rivi on nollarivi ja rank $A < n$. Tällöin luvun II Lauseen 1.6. nojalla on olemassa sellainen $Q \in K^n$, että yhtälö $AX = Q$ ei ole ratkeava. Nyt on olemassa sellainen j, että yhtälö $AX_j = E_j$ ei ole ratkeava. Jos nimittäin kaikki nämä yhtälöt olisivat ratkeavia ja $X_1, X_2, \dots, X_n$ ovat ratkaisut sekä

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

niin

$$\begin{aligned} A(q_1X_1 + q_2X_2 + \cdots + q_nX_n) &= q_1AX_1 + q_2AX_2 + \cdots + q_nAX_n \\ &= q_1E_1 + q_2E_2 + \cdots + q_nE_n = Q. \end{aligned}$$

Näin yhtälöllä $AX = Q$ olisi ratkaisu, mikä on mahdotonta. Siis yhtälöiden (2) nojalla ehdon $AX = I_n$ toteuttavaa matriisia X ei ole, joten A on singulaarinen. mot

Lauseesta 2.2 ja aikaisemmista yhtälöryhmiä koskevista tuloksista saadaan seuraavat ehdot matriisin säännöllisyydelle ja singulaarisuudelle.

Seuraus. Olkoon A $n \times n$-matriisi. Tällöin seuraavat kohdan 1) ehdot ovat keskenään yhtäpitävät, samoin kohdan 2) ehdot keskenään.

1) a) A on säännöllinen,
   b) $A \sim I_n$,
   c) rank $A = n$,
   d) homogeenisella yhtälöllä $AX = \underline{0}$ on vain triviaali ratkaisu $X = \underline{0}$,
   e) matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia;

2) a) A on singulaarinen,
   b) rank $A < n$,
   c) homogeenisella yhtälöllä $AX = \underline{0}$ on epätriviaaleja ratkaisuja.

Esimerkkejä.

IV LINEAARISET AVARUUDET ELI VEKTORIAVARUUDET

1. Vektoriavaruuden määrittely

Määritelmä. Olkoon V epätyhjä joukko ja K kunta. Olkoon lisäksi määritelty laskutoimitukset $V \times V \to V$, merkitään $(X, Y) \mapsto X + Y$, ja $K \times V \to V$, merkitään $(a, X) \mapsto aX$. Joukkoa V varustettuna näillä laskutoimituksilla sanotaan K-kertoimiseksi *vektoriavaruudeksi* eli *lineaariseksi avaruudeksi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

V1. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ aina, kun $X, Y, Z \in V$;

V2. $X + Y = Y + X$ aina, kun $X, Y, \in V$;

V3. on olemassa alkio $\underline{0} \in V$ (ns. *nollavektori*), jolle $X + \underline{0} = X$ aina, kun $X \in V$;

V4. Jos $X \in V$, niin on olemassa sellainen $Y \in V$, että $X + Y = \underline{0}$, merk. $Y = -X$;

V5. $a(X + Y) = aX + aY$ aina, kun $a \in K$, ja aina, kun $X, Y \in V$;

V6. $(a + b)X = aX + bX$ aina, kun $a, b \in K$, ja aina, kun $X \in V$;

V7. $(ab)X = a(bX)$ aina, kun $a, b \in K$, ja aina, kun $X \in V$;

V8. $1X = X$ aina, kun $X \in V$. Tässä 1 on kunnan K ykkösalkio.

Vektoriavaruuden alkioita sanotaan *vektoreiksi* ja niitä merkitään seuraavassa yleensä loppupään isoilla kirjaimilla X, Y, Z, X_1, X_2, jne. Kerroinkunnan K alkioita sanotaan usein *skalaareiksi.* Vektoria $X + Y$ sanotaan vektorien X ja Y summaksi, vektoria aX taas skalaarin a ja vektorin X tuloksi. Jos $K = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, puhutaan vastaavasti reaalisesta tai kompleksisesta vektoriavaruudesta.

Esimerkkejä.

1) K^n ja $K^{(n)}$ ovat K-kertoimisia vektoriavaruuksia.

2) Polynomiavaruudet

Lause 1.1. Olkoon V K-kertoiminen vektoriavaruus. Tällöin

a) $\underline{0}$ on yksikäsitteinen;

b) Jos $X, Y \in V$, niin yhtälöllä $X + Z = Y$ on yksikäsitteinen ratkaisu $Z \in V$;

c) $-X$ on yksikäsitteinen aina, kun $X \in V$;

d) $0X = \underline{0}$ ja $(-1)X = -X$ aina, kun $X \in V$;

e) $aX = \underline{0}$ jos ja vain jos $a = 0$ tai $X = \underline{0}$ (tai molempia).

Tod. a) Jos $\underline{0}_1$ ja $\underline{0}_2$ ovat avaruuden V nollavektoreita, niin

$$\underline{0}_1 \underset{\text{V3}}{=} \underline{0}_1 + \underline{0}_2 \underset{\text{V2}}{=} \underline{0}_2 + \underline{0}_1 \underset{\text{V3}}{=} \underline{0}_2.$$

b) $Z = -X + Y$ toteuttaa yhtälön, sillä

$$X + (-X + Y) \underset{\text{V1}}{=} (X + (-X)) + Y \underset{\text{V4}}{=} \underline{0} + Y \underset{\text{V3}}{=} Y.$$

Jos Z_1 ja Z_2 ovat ratkaisuja, niin

$$Z_1 = Z_1 + \underline{0} = Z_1 + (X + (-X)) = Y + (-X) = Z_2 + X + (-X) = Z_2 + \underline{0} = Z_2.$$

c) Kohdan b) nojalla yhtälöllä $Z + X = \underline{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu, joka on ehdon $V4$ nojalla $-X$.

d) ja e) jätetään harjoituksiin. mot

2. Aliavaruudet

Määritelmä. Olkoon V K-kertoiminen vektoriavaruus. Osajoukkoa $U \subseteq V$ sanotaan avaruuden V *aliavaruudeksi*, jos

VA1. $X + Y \in U$ aina, kun $X, Y \in U$;

VA2. $aX \in U$ aina, kun $a \in K$, ja aina, kun $X \in U$;

VA3. $\underline{0} \in U$.

Huomautus. Ehdon VA3 nojalla $U \neq \emptyset$.

Vektoriavaruuden V laskutoimitukset on määritelty myös aliavaruudessa $U \subseteq V$ ja luonnollisesti ehdot V1-V8 toteutuvat aliavaruudessa U. Siis jokainen aliavaruus on myös vektoriavaruus. Haluttaessa osoittaa jokin joukko vektoriavaruudeksi onkin usein helpointa osoittaa se jonkin tunnetun vektoriavaruuden (vaikkapa avaruuden K^n) aliavaruudeksi. Tällöin riittää todeta ehdot VA1-VA3 (ehtojen V1-V8 sijasta).

Esimerkkejä.

1) Avaruudella V on aina aliavaruudet $\{\underline{0}\}$ ja V. Nämä ovat sen ns. *triviaalit aliavaruudet*.

2) Olkoon $X \in K^n$. Joukko $S = \{tX \mid t \in K\}$ on avaruuden K^n aliavaruus (vrt. origon kautta kulkevat suorat avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$).

Yleistämme nyt aikaisemman lineaariyhdisteen määritelmän.

Määritelmä. Olkoon V K-kertoiminen vektoriavaruus ja olkoot $a_i \in K$, $X_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vektoria

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

sanotaan vektorien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *lineaariyhdisteeksi*.

Induktioperiaatteella ehdoista VA1 ja VA2 saadaan seuraava tulos.

Lause 2.1. Olkoon U vektoriavaruuden V aliavaruus. Jokainen aliavaruuden U vektorien lineaariyhdiste on aliavaruuden U alkio.

Olkoon nyt $S \subseteq V$ epätyhjä osajoukko. Joukon S vektorien *virittämä* avaruuden V osajoukko $L(S)$ koostuu joukon S vektorien lineaariyhdisteistä:

$$\begin{aligned} L(S) &= \{Y | Y \text{ on joukon } S \text{ vektorien lineaariyhdiste}\} \\ &= \{Y | Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n,\ X_i \in S,\ a_i \in K\}. \end{aligned}$$

Jos joukko $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ on äärellinen, käytetään myös merkintää $L(S) = L(\{X_1, X_2, \ldots, X_p\})$. Jos Y_1 ja $Y_2 \in L(S)$, niin selvästi myös $Y_1 + Y_2$ ja $cY_1 \in L(S)$ aina, kun $c \in K$. Tämä on usein käyttökelpoinen ja voidaan esittää seuraavana lauseena.

Lause 2.2. Jos $S \subseteq V, S \neq \emptyset$, niin $L(S)$ on avaruuden V aliavaruus.

Esimerkki. $K^n = L(\{E_1, E_2, \ldots, E_n\})$, missä vektorin E_i i:s koordinaatti on 1 ja muut ovat 0. Tämä seuraa siitä, että

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \cdots + a_n E_n.$$

Lause 2.3. Olkoon A $m \times n$-matriisi. Homogeenisen yhtälön $AX = \underline{0}$ ratkaisut muodostavat avaruuden K^n aliavaruuden.

Tod. Väite seuraa Lauseesta 2.2. ja luvun II Lauseesta 1.4. Tulos on helppo todistaa myös suoraan.

VA1: Jos X ja Y ovat ratkaisuja, niin $A(X+Y) = AX + AY = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$, joten $X + Y$ on ratkaisu.

VA2: Jos X on ratkaisu ja $c \in K$, niin $A(cX) = c(AX) = c\underline{0} = \underline{0}$, joten cX on ratkaisu.

VA3: $\underline{0}$ on selvästi ratkaisu. mot

Määritelmä. Olkoon A $m \times n$-matriisi. Lauseen 2.3 mukaista avaruuuuden K^n aliavaruutta sanotaan *matriisin A nolla-avaruudeksi* ja sille käytetään merkintää

$$\text{Nul } A = \{X \in K^n \mid AX = \underline{0}\}.$$

Luvun II Lauseen 1.4 mukaan nolla-avaruuden Nul A virittävät $n - r$ ratkaisua, missä $r = \text{rank } A$.

Esimerkkejä.

3. Kanta

Määrittelimme aikaisemmin avaruuden K^n vektorien lineaarisen riippuvuuden. Nyt voimme yleistää tämän määritelmän yleiseen vektoriavaruuteen.

Määritelmä. Vektoriavaruuden V äärellistä vektorijoukkoa $S = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ sanotaan *lineaarisesti riippuvaksi* tai *lineaarisesti sidotuksi*, jos yhtälöllä

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_pV_p = \underline{0}$$

on epätriviaali ratkaisu $x_1, x_2, \dots, x_p$. Joukkoa S sanotaan *lineaarisesti riippumattomaksi* tai *lineaarisesti vapaaksi*, jos ylläolevalla yhtälöllä on vain triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$. Ääretöntä osajoukkoa sanotaan lineaarisesti riippumattomaksi, jos sen jokainen äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton, muutoin lineaarisesti riippuvaksi.

Huomautus. Yleisessä tapauksessa lineaarisella riippuvuudella ei ole suoraviivaista yhteyttä lineaarisiin yhtälöryhmiin.

Esimerkkejä.

Luvun 2 Lausetta 2.3 vastaava tulos pätee yleisesti. Todistus yleisessä tapauksessa on samanlainen kuin avaruudelle K^n.

Lause 3.1. Vektoriavaruuden V vektorijoukko $S = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ on lineaarisesti riippuva jos ja vain jos jokin joukon S vektoreista on muiden lineaariyhdiste.

Nyt voidaan määritellä kanta.

Määritelmä. Olkoon U vektoriavaruuden V aliavaruus. Vektorijoukkoa $S \subseteq V$ sanotaan aliavaruuden U *kannaksi*, jos

1) $U = L(S)$ ja

2) joukko S on lineaarisesti riippumaton.

Vektoriavaruutta V sanotaan *äärellisulotteiseksi*, jos sillä on äärellinen virittäjäjoukko, muutoin *äärettönulotteiseksi*.

Huomautus. 1) Aliavaruudella $U = \{\underline{0}\}$ ei ole kantaa.

2) Jokaisella aliavaruudella $U \neq \{\underline{0}\}$ on kanta. Todistamme tämän äärellisulotteisessa tapauksessa seuraavassa (Lause 3.2 b).
3) Kannan määritelmässä voidaan valita $U = V$, joten huomautuksen 2) mukaan jokaisella vektoriavaruudella on kanta.

Esimerkkejä.

1) Avaruuden K^n vektorit $E_1, E_2, \dots, E_n$ muodostavat ns. *luonnollisen kannan*.

2) Olkoon A $m \times n$-matriisi. Tällöin nolla-avaruuden Nul A kannan muodostavat luvun II Lauseen 1.4 todistuksen mukaiset vektorit $X_1, X_2, \dots, X_h$, missä $h = n - \text{rank } A$.

Lause 3.2 (virittäjäjoukosta kantaan). Olkoon V vektoriavaruus. Olkoon lisäksi $S = \{T_1, T_2, \ldots, T_q\} \subseteq V$ ja $U = L(S)$. Tällöin:

a) Jos jokin joukon S vektoreista, esimerkiksi T_k, on muiden lineaariyhdiste, niin joukko $S \setminus \{T_k\} = \{T_1, \ldots, T_{k-1}, T_{k+1}, \ldots, T_q\}$ virittää aliavaruuden U.

b) Jos $U \neq \{\underline{0}\}$, niin jokin joukon S osajoukko on aliavaruuden U kanta.

Tod. a) Järjestämällä tarvittaessa joukon S vektorit uudelleen voimme olettaa, että T_q on muiden lineaariyhdiste:

$$T_q = a_1 T_1 + a_2 T_2 + \cdots + a_{q-1} T_{q-1}.$$

Jos $X \in U$, niin

$$\begin{aligned} X &= c_1 T_1 + c_2 T_2 + \cdots + c_q T_q \\ &= (c_1 + a_1 c_q) T_1 + (c_2 + a_2 c_q) T_2 + \cdots + (c_{q-1} + a_{q-1} c_q) T_{q-1} \\ &\in L(\{T_1, \ldots, T_{q-1}\}), \end{aligned}$$

joten $U = L(\{T_1, \ldots, T_{q-1}\})$.

b) Jos S on lineaarisesti riippumaton, se on aliavaruuden U kanta. Jollei, jokin joukon S vektoreista on muiden lineaariyhdiste, joten a)-kohdan nojalla kyseinen vektori voidaan poistaa joukosta S. Jos näin saatu joukko on lineaarisesti riippumaton, se on aliavaruuden U kanta. Jollei, edellinen menettely voidaan toistaa. Koska $U \neq \{\underline{0}\}$, päädytään äärellisen monen askeleen jälkeen lineaarisesti riippumattomaan virittäjäjoukkoon, joka on kanta. mot

Lauseen 3.2 b)-kohdan nojalla äärellisulotteisella vektoriavaruudella on kanta, joka saadaan poistamalla virittäjäjoukosta "turhat" alkiot eli ne, jotka ovat jäljelle jäävien lineaariyhdisteitä.

Huomautus. Kun aliavaruuden U kantaa muodostetaan Lauseen 3.2 mukaan virittäjäjoukosta, kanta saadaan jäljellä olevan joukon tullessa lineaarisesti riippumattomaksi. Jos tästä joukosta poistettaisiin jokin vektori, se ei enää virittäisi koko aliavaruutta U. *Kanta on siis mahdollisimman pieni virittäjäjoukko.*

Toisaalta *kanta on mahdollisimman suuri aliavaruuden U lineaarisesti riippumattomien vektorien joukko.* Jos nimittäin kantaan lisätään jokin aliavaruuden U vektori, esimerkiksi W, saatu joukko ei ole lineaarisesti riippumaton, koska W on kantavektorien lineaariyhdiste.

Esimerkkejä.

Kannalla on seuraava tärkeä ominaisuus.

Lause 3.3. Olkoon $V \neq \{\underline{0}\}$ vektoriavaruus ja $S = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subseteq V$. Joukko S on avaruuden V kanta jos ja vain jos jokainen avaruuden V vektori voidaan esittää *yksikäsitteisesti* joukon S vektorien lineaariyhdisteenä.

Tod. 1) Olkoon osajoukko S V kanta. Tällöin $V = L(S)$, joten jokaisella $X \in V$ on esitys $X = c_1U_1 + c_2U_2 + \cdots + c_nU_n$. Jos nyt myös $X = a_1U_1 + a_2U_2 + \cdots + a_nU_n$, niin

$$\underline{0} = X - X = (c_1 - a_1)U_1 + (c_2 - a_2)U_2 + \cdots + (c_n - a_n)U_n.$$

Kantavektorien lineaarisesta riippumattomuudesta seuraa, että $c_i - a_i = 0$ eli $c_i = a_i$ aina, kun $i = 1, \ldots, n$. Vektorin X esitys on siis yksikäsitteinen.

2) Oletetaan, että jokaisella avaruuden V vektorilla X on yksikäsitteinen esitys $X = c_1U_1 + c_2U_2 + \cdots + c_nU_n$. Tällöin $V = L(S)$. Joukon S lineaarisen riippumattomuuden toteamiseksi huomaamme, että

$$\underline{0} = 0U_1 + 0U_2 + \cdots + 0U_n.$$

Jos nyt

$$x_1U_1 + x_2U_2 + \cdots + x_nU_n = \underline{0},$$

niin esityksen yksikäsitteisyydestä seuraa, että $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Siis S on lineaarisesti riippumaton ja siten kanta. mot

Lauseen 3.3. nojalla voimme asettaa määritelmän.

Määritelmä. Jos V on vektoriavaruus ja $S = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ avaruuden V kanta, niin vektorin $X \in V$ esityksen

$$X = c_1U_1 + c_2U_2 + \cdots + c_nU_n$$

kertoimia $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sanotaan vektorin X *koordinaateiksi kannan S suhteen* ja vektoria

$$X_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$$

vektorin X *koordinaattivektoriksi kannan S suhteen.*

Huomautus. 1) Selvästi $(X + Y)_S = X_S + Y_S$ ja $(cX)_S = cX_S$ aina, kun $c \in K$.

2) Määritelmän nojalla tapauksessa $V = K^n$ on

$$X = PX_S, \text{ missä } P = (U_1U_2 \ \ldots \ U_n).$$

Tämä P on ns. *koordinaattien muunnosmatriisi kannasta S luonnolliseen kantaan.*

Esimerkkejä.

4. Vektoriavaruuden dimensio

Yleistämme aluksi luvun 2 Lauseen 2.2. tulosta, jossa osoitimme avaruuden K^n vektorijoukon lineaarisesti riippuvaksi, jos vektorien lukumäärä on (aidosti) suurempi kuin n.

Lause 4.1. Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $S = \{(U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Tällöin jokainen avaruuden V vektorijoukko, jossa vektorien lukumäärä on $> n$, on lineaarisesti riippuva.

Tod. Oletetaan, että $\{T_1, T_2, \ldots, T_p\} \subseteq V$ ja $p > n$. Luvunn II Lauseen 2.2 nojalla koordinaattivektorit

$$(T_1)_S, (T_2)_S, \ldots, (T_p)_S \in K^n$$

ovat lineaarisesti riippuvia, joten on olemassa sellaiset epätriviaalit $c_1, c_2, \ldots, c_p \in K$, että

$$c_1(T_1)_S + c_2(T_2)_S + \cdots + c_p(T_p)_S = \underline{0} \in K^n.$$

Tästä seuraa yhtälö (koordinaattivektorin määritelmän jälkeinen Huomautus 1)

$$(c_1T_1 + c_2T_2 + \cdots + c_pT_p)_S = \underline{0} \in K^n.$$

Täten

$$c_1T_1 + c_2T_2 + \cdots + c_pT_p = 0U_1 + 0U_2 + \cdots + 0U_n = \underline{0} \in V$$

eli joukko $\{T_1, T_2, \ldots, T_p\}$ on lineaarisesti riippuva. mot

Lause 4.2. Äärellisulotteisen vektoriavaruuden $V \neq \{\underline{0}\}$ jokaisessa kannassa on yhtä monta alkiota.

Tod. Olkoot $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ ja $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ vektoriavaruuden V kantoja. Koska $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ on kantana lineaarisesti riippumaton, $p \leq n$ Lauseen 4.1. nojalla. Vastaavasti todetaan, että $n \leq p$. Siis $n = p$. mot

Määritelmä. Jos vektoriavaruudella V on kanta, jossa on n vektoria, niin avaruuden V sanotaan olevan *n-ulotteinen* tai *n-dimensioinen*, merkitään $\dim V = n$. Jos $V = \{\underline{0}\}$, niin dimensioksi asetetaan $\dim\{\underline{0}\} = 0$. Jos avaruudella V ei ole äärellistä virittäjäjoukkoa, niin avaruutta V sanotaan *ääretönulotteiseksi.*

Esimerkkejä.

1) $\dim\ K^n = \dim\ K^{(n)} = n$.

2) Polynomiavaruuden P_n dimensio $\dim\ P_n = n + 1$.

Matriisin A nolla-avaruudelle pätee

Lause 4.3 (astelause). Jos A on $m \times n$- matriisi, niin

$$\dim \ \mathrm{Nul}\ A = n - \mathrm{rank}\ A.$$

Tod. Nolla-avaruuden Nul A kannan muodostavat luvun II Lauseen 1.4. todistuksen mukaiset vektorit $X_1, X_2, \ldots, X_h$ (ks. Esimerkki 2 s.), missä $h = n - \mathrm{rank}\ A$. Väite seuraa tästä. mot

Lause 4.4 Olkoon U äärellisulotteinen vektoriavaruuden V aliavaruus. Jokainen aliavaruuden U lineaarisesti riippumaton vektorijoukko voidaan laajentaa aliavaruuden U kannaksi, ja $\dim\ U \leq \dim\ V$.

Tod. Jos $U = \{\underline{0}\}$, niin $\dim\ U = 0 \leq \dim\ V$. Oletetaan nyt, että $U \neq \{\underline{0}\}$. Olkoon $S = \{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq U$ lineaarisesti riippumaton. Jos $U = L(S)$, niin S on kanta. Muussa tapauksessa on olemassa $U_{k+1} \in U$, $U_{k+1} \notin L(S)$. Silloin $S_1 = \{U_1, \ldots, U_k, U_{k+1}\}$ on lineaarisesti riippumaton (Perustele tarkasti !). Jos nyt $U = L(S_1)$, niin S_1 on kanta. Jollei, ylläoleva päättely voidaan toistaa ja aliavaruuteen U löydetään lineaarisesti riippumaton osajoukko $S_2 = \{U_1, \ldots, U_k, U_{k+1}, U_{k+2}\}$. Koska $U \subseteq V$ ja avaruuden V lineaarisesti riippumattomien vektorien lukumäärä on $\leq \dim\ V$ Lauseen 4.1 nojalla, saadaan äärellisen monen laajennuksen jälkeen aliavaruuden U kanta ja $\dim\ U \leq \dim\ V$.

Jos dimensio tunnetaan, kannan määritystä helpottaa seuraava tulos.

Lause 4.5 (kantalause). Oletetaan, että vektoriavaruuden V dimensio $\dim\ V = p \geq 1$. Olkoon $S = \{V_1, V_2, \ldots, V_p\} \in V$. Tällöin:

a) Jos S on lineaarisesti riippumaton, niin se on avaruuden V kanta.

b) Jos $V = L(S)$, niin S on kanta.

Tod. a) Lauseen 4.4 mukaan joukko S voidaan laajentaa avaruuden V kannaksi. Koska $\dim\ V = p$, tässä kannassa on p alkioita, joten S on kanta.

b) Lauseen 3.2. mukaan jokin joukon S osajoukko S' on avaruuden V kanta. Koska kannassa on p alkiota, on oltava $S' = S$. mot

5. Matriisin rivi- ja sarakeavaruus

Olkoon A lajia $m \times n$ oleva matriisi. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K^m$ sen sarakkeet ja $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)} \in K^{(n)}$ sen vaakarivit.

Määritelmä. Matriisin A *riviavaruus* Row $A = L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}\}) \subseteq K^{(n)}$ ja matriisin A *sarakeavaruus* Col $A = L(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}) \subseteq K^m$.

Lause 5.1. $\dim\ \mathrm{Row}\ A = \dim\ \mathrm{Col}\ A = \mathrm{rank}\ A$.

Tod. Olkoon B pelkistetyssä porrasmuodossa oleva matriisi, joka saadaan matriisista A elementaarisilla muunnoksilla, $A \sim B$. Olkoot matriisin B sarakkeet $B_1, B_2, \dots, B_n$ ja rivit $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$. Luvun II Lauseen 1.2. mukaan

$$\text{Row } A = L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}\}) = L(\{B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}\}).$$

Matriisin B porrasrivien lukumäärä on rank A (muut rivit nollarivejä) ja ne ovat lineaarisesti riippumattomia (Totea tarkasti!), joten ne muodostavat riviavaruuden Row A kannan. Siis dim Row $A =$ rank A.

Koska $A \sim B$, yhtälöillä $AX = \underline{0}$ ja $BX = \underline{0}$ ovat samat ratkaisut, joten

$$(1) \qquad x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = \underline{0} \iff x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_nB_n = \underline{0}.$$

Matriisin B porrasarakkeet ovat avaruuden K^n luonnollisen kannan vektorit $E_1, E_2, \dots, E_r$, $r =$ rank A, ja ovat näin lineaarisesti riippumattomia. Muut sarakkeet ovat niiden lineaariyhdisteitä (luvun II Lauseen 2.4. todistus). Ehdon (1) nojalla matriisien A ja B sarakkeet toteuttavat samat lineaarisen riippuvuuden ehdot, joten matriisin B porrassarakkeita vastaavat matriisin A sarakkeet muodostavat sarakeavaruuden Col A kannan ja myös dim Col $A =$ rank A. mot

Seuraus 1. rank $A =$ rank A^{T}.

Huomautus. 1) Jos on määrättävä riviavaruuden Row A kanta, niin se saadaan muuntamalla matriisi A elementaarisilla muunnoksilla porrasmuotoon. Saadun matriisin porrasrivit muodostavat kannan.

2) Sarakeavaruuden Col A kannan muodostavat porrassarakkeita vastaavat matriisin A sarakkeet (tässä ei saa käyttää porrasmatriisin sarakkeita, ne eivät välttämättä ole ole edes sarakeavaruuden Col A vektoreita). Toinen tapa määrittää avaruuden Col A kanta on tehdä matriisissa A^{T} kohdan 1) menettely.

Esimerkkejä.

6. Aliavaruuksien summat

Määritelmä. Vektoriavaruuden V aliavaruuksien M ja N summa määritellään asettamalla

$$M + N = \{Z | Z = X + Y, X \in M, Y \in N\}.$$

Lause 6.1. Jos M ja N ovat avaruuden V aliavaruuksia, niin myös summa $M + N$ on avaruuden V aliavaruus.

Tod. Harjoitustehtävä.

Määritelmä. Olkoot M ja N vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Jos summan $M + N$ jokaisen vektorin $Z = X + Y$ esitys on yksikäsitteinen, ts. jos

$$X + Y = X_1 + Y_1, \quad X,\ X_1 \in M, \quad Y,\ Y_1 \in N \quad \text{vain, kun} \quad X = X_1,\ Y = Y_1,$$

niin sanotaan, että $M+N$ on aliavaruuksien M ja N *suora summa*. Tällöin merkitään $M+N=M\oplus N$.

Lause 6.2. Jos M ja N ovat avaruuden V aliavaruuksia, niin

$$V=M\oplus N \text{ jos ja vain jos } V=M+N \text{ ja } M\cap N=\{\underline{0}\}.$$

Tod. 1) Oletetaan, että $V=M+N$ ja $M\cap N=\{\underline{0}\}$. Jos $X+Y=X_1+Y_1$, missä $X,X_1\in M$ ja $Y,Y_1\in N$, niin $X-X_1=Y-Y_1$. Nyt $X-X_1\in M$ ja $Y-Y_1\in N$, joten molemmat $\in M\cap N=\{\underline{0}\}$. Siis $X=X_1$ ja $Y=Y_1$, joten $V=M\oplus N$.

2) Oletetaan nyt, että $V=M\oplus N$. Jos $X\in M\cap N$, niin $X\in M$ ja $-X\in N$. Siis $\underline{0}=X+(-X)\in M+N$. Koska $\underline{0}=\underline{0}+\underline{0}\in M+N$ ja summa on suora, niin esityksen yksikäsitteisyyden nojalla $X=\underline{0}$. Siis $M\cap N=\{\underline{0}\}$. mot

Esimerkkejä.

Lause 6.3. Olkoot M ja N vektoriavaruuden V äärellisulotteisia aliavaruuksia. Tällöin myös $M+N$ on äärellisulotteinen ja $\dim(M+N)=\dim M+\dim N-\dim(M\cap N)$.

Tod. Leikkaus $M\cap N$ on avaruuden V aliavaruus (Totea!) ja Lauseen 4.4 nojalla $\dim(M\cap N)\leq\min\{\dim M,\dim N\}$. Merkitään seuraavassa $\dim M=r$, $\dim N=s$ ja $\dim(M\cap N)=t$.

Olkoon ensin $t>0$. Olkoon $E=\{X_1,\ldots,X_t\}$ jokin laikkauksen $M\cap N$ kanta. Lauseen 4.4 mukaan E voidaan täydentää aliavaruuden M kannaksi $E_1=\{X_1,\ldots,X_t,Y_1,\ldots,Y_{r-t}\}$ ja aliavaruuden N kannaksi $E_2=\{X_1,\ldots,X_t,Z_1,\ldots,Z_{s-t}\}$.

Koska $M,N\subseteq M+N$, niin $F=\{X_1,\ldots,X_t,Y_1,\ldots,Y_{r-t},Z_1,\ldots,Z_{s-t}\}\subseteq M+N$. Osoitetaan, että F on summan $M+N$ kanta, jolloin $\dim(M+N)=r+s-t=\dim M+\dim N-\dim(M\cap N)$. Todistus täydennetään luennolla. mot

Seuraus. Jos vektoriavaruus V on äärellisulotteinen ja $V=M+N$, niin

1) $\dim V\leq\dim M+\dim N$,

2) $\dim V=\dim M+\dim N$ jos ja vain jos $V=M\oplus N$.

Tod. Seuraus 1) saadaan Lauseesta 6.3. Edelleen tämän lauseen nojalla $\dim V=\dim M+\dim N$ täsmälleen, kun $\dim(M\cap N)=0$ eli $M\cap N=\{\underline{0}\}$. Lauseen 6.2. nojalla tämä on yhtäpitävää ehdon $V=M\oplus N$ kanssa. mot

Lause 6.4. Jos M on äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruus, niin on olemassa sellainen avaruuden V aliavaruus N, että $V=M\oplus N$.

Huomautus. Edellisen lauseen N ei ole yksikäsitteinen.

Tod. Jos $M=\{\underline{0}\}$ tai V, valitaan vastaavasti $N=V$ tai $\{\underline{0}\}$. Olkoon nyt $M\neq\{\underline{0}\}$, V. Olkoon $\{X_1,\ldots,X_p\}$ jokin aliavaruuden M kanta (Lause 4.4). Täydennetään tämä avaruuden V kannaksi $\{X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q\}$ (edelleen Lause 4.4), jolloin $\dim V = p + q$. Jos valitaan $N = L(\{Y_1, \dots, Y_q\})$, niin $V = M + N$ ja $\dim V = \dim M + \dim N$. Seurauksen 2) nojalla $V = M \oplus N$. mot