Lause 6.3. Olkoot M ja N vektoriavaruuden V äärellisulotteisia aliavaruuksia. Tällöin myös $M+N$ on äärellisulotteinen ja $\dim(M+N) = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N)$.

Todistus. Leikkaus $M \cap N$ on avaruuden V aliavaruus (totea!) ja Lauseen 4.4 nojalla $\dim(M \cap N) \leq \min\{\dim M, \dim N\}$. Merkitään seuraavassa $\dim M = r$, $\dim N = s$ ja $\dim(M \cap N) = t$.

Olkoon ensin $t > 0$. Olkoon $F = \{X_1, \dots, X_t\}$ jokin leikkauksen $M \cap N$ kanta. Lauseen 4.4 mukaan F voidaan täydentää sekä aliavaruuden M että aliavaruuden N kannaksi. Olkoot näin saadut kannat

$$\begin{aligned} F_1 &= \{X_1, \dots, X_t, Y_1, \dots, Y_{r-t}\} \subseteq M \qquad \text{ja} \\ F_2 &= \{X_1, \dots, X_t, Z_1, \dots, Z_{s-t}\} \subseteq N. \end{aligned}$$

Koska $M, N \subseteq M+N$, niin

$$E = F_1 \cup F_2 = \{X_1, \dots, X_t, Y_1, \dots, Y_{r-t}, Z_1, \dots, Z_{s-t}\} \subseteq M+N.$$

Osoitetaan, että E on summan $M+N$ kanta, jolloin $\dim(M+N) = r+s-t = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N)$.

1) Viritys: Olkoon $X = Y + Z \in M + N$, missä $Y \in M = L(F_1)$ ja $Z \in N = L(F_2)$. Tällöin $X \in L(E)$, joten $M + N \subseteq L(E)$. Toisaalta selvästi $L(E) \subseteq M + N$, joten $M + N = L(E)$.

2) Lineaarinen riippumattomuus: Olkoon

$$\underbrace{a_1X_1 + \cdots + a_tX_t}_{=:X} + \underbrace{b_1Y_1 + \cdots + b_{r-t}Y_{r-t}}_{=:Y} + \underbrace{c_1Z_1 + \cdots + c_{s-t}Z_{s-t}}_{=:Z} = \underline{0}.$$

Siis $X+Y+Z = \underline{0}$ eli $-Y = X+Z \in N$. Toisaalta $-Y \in M$, joten $-Y \in M \cap N$. Myös $-X \in M \cap N$, joten $Z = -X - Y \in M \cap N$. Siten on olemassa sellaiset $d_1, \dots, d_t \in K$, että

$$Z = c_1Z_1 + \cdots + c_{s-t}Z_{s-t} = d_1X_1 + \cdots + d_tX_t$$

eli

$$c_1Z_1 + \cdots + c_{s-t}Z_{s-t} - d_1X_1 - \cdots - d_tX_t = \underline{0}.$$

Koska F_2 on kanta, niin $d_1 = \cdots = d_t = c_1 = \cdots = c_{s-t} = 0$. Täten

$$a_1X_1 + \cdots + a_tX_t + b_1Y_1 + \cdots + b_{r-t}Y_{r-t} = \underline{0}$$

ja koska F_1 on kanta, niin $a_1 = \cdots = a_t = b_1 = \cdots = b_{r-t} = 0$. Näin ollen joukko E on lineaarisesti riippumaton.

Kohdat 1) ja 2) antavat nyt väitteen. Jos $t = 0$, valitaan kannat $F_1 = \{Y_1, \dots, Y_r\} \subseteq M$ ja $F_2 = \{Z_1, \dots, Z_s\} \subseteq N$. Joukko $E = F_1 \cup F_2$ osoitetaan summan $M+N$ kannaksi samoin kuin edellä, vektorit X_i vain puuttuvat. mot