Matematiikan perusteet taloustieteilijöille 1a

802152P

Luentomoniste
Kari Myllylä
Niina Korteslahti
Oulun yliopisto
Matemaattisten
tieteiden laitos
Syksy 2013

Sisältö

1 Perusmatematiikkaa

1.1 Lukujoukot

Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Positiivisten luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$

Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\}$

Kun täydennetään rationaalilukujen joukkoa $\mathbb{Q}$ vielä *irrationaaliluvuilla* (luvuilla, joiden desimaaliosa on päättymätön ja jaksoton), saadaan *reaalilukujen* joukko $\mathbb{R}$.

Reaaliluvuilla on voimassa seuraavat laskulait ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

- kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

- assosiatiivisuus eli liitännäisyys

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$$

- distributiivisuus eli osittelulaki

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$$

1.2 Rationaalilukujen laskutoimitukset

($a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$)

- laventaminen

$${}^{k)}\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \quad k \neq 0$$

- supistaminen

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}, \quad k \neq 0$$

- yhteenlasku (lavennus samannimisiksi)

$${}^{d)}\frac{a}{b} + {}^{b)}\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

- vähennyslasku (lavennus samannimisiksi)

$$ {}^{d)}\frac{a}{b} - {}^{b)}\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd} $$

- kertolasku

$$ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} $$

- jakolasku

$$ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} $$

Esimerkki 1.1. Esitä seuraavat luvut murtolukuina, jos mahdollista.

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{1}{2} : \dfrac{2}{3}$ e) $1,23567$

b) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}$ d) $2 \cdot \left(3 + \dfrac{2}{3}\right)$ f) $3.123123123123\ldots$

g) $3.123454545\ldots$

1.3 Potensseista ja juurista

Olkoon a reaaliluku ja $n \in \mathbb{N}_+$. Tällöin määritellään $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (tekijöitä a on n kappaletta).

Siis $a^1 = a$ ja $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Lisäksi $a^0 = 1$ ja $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Potenssin laskulakeja: $(a, b \in \mathbb{R}$ ja $m, n \in \mathbb{Z})$

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

7) $1^n = 1$

8) Jos $0 \le a, b$, niin $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

9) Jos $0 \le a < b$, niin $0 \le a^2 < b^2$

10) Jos $0 \le a, b$ ja $n \in \mathbb{N}_+$, niin $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$

11) Jos $0 \le a < b$ ja $n \in \mathbb{N}_+$, niin $0 \le a^n < b^n$

Juuret:

Olkoon nyt $a \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ kokonaisluku. Yhtälön $x^n = a$ (positiivista) ratkaisua sanotaan *luvun a n:nneksi juureksi* ja merkitään: $x = \sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a}$: mikä luku n:teen korotettuna antaa luvun a?

Siis $\ x = \sqrt[n]{a} \quad \Rightarrow \quad x^n = a.$

Lisäksi $\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ $ ja $\ a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$

Huomautus.

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Esimerkki 1.2. Sievennä lauseke

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})$$

1.4 Induktioperiaate

Jos on todistettava, että jokin väite $P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}_+$, toimitaan seuraavasti:

(i) Osoitetaan, että $P(1)$ on tosi (ts. väite arvolla $n = 1$).

(ii) Oletetaan, että $P(k)$ on tosi jollakin luonnollisella luvulla k (ts. väite arvolla $n = k$) (*induktio-oletus*).

(iii) Osoitetaan induktio-oletusta käyttäen, että myös $P(k+1)$ on tosi (ts. väite arvolla $n = k+1$) (*induktioväite*).

(i)–(iii) $\Rightarrow$ väite $P(n)$ tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}_+$.

Esimerkki 1.3. Osoita, että $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ aina, kun $n \in \mathbb{N}_+$.

Esimerkki 1.4. Osoita, että $n + n^2 = 2n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_+$.

1.5 Merkintöjä ja muuta tärkeää

$\exists$ = on olemassa $\quad\quad$ $\nexists$ = ei ole olemassa $\quad\quad$ $\forall$ = kaikilla, aina kun

∞ = ääretön $\quad\quad$ $-\infty$ = miinus ääretön

$\vee$ = tai : Riittää kun kumpi tahansa ehdoista on voimassa

$\wedge$ = ja : Molempien ehtojen oltava voimassa yhtä aikaa

$\cup$ = unioni (joukoilla) $\quad\quad$ $\cap$ = leikkaus (joukoilla)

$\Rightarrow$ = implikaatio (jos ..., niin... *tai* ... seuraa...)

$\Leftrightarrow$ = ekvivalenssi (jos ja vain jos *tai* yhtäpitävää)

Esimerkki 1.5.

Tulon 0–sääntö:

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \vee \quad g(x) = 0 \quad \vee \quad h(x) = 0$$

Epäyhtälöiden ominaisuuksia:

Olkoot a ja b reaalilukuja. Tällöin

$a < b \;\Leftrightarrow\; a + c < b + c$ aina, kun $c \in \mathbb{R}$

$a < b \;\Leftrightarrow\; ac > bc$, kun $c < 0$

$a < b \;\Leftrightarrow\; ac < bc$, kun $c > 0$

$0 < a < b \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

$a < b$ ja $b < c \;\Rightarrow\; a < c$

$a < b \;\Leftrightarrow\; a^2 < b^2,$ kun $a, b > 0$

$a < b \;\Leftrightarrow\; a^n < b^n,$ kun $a, b > 0$ ja $n \in \mathbb{N}_+$

Yllä $<$ voidaan korvata merkeillä $\geq$, $>$ ja $\leq$.

Summa ja tulo:

Olkoot $x_1, \ldots, x_n$ reaalilukuja. Tällöin merkitään:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_n \quad \text{ja} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Induktioperiaatteen nojalla voidaan liitäntä-, vaihdanta- ja osittelulakien nojalla osoittaa, että

1)
$$c \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (cx_i) \ , \quad c = \text{vakio}$$

2)
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

3)
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i + nc \ , \quad c = \text{vakio}$$

Esimerkki 1.6. Olkoon $x_i = 2i$ ja $y_i = i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}_+$. Laske

$$\text{a) } 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i \qquad \text{b) } \sum_{i=1}^{2} (x_i + y_i) \qquad \text{c) } \sum_{i=1}^{3} (x_i + 2)$$

Reaaliakselin välit:

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$.

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ avoin väli

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ suljettu väli

$$\left.\begin{aligned}]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \end{aligned}\right\} \text{puoliavoimet välit}$$

$$\left.\begin{aligned}
&]a,\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>a\}\\
&[a,\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq a\}\\
&]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<a\}\\
&]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq a\}\\
&]-\infty,\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\infty<x<\infty\}=\mathbb{R}
\end{aligned}\right\}\text{äärettömät}$$

2 Funktiot

2.1 Funktion määritelmä

Olkoot X ja Y joukkoja ja f funktio eli kuvaus joukosta X joukolle Y; merkitään $f : X \to Y$. Tällöin funktio f kuvaa kunkin joukon X alkion x *täsmälleen yhdeksi* joukon Y alkioksi $f(x)$.

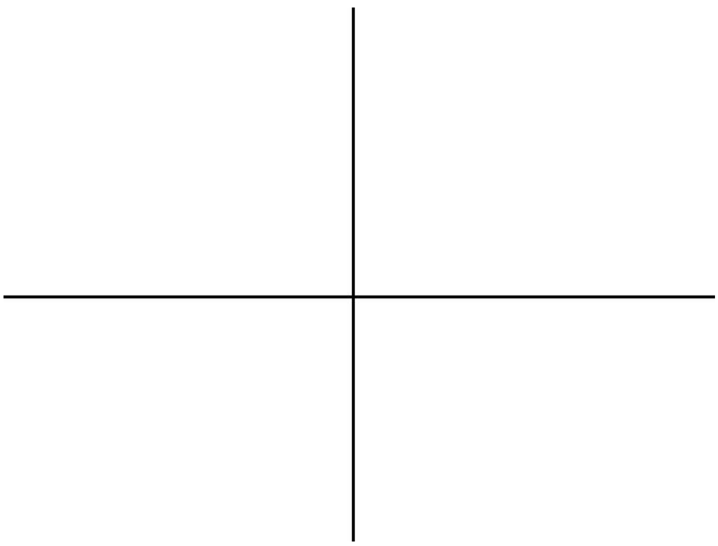
Joukko $X = D_f$ on funktion f *määrittelyjoukko*, eli joukko, jossa funktion arvo voidaan määrittää. Joukko Y on funktion f maalijoukko, joka sisältää mm. funktion arvot. Lisäksi x on *muuttuja*, joka edustaa määrittelyjoukon alkioita. Merkintä $y = f(x)$ tarkoittaa: y on funktion f *arvo* muuttujan arvolla x. Funktion f arvojen joukkoa

$$R_f = \{f(x) \,|\, x \in D_f\} \;\subseteq\; Y$$

sanotaan funktion f *arvojoukoksi*.

2.2 Funktion kuvaaja (graafinen esitys)

Joukon $B_f = \{(x, y) \,|\, y = f(x),\ x \in D_f\}$ kuvaa xy–koordinaatistossa sanotaan funktion f kuvaajaksi. Puhutaan myös käyrästä $y = f(x)$.



Eräiden funktioiden kuvaajia:

1. Vakiofunktio

   $f(x) = c \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ c = \text{vakio}$

   $D_f = \qquad\qquad R_f =$

2. Identtinen funktio

   $f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

   $D_f = \qquad\qquad R_f =$

3. Itseisarvofunktio

   $$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$

   $D_f = \qquad\qquad R_f =$

2.3 Funktion kasvavuus ja vähenevyys

Reaalifunktio $f(x)$ on välillä I $(\subset \mathbb{R})$.

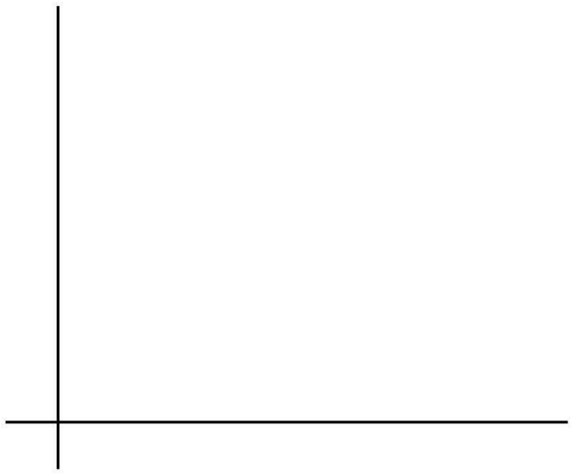
- *kasvava*, jos $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
- *aidosti kasvava*, jos $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$
- *vähenevä*, jos $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$
- *aidosti vähenevä*, jos $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

aina, kun $x_1, x_2 \in I$.

Funktio f on välillä I *monotoninen*, jos se on tällä välillä kasvava tai vähenevä ja aidosti monotoninen, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Funktio f on välillä I paloittain monotoninen, jos väli I voidaan jakaa osaväleihin, joilla kullakin f on monotoninen.

Esimerkki 2.1. Osoita, että $f(x) = 5x - 3$ on aidosti kasvava.

2.4 Funktion kuperuus



Olkoon $f(x)$ reaalifunktio. Tarkastellaan väliä $[x_1, x_2]$. Mielivaltainen välin $[x_1, x_2]$ piste z voidaan esittää muodossa:

$$
\begin{aligned}
z &= x_1 + \beta(x_2 - x_1)\,, && 0 \le \beta \le 1 \\
&= (1-\beta)x_1 + \beta x_2 \\
&= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\,, && 0 \le \alpha \le 1, \quad \alpha = 1 - \beta
\end{aligned}
$$

Pisteen Q y–koordinaatti on $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$. Koska kuviossa on yhdenmuotoiset kolmiot, niin pisteen P y–koordinaatti on muotoa

$$
\begin{aligned}
f(x_1) + \beta(f(x_2) - f(x_1)) &= (1-\beta)f(x_1) + \beta f(x_2) \\
&= \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)
\end{aligned}
$$

Reaalifunktio $f(x)$ on välillä I *alaspäin kupera*, jos

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \ge f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

aina, kun $x_1, x_2 \in I$ ja $0 \le \alpha \le 1$.

Vastaavasti funktio f on välillä I *ylöspäin kupera*, jos

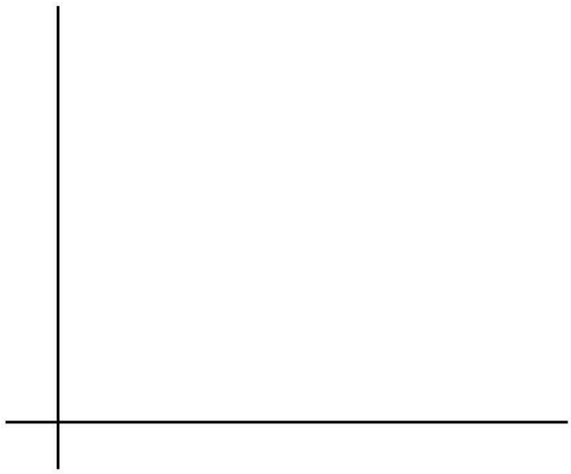
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

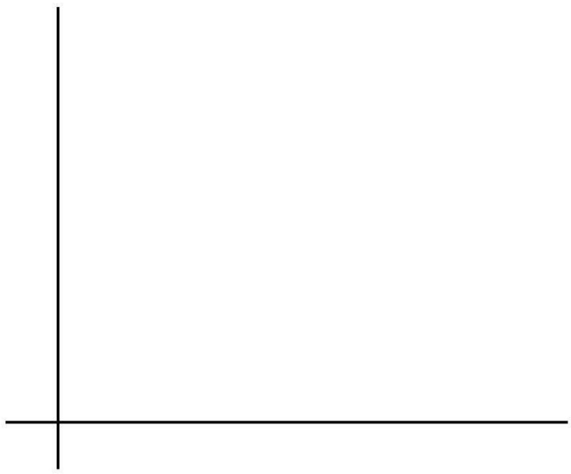
aina, kun $x_1, x_2 \in I$ ja $0 < \alpha < 1$.

Geometrisesti:

Funktio f on *alaspäin kupera* eli *konveksi*, jos jokainen jana, joka piirretään käyrän $y = f(x)$ kaksi pistettä päätypisteinä, on kokonaisuudessaan käyrän $y = f(x)$ yläpuolella tai käyrällä.

Vastaavasti funktio f on *ylöspäin kupera* eli *konkaavi*, jos jokainen jana, joka piirretään käyrän $y = f(x)$ kaksi pistettä päätypisteinään, on kokonaisuudessaan käyrän $y = f(x)$ alapuolella tai käyrällä.





3 Polynomifunktiot

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin n:nnen asteen polynomifunktio on muotoa

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$ vakioita ja $a_n \neq 0$.

Polynomifunktion $f(x)$ määrittelyjoukko $D_f = \mathbb{R}$ ellei muuta sovita.

3.1 Ensimmäisen asteen polynomifunktio eli lineaarinen funktio

Ensimmäisen asteen polynomifunktio on muotoa

$$y = f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Lineaarisen funktion kuvaaja on *suora*:

$a > 0$: $\qquad$ $a < 0$: $\qquad$ $a = 0$:

Olkoon $a > 0$. Tällöin

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) > 0,$$

joten $f(x_1) < f(x_2)$ ja siten $f(x) = ax + b$ on aidosti kasvava.

Olkoon $a < 0$. Tällöin

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) < 0,$$

joten $f(x_1) > f(x_2)$ ja siten $f(x) = ax + b$ on aidosti vähenevä.

Olkoon $a = 0$. Tällöin

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) = 0,$$

joten $f(x_1) = f(x_2)$ ja siten $f(x) = ax + b = b$ on sekä kasvava että vähenevä.

Kulmakerroin:

Olkoot $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_1 < x_2$.

Olkoon $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$ ja $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$.

Nyt $y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Siis vakio a on funktion arvon muutos jaettuna muuttajan arvon muutoksella. Vakio a on suoran *kulmakerroin* ja se ilmaisee funktion *kasvunopeuden* ja suoran nousujyrkkyyden.

Suoran $f(x) = ax + b$ *yhtälö* saadaan määrättyä, kun tunnetaan

- yksi suoran piste ja kulmakerroin

tai

- kaksi suoran pistettä.

Jos suoran kulmakerroin on a ja suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta (siis $y_0 = f(x_0)$), niin suoran yhtälö on

$$y - y_0 = a(x - x_0).$$

Tästä ratkaisemalla y saadaan esille funktio $y = f(x) = ax + b$.

Esimerkki 3.1. Mikä on se lineaarinen funktio, jota vastaava suora kulkee pisteiden $(-1, 3)$ ja $(2, 1)$ kautta?

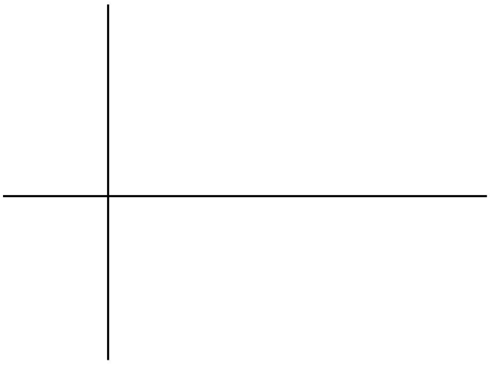
3.1.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

Normaalimuoto:

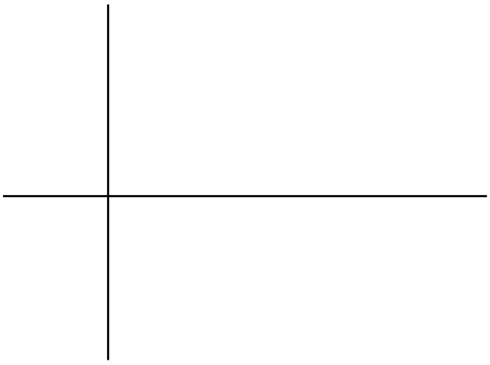
$$ax + b = 0$$

Funktion $f(x) = ax + b$ kuvaaja:

$a > 0:$



$a < 0:$



Yhtälön $ax + b = 0$ ratkaisu on funktion $f(x) = ax + b$ nollakohta eli juuri.

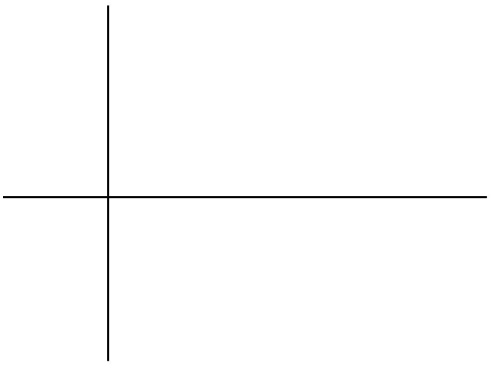
Esimerkki 3.2. $2x + 5 = 0$

3.1.2 Ensimmäisen asteen epäyhtälö

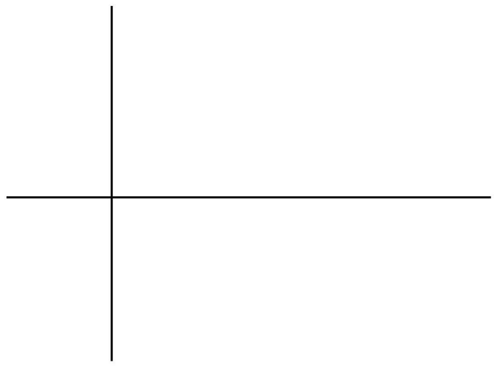
Normaalimuoto:

$$ax + b > 0 \qquad (\leq, \geq, <)$$

$$a > 0: \quad ax + b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax > (-b) \quad | : a \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{b}{a}$$



$$a < 0: \quad ax + b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax > (-b) \quad | : a \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{b}{a}$$



3.2 Toisen asteen polynomifunktio

Toisen asteen polynomifunktio on muotoa $y = f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja:

$a > 0:$

$a < 0:$

Funktio $y = ax^2 + bx + c$ on ylöspäin aukeava paraabeli, kun $a > 0$, ja alaspäin aukeava paraabeli, kun $a < 0$.

3.2.1 Toisen asteen yhtälö

Normaalimuoto:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

Ratkaisuksi saadaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lukua $D = b^2 - 4ac$ kutsutaan diskriminantiksi. Jos

(i) $D > 0$, niin yhtälöllä on 2 erisuurta reaaliratkaisua (nollakohtaa, juurta)

(ii) $D = 0$, niin yhtälöllä on 1 reaaliratkaisu (kaksinkertainen)

(iii) $D < 0$, niin yhtälöllä ei ole reaaliratkaisua (kompleksilukujuuret, ks. MPTT2)

Olkoot x_1 ja x_2 yhtälön (1) nollakohdat. Tällöin lauseke voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Jos x_1 on kaksinkertainen nollakohta, niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

Jos ei nollakohtia $\Rightarrow$ ei jakaannu reaalisiin 1. asteen tekijöihin

Esimerkki 3.3. Osoita, että lauseketta $\frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$ ei voi supistaa.

3.2.2 Toisen asteen epäyhtälö

Normaalimuoto:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (\leq, \geq, <)$$

Ratkaisumenettely:

(i) Ratkaistaan yhtälö

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

(ii) Päätellään ratkaisu paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ kuvaajan (tai merkkikaavion) avulla.

Olkoon $a > 0$.

1. Yhtälöllä (2) kaksi erisuurta juurta x_1 ja x_2.
   $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < x_1$ tai $x > x_2$

   $++ \qquad -- \qquad ++$

2. Yhtälöllä (2) kaksoisjuuri x_1.
   $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq x_1$

   $+++ \qquad\qquad +++$

3. Yhtälöllä (2) ei ole reaalijuuria.
   $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

   $++++++++++++$

Olkoon $a < 0$.

1. Yhtälöllä (2) kaksi erisuurta juurta x_1 ja x_2.
   $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$

   $-- \qquad ++ \qquad --$

2. Yhtälöllä (2) kaksoisjuuri x_1.
   $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow$ ei ratkaisua

   $--- \qquad\qquad ---$

3. Yhtälöllä (2) ei ole reaalijuuria.
   $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Leftrightarrow$ ei ratkaisua

   $-----------$

Esimerkki 3.4. Ratkaise epäyhtälö $x^2 + x - 1 \leq 0$.

3.3 Korkeamman asteen polynomifunktio

Korkeamman asteen polynomifunktio on muotoa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R} \ \ \forall\, i \ \text{ ja } \ a_n \neq 0.$$

Esimerkiksi kolmannen asteen polynomifunktio on muotoa

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$a > 0:$

$a < 0:$

3.3.1 Korkeamman asteen yhtälö

Normaalimuoto:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \tag{3}$$

Ainoita *mahdollisia rationaalilukuratkaisuja* ovat luvut $\frac{p}{q}$, missä p on a_0:n tekijä ja q on a_n:n tekijä.

n. asteen yhtälön ratkaiseminen:

(i) Etsitään edellä mainitut mahdolliset rationaalijuuret.

(ii) Tutkitaan onko jokin niistä todellinen nollakohta sijoittamalla juuriehdokkaat yhtälöön.

(iii) Oletetaan nyt, että $x = x_1$ on todellinen juuri. Tällöin $(x - x_1)$ on yhtälön vasemmanpuolen eli $P(x)$:n tekijä.

(iv) Jaetaan $P(x)$ tekijällä $(x - x_1)$. Saadaan $P(x) = (x - x_1)Q(x)$, missä $Q(x)$ on astetta $n - 1$.

(v) Nyt $P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - x_1 = 0 \ \vee \ Q(x) = 0.$

(vi) Jatketaan ratkaisemalla yhtälö $Q(x) = 0$ samalla tavalla.

Esimerkki 3.5. $2x^3 + 6 = 3x^2 + 5x$

Jos $x_1, \ldots, x_n$ ovat yhtälön (3) nollakohdat, niin lauseke $P(x)$ jakaantuu tekijöihin seuraavasti:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

3.3.2 Korkeamman asteen epäyhtälö

Normaalimuoto:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0 \qquad (\leq, \geq, <)$$

Ratkaisumenettely:

(i) Jaetaan vasen puoli 1. ja 2. asteen tekijöihin.

(ii) Päätellään tekijöiden merkkikaavion avulla epäyhtälön ratkaisu.

Esimerkki 3.6. $x^3 + 6 \geq 2x^2 + 5x$

3.4 Polynomifunktion sovellutuksia taloustieteessä

Sovellus 1:

Olkoon P tavaran hinta. Kuvatkoon $D = aP + b$ *kysynnän* määrää ja $S = cP + d$ *tarjonnan* määrää hinnalla P. Nyt $P, D, S > 0$.

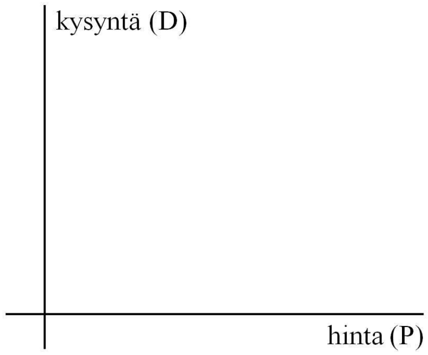
Tällöin on oltava:

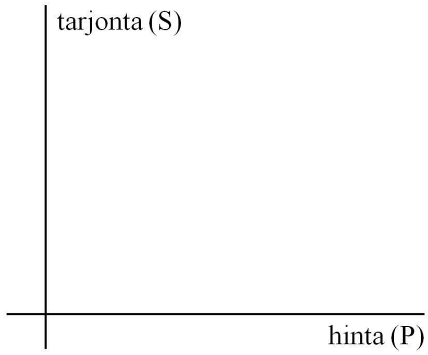
(i) $b > 0$, jotta kysyntä hinnalla 0 olisi positiivinen.

(ii) $a < 0$, jotta kysyntä hinnan noustessa pienenisi.

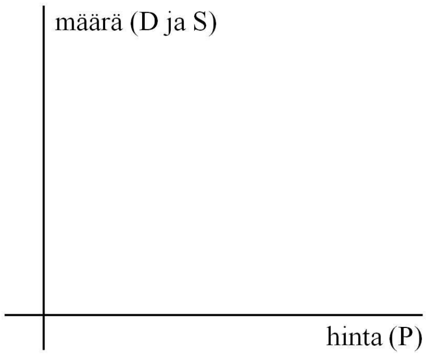
(iii) $d < 0$, jotta tarjonta olisi negatiivinen hinnalla 0.

(iv) $c > 0$, jotta tarjonta hinnan noustessa kasvaisi.





Kysynnän ja tarjonnan tasapaino:



Tasapainossa $D = S$

$$\begin{cases} D = aP + b \\ S = cP + d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad cP + d = aP + b$$

$$\Leftrightarrow \quad (c-a)P = b - d$$

$$\Leftrightarrow \quad P = \frac{b-d}{c-a} \quad \text{(hinta, jolla kysyntä ja tarjonta ovat tasapainossa)}$$

$$\Rightarrow \quad D = a \cdot \frac{b-d}{c-a} + b \quad \text{(kysynnän ja tarjonnan määrä)}$$

Sovellus 2:

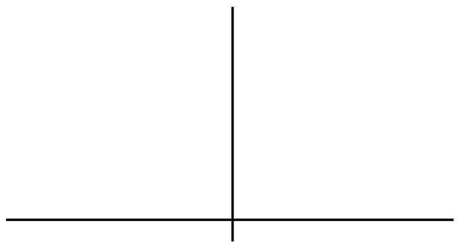
Olkoot hyödykemäärän x kokonaistuotantokustannukset $C(x) = ax^2 + bx + c$, missä a, b ja c ovat positiivisia vakioita. Jos tuotetta myydään yksikköhintaan P, niin kokonaistuotto $R(x) = Px$. Voitto $\Pi(x)$ on tällöin

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) = Px - (ax^2 + bx + c) = -ax^2 + (P - b)x - c.$$

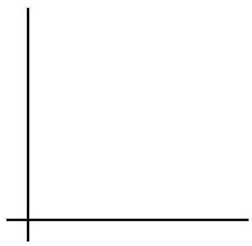
Laskemalla suoran $R(x)$ ja paraabelin $C(x)$ leikkauspisteet, saadaan ne arvot x (määrät), joilla voitto $\Pi(x) = 0$ eli kokonaistuotto=tuotantokustannukset.

Siis

$$\begin{cases} R(x) = Px \\ C(x) = ax^2 + bx + c \end{cases}$$



Koska voiton $\Pi(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, voitto on positiivinen leikkauspisteiden välisillä (tuotannon määrän) arvoilla.



Maksimivoitto (Π_{max}) saavutetaan paraabelin huippua vastaavalla tuotannonmäärän arvolla.

4 Rationaalifunktio

Rationaalifunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Rationaalifunktion määrittelyjoukko D_f määräytyy ehdosta $Q(x) \neq 0$.

4.1 Murtoyhtälö

Normaalimuoto:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Ehto $Q(x) \neq 0$.

Ratkaisumenettely:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = 0$$

Esimerkki 4.1.

$$\frac{5 - x}{2x + 1} = 3$$

Nopeuttava ratkaisuvaihtoehto: voit kertoa nimittäjällä puolittain.

4.2 Murtoepäyhtälö

Normaalimuoto:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \qquad (<, \leq, \geq)$$

Ehto $Q(x) \neq 0$.

Ratkaisumenettely:

(i) Osoittaja ja nimittäjä jaetaan 1. ja 2. asteen tekijöihin.

(ii) Päätellään merkkikaavion avulla epäyhtälön ratkaisu.

Esimerkki 4.2. $\frac{5-x}{2x+1} \leq 3$

Nopeuttava ratkaisuvaihtoehto: voit kertoa nimittäjällä, jos olet varma sen merkistä, tai huomioit merkin vaihtumisen (osavälijako).

5 Itseisarvofunktio

Jos $a \in \mathbb{R}$, niin

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0. \end{cases}$$

Samoin

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{kun } f(x) < 0. \end{cases}$$

Itseisarvoja sisältävän funktion määrittelyjoukko $D_f = \mathbb{R}$, ellei muuta sovita.

Huomautus. $|f(x)| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

5.1 Itseisarvoyhtälö

Ratkaisumenettely:

Itseisarvoyhtälön ratkaisemiseksi *itseisarvomerkit poistetaan* tutkimalla itseisarvon sisällä olevan lausekkeen positiivisuutta/negatiivisuutta määrittelyjoukossa ja tämän jälkeen *ratkaistaan yhtälö* (osavälijako).

Esimerkki 5.1. $|x-3| + |x+2| = 10$

Nopeuttavia sääntöjä itseisarvoyhtälön ratkaisussa:

1. $|f(x)| = |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ tai } f(x) = -g(x)$

2. $|f(x)| = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = a \text{ tai } f(x) = -a, \text{ kun } a > 0 \\ f(x) = 0, \text{ kun } a = 0 \\ \text{ei ratkaisua, kun } a < 0 \end{cases}$

3. $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \text{ tai } f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Varmin tapa:

Jos yhtälössä *useita itseisarvolausekkeita*, niin poistetaan itseisarvot *aina* tarkastelemalla erikseen joukkoja, joissa itseisarvon sisällä oleva lauseke on positiivinen tai negatiivinen (osavälijako).

Esimerkki 5.2. $|x-1| = \frac{x}{2}$

5.2 Itseisarvoepäyhtälö

Ratkaisumenettely:

Poistetaan itseisarvomerkit ja ratkaistaan saatu epäyhtälö (osavälijako).

Esimerkki 5.3. $|x-3| + |x+2| < 10$

Nopeuttavia sääntöjä itseisarvoepäyhtälön ratkaisussa:

1.

$$\begin{aligned} |f(x)| < g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad -g(x) < f(x) < g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad -g(x) < f(x) \ \textbf{ja} \ f(x) < g(x) \end{aligned}$$

Jos $g(x) \leq 0$, ratkaisua ei ole.

2.

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < -g(x) \ \textbf{tai} \ f(x) > g(x)$$

Jos $g(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ epäyhtälö voimassa.

3. Jos epäyhtälön *molemmat* puolet *positiivisia*, *korota* puolittain *toiseen*.

Varmin tapa:

Jos itseisarvolausekkeita on useampia, niin itseisarvomerkit voidaan poistaa tarkastelemalla erikseen joukkoja, joissa itseisarvomerkkien sisällä oleva lauseke on positiivinen tai negatiivinen (osavälijako).

Esimerkki 5.4. $|x-6| \geq 3-2x$

Esimerkki 5.5. $|x-6| \leq |x-1|$

Esimerkki 5.6. $|x-6| < 3-2x$

6 Neliöjuurifunktio

Sisältää termin

$$\sqrt{f(x)}$$

Määrittelyjoukko määräytyy ehdosta $f(x) \geq 0$.

Huomautus.

1. $\sqrt{f(x)} \geq 0$ aina, kun $f(x) \geq 0$
2. $\sqrt{f(x)}$ ei ole olemassa, kun $f(x) < 0$
3. $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = f(x)$.

6.1 Neliöjuuriyhtälö

Perusmuoto:

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

Jotta reaalinen ratkaisu on olemassa, on oltava voimassa ehto:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Tällöin yhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen:

$$\begin{aligned} & \sqrt{f(x)} = g(x) \quad |\ (\ )^2 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = g(x)^2 \end{aligned}$$

Ratkaisumenettely neliöjuurta sisältävissä yhtälöissä:

(i) Siirretään termejä sopivasti.

(ii) Tarkastellaan ehdot.

(iii) Korotetaan puolittain toiseen.

(iv) Ratkaistaan yhtälö.

(v) Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisut alkuperäisen yhtälön. (Tarpeen, jos ehtoja ei ole huomioitu.)

Esimerkki 6.1. $\sqrt{3x+1} + x - 1 = 0$

6.2 Neliöjuuriepäyhtälö

1. Perusmuoto:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \qquad [<]$$

Ehdot:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \qquad\qquad [>] \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} & \sqrt{f(x)} \leq g(x) \quad |(\ )^2 \quad [<] \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) \leq g(x)^2 \qquad\qquad [<] \\ \Leftrightarrow \quad & \ldots \end{aligned}$$

2. Perusmuoto:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \qquad [>]$$

Osavälijako:

$$\begin{aligned} 1^o \quad & g(x) \geq 0 \\ 2^o \quad & g(x) < 0 \end{aligned}$$

Ratkaisu:

$1^o \quad g(x) \geq 0$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \qquad [>]$$

Ehto: $f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} & \sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad |(\ )^2 \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) \geq g(x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \ldots \end{aligned}$$

$2^o \quad g(x) < 0$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \qquad [>]$$

Ehto: $f(x) \geq 0$

Tällä osavälillä ko. ehdon ollessa voimassa, epäyhtälö $f(x) \geq g(x)$ toteutuu.

3. Jos molemmat puolet ovat positiivisia, niin korota epäyhtälö puolittain toiseen.

7 Potenssifunktio

Potenssifunktio on muotoa

$$f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad r \neq 0.$$

Määrittelyjoukko $D_f = \mathbb{R}_+$, tai jotain laajempaa riippuen eksponentista r.

Esimerkki 7.1.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

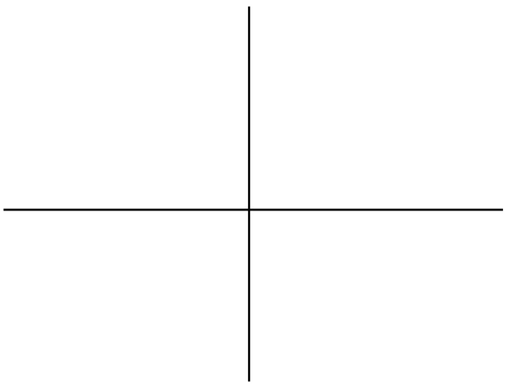
c) $f(x) = x^{-3}$

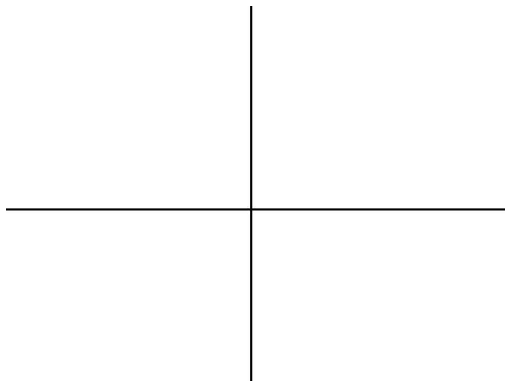
d) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

f) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

Potenssifunktio $f(x) = x^r$ on joukossa $\mathbb{R}_+$ aidosti kasvava, kun $r > 0$, ja aidosti vähenevä, kun $r < 0$.





7.1 Potenssiyhtälö

- $x^p = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[p]{a}$, kun p parillinen ja $a \geq 0$
- $x^p = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[p]{a}$, kun p pariton
- $x^p = a \quad \Leftrightarrow$ ei ratkaisua, kun p on parillinen ja $a < 0$

Esimerkki 7.2. Ratkaise yhtälöt

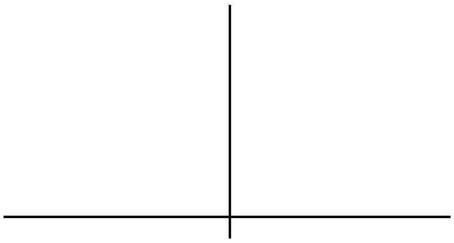
a) $x^2 = 5$	d) $x^2 = -3$
b) $x^3 = 5$	e) $x^3 = -3$
c) $x^4 = 5$	f) $x^4 = -3$

8 Eksponenttifunktio

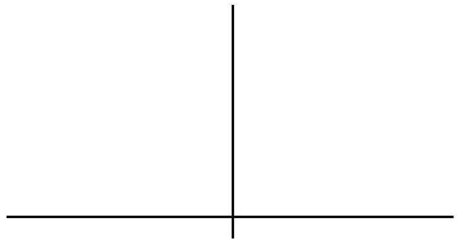
Funktio $y = f(x) = a^x$ on *a–kantainen eksponenttifunktio*, kun $a > 0$ ja $a \neq 1$. Määrittely- ja arvojoukko: $D_f = \mathbb{R}$ ja $R_f = \mathbb{R}_+$.

Funktio $f(x) = a^x$ on aidosti kasvava, kun $a > 1$, ja aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.

$a > 1:$



$0 < a < 1:$



Edellisen perusteella saadaan:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{kun } a > 1 \\ x_1 > x_2, & \text{kun } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Siis

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), & \text{kun } a > 1 \\ f(x) > g(x), & \text{kun } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Erityisen tärkeä on *e–kantainen* eksponenttifunktio $f(x) = e^x$, jonka kantaluku on *Neperin luku* $e \approx 2,718$.

Esimerkki 8.1. Ratkaise yhtälöt

$$\text{a)} \quad 4 \cdot 4^x = \frac{1}{8} \qquad \text{b)} \quad 81^{-2x} = \frac{1}{\sqrt[6]{27}}$$

Esimerkki 8.2. Ratkaise epäyhtälöt

$$\text{a)} \quad 2^{2-x} < \frac{1}{4} \qquad \text{b)} \quad 3^x - \frac{3}{3^x} + 2 > 0$$

9 Logaritmifunktio

Tarkastellaan yhtälöä $x = a^y$, missä $a > 0$ ja $a \neq 1$. Siten y on se potenssi, johon a on korotettava, jotta saadaan x.

Luku y määritellään *luvun x a–kantaiseksi logaritmiksi* ja merkitään $y = \log_a x$.

Siis $y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$.

$\log_a x$: Mihin a on korotettava, jotta saadaan x?

Saadaan funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log_a x, \quad D_f =]0, \infty[\quad \text{ja} \quad R_f = \mathbb{R}.$$

Logaritmin ominaisuuksia:

Olkoon $x, y > 0$, $z \in \mathbb{R}$. Tällöin

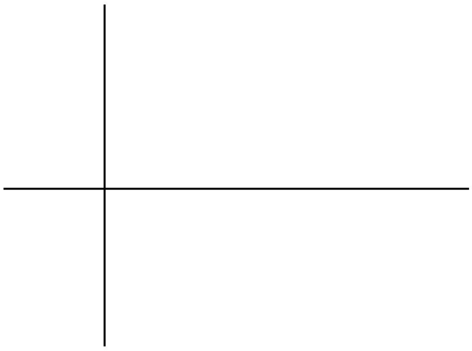
1) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
2) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3) $\log_a x^z = z \cdot \log_a x$
4) $\log_a a = 1$
5) $\log_a 1 = 0$
6) $\log_a a^{f(x)} = f(x)$
7) $a^{\log_a f(x)} = f(x)$
8) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

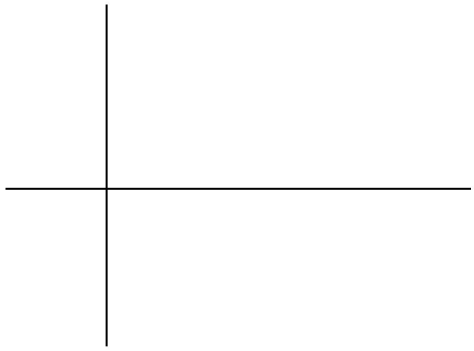
Sovellusten kannalta e–kantainen eli *luonnollinen logaritmi* on tärkeä. Funktiota merkitään

$$f(x) = \log_e x = \ln x.$$

Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$ on aidosti kasvava, kun $a > 1$, ja aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.

$a > 1:$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $0 < a < 1:$





Edellisen perusteella saadaan:

$(x_1, x_2 > 0)$

$$
\begin{aligned}
\log_a x_1 = \log_a x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \\
\log_a x_1 < \log_a x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 < x_2, & \text{kun } a > 1 \\ x_1 > x_2, & \text{kun } 0 < a < 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Siis

$(f(x),\ g(x) > 0)$

$$
\begin{aligned}
\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \\
\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), & \text{kun } a > 1 \\ f(x) > g(x), & \text{kun } 0 < a < 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 9.1. Määritä a) $\log_4 256$ b) kantaluku a, kun $\log_a 0,001 = -3$.

Esimerkki 9.2. Ratkaise epäyhtälö $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) > \log_{\frac{1}{3}}(5x-2)$

Esimerkki 9.3. Ratkaise epäyhtälö $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) < 2 + \log_{\frac{1}{3}}(2x)$

Esimerkki 9.4. a) $2^x = 3$ b) $2e^x = 7$

Esimerkki 9.5. a) $2^{3x} = 3^{2x}$ b) $\log_2(2x) = \log_4 x$

10 Eksponentti- ja logaritmifunktion sovelluksia taloustieteessä

Koronkorko:

Jos korkokanta on $100 \cdot i$ prosenttia *vuodessa* ja korko lisätään alkupääomaan x k kertaa vuodessa, niin n:n vuoden kuluttua pääoma on

$$y = x \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk}$$
$$y = xe^{in}, \quad \text{kun } k \text{ on suuri.}$$

Kasvufunktiot:

Kasvufunktioilla voidaan esittää:

- yrityksen työntekijöiden lukumäärä vuotuisen myynnin funktiona
- käytetyn pääoman määrä ajan funktiona
- myynti mainoskulujen funktiona
- käyttökustannukset koneen käyttöajan funktiona
- myynnin määrä markkinoilla olon funktiona

Kasvufunktiot ovat *kasvavia* funktioita.

1^o Biologista kasvua kuvaavat funktiot

Monia biologisen kasvun lakeja voidaan esittää yhtälöllä

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 R^t, \quad \text{missä} \\ N(t) &= \text{populaation jäsenten lukumäärä ajan hetkellä } t \\ N_0 &= \text{populaation jäsenten lukumäärä ajan hetkelä } t = 0 \text{ (eli alussa)} \\ R &= \text{kasvun aste } (> 0) \end{aligned}$$

Oletus: Jokainen populaation jäsen lisää populaation määrää $R - 1$ jäsenellä aikayksikössä ja kukaan jäsenistä ei kuole.

Edellistä funktiota voidaan jossain määrin käyttää kuvaamaan nopeasti kehittyvän yrityksen kasvun alkua.

Esimerkki 10.1. Yhtiö aloittaa toimintansa 5:llä työntekijällä. Kunkin vuoden lopussa jokainen työntekijä palkkaa 3 apulaista. Kuinka monta työntekijää yhtiössä on 10 vuoden kuluttua, jos kukaan ei poistu yhtiön palveluksesta?

Ratkaisu:

$$N(10) = 5 \cdot 4^{10} = 5\,242\,880$$

2^o Gompertzin funktiot

Gompertzin funktiot ovat muotoa

$$\begin{aligned} N(t) &= ca^{R^t}, \quad \text{missä} \\ R &= \text{kasvun aste } (> 0) \\ a &= \text{alkupopulaation suhteellinen osuus populaation ylärajasta } 0 < a < 1 \\ c &= \text{populaation yläraja } (c > 0) \end{aligned}$$

Kun $t = 0$, niin $N(0) = ca$.

Esimerkki 10.2. Yrityksen työntekijöiden lukumäärän kehitystä kuvataan funktiolla

$$N(t) = 200 \cdot (0,04)^{0,5^t},$$

missä $N(t)$ on työntekijöiden lukumäärä t toimintavuoden jälkeen. Kuinka monta työntekijää yhtiössä oli alunperin? Entä 3 vuoden jälkeen? Kuinka paljon henkilökuntaa yhtiössä on yrityksen ollessa suurimmillaan?

Ratkaisu:

Työntekijöitä alunperin:

$$N(0) = 200 \cdot (0,04)^{0,5^0} = 8$$

Työntekijöitä 3 vuoden jälkeen:

$$N(3) = 200 \cdot (0,04)^{0,5^3} = 133,748... \approx 133$$

Työntekijöitä yrityksen ollessa suurimmillaan:

Koska populaation yläraja $c = 200$, niin työtekijöitä on enimmillään 200.

3^o Oppimisfunktiot

Psykologit käyttävät funkiota

$$y = c - ae^{-kt}, \quad t = \text{aika}$$

kuvaamaan oppimista. (c, a ja k ovat positiivisia vakioita)

Edellä mainittua muotoa olevia funktioita voidaan käyttää esittämään kustannus- ja tuotantofunktioita.

11 Funktioiden algebraa

11.1 Funktioiden laskutoimituksia

Funktioiden *yhtäsuuruus:* Funktiot f ja g ovat yhtäsuuret eli samat jos ja vain jos niiden määrittelyjoukot ovat samat ja arvot yhtyvät, ts.

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad D_f = D_g \quad \text{ja} \quad f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in D_f$$

Esimerkki 11.1. Ovatko funktiot $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ ja $g(x) = x - 1$ samat?

Määritellään:

$$\begin{aligned}
&(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) && D_{f\pm g} = D_f \cap D_g \\
&(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) && D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g \\
&\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} && D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \,|\, g(x) = 0\} \\
&(cf)(x) = c \cdot f(x), \quad c = \text{vakio} && D_{cf} = D_f
\end{aligned}$$

Esimerkki 11.2. Määrää funktioiden $f(x) = \sqrt{x-1}$ ja $g(x) = \sqrt{2-x}$ tulo- ja osamääräfunktio.

Funktio f on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)\ \forall\, x \in D_f$, ja *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in D_f$.

11.2 Yhdistetty funktio

Annettujen funktioiden f ja g *yhdistetty* funktio

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ja

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in D_g \text{ ja } g(x) \in D_f\}.$$

Funktio f on *ulkofunktio* ja g on *sisäfunktio*.

Huomautus. $g \circ f$ on yleensä eri kuin $f \circ g$ (ei vaihdannainen). Kuitenkin $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (liitännäinen).

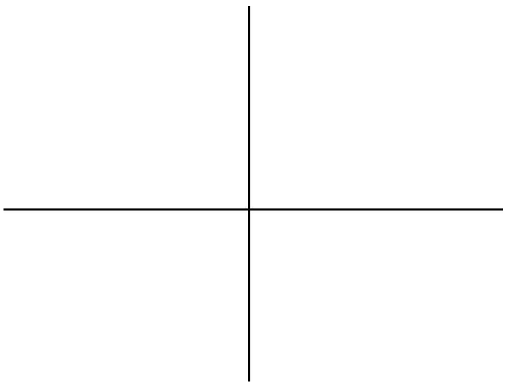
Esimerkki 11.3. Olkoon $f(x) = \frac{1}{x}$ ja $g(x) = \sqrt{x+1}$. Määrää $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$ sekä $D_{f \circ g}$ ja $D_{g \circ f}$.

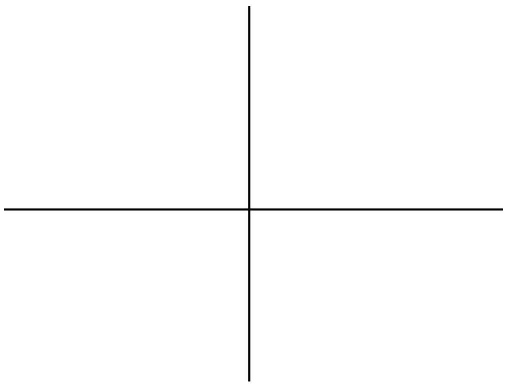
11.3 Surjektio, injektio ja bijektio

Olkoon $f : X \to Y$ funktio, ts. jokaista $x \in X \ = (D_f)$ vastaa täsmälleen yksi $y = f(x) \in Y$.

Funktio $f : X \to Y$ on *surjektio* joukosta X joukkoon Y, jos arvojoukko $R_f = \{f(x) \,|\, x \in X\} = Y$.

Siis f on surjektio joukosta X joukkoon Y, jos jokaista $y \in Y$ vastaa ainakin yksi sellainen $x \in X$, että $f(x) = y$ (ts. löytyy ainakin yksi *alkukuva*).





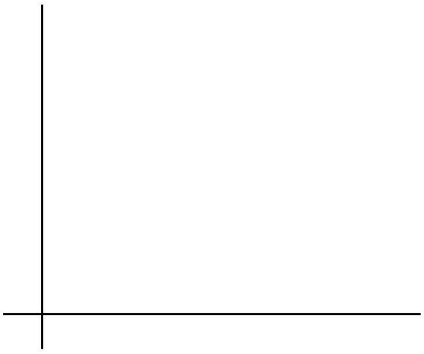
Esimerkki 11.4. Olkoon $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Funktio $f : X \to Y$, jolle $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, on surjektio, sillä jokaisella joukon Y alkiolla on alkukuva.

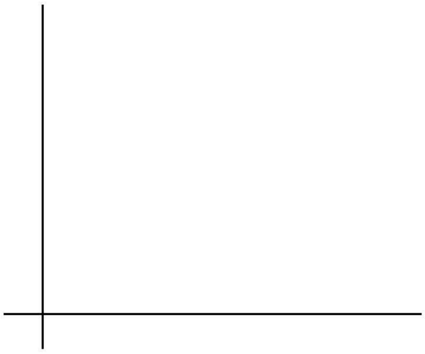
Jos $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, niin edellä olevalla tavalla määritelty funktio f ei ole surjektio.

Esimerkki 11.5. Onko funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = x^2$, surjektio? Entä onko funktio $f(x) = x^2$ surjektio $\mathbb{R} \to [0, \infty[$?

Funktio $f : X \to Y$ on *injektio*, jos $f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$.

Siis f on injektio, kun f kuvaa kaikki joukon X alkiot joukon Y *eri* alkioiksi. (Siis yksikäsitteinen alkukuva, jos alkukuva on olemassa.)





Esimerkki 11.6. Onko funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = \sqrt{x}$, injektio?

Esimerkki 11.7. Onko funktio $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, jolla $f(x) = x^2$, injektio?

Funktio $f : X \to Y$ on *bijektio*, jos se on sekä surjektio että injektio.

Siis $f : X \to Y$ on bijektio, kun

1. $R_f = Y$
2. $f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$.

Siten $f : X \to Y$ on bijektio, jos *jokaista* $y \in Y$ kohti on olemassa täsmälleen *yksi* $x \in X$, jolle $y = f(x)$.

Esimerkki 11.8. Onko funktio $f(x) = 5x + 3$ bijektio?

Esimerkki 11.9. Onko funktio $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ bijektio?

11.4 Käänteisfunktio

Jos $f : X \to Y$ on *bijektio*, voidaan määritellä funktio $f^{-1} : Y \to X$, jolle $x = f^{-1}(y)$, kun $y = f(x)$.

Siis f^{-1} kuvaa jokaisen $y \in Y$ alkukuvakseen eli $x = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; y = f(x)$.

Funktiota f^{-1} sanotaan funktion f *käänteisfunktioksi*.

Nyt $D_{f^{-1}} = R_f$ ja $R_{f^{-1}} = D_f$.

Koska $y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y)$, saadaan $f^{-1}(f(x)) = x$ ja $f(f^{-1}(y)) = y$.

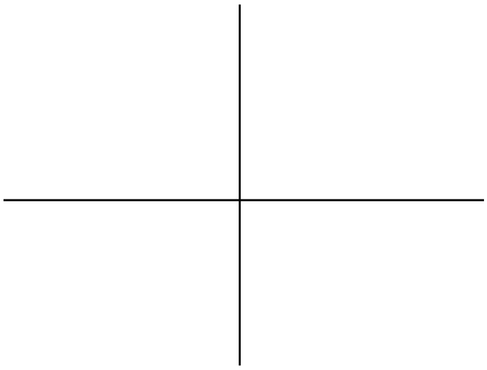
Funktion $y = f(x)$ käänteisfunktion määrääminen:

1. Onko f^{-1} olemassa eli onko f bijektio?
2. Ratkaistaan yhtälö $y = f(x)$ muuttujan x suhteen.
3. Vaihdetaan muuttujien x ja y paikat, ts. esitetään käänteisfunktio muodossa $y = f^{-1}(x)$ (x:n funktiona).

Lause 11.1. *Jokaisella aidosti kasvavalla (aidosti vähenevällä) funktiolla $f : D_f \to R_f$ on käänteisfunktio (ovat bijektioita).*

Esimerkki 11.10. Määrää funktion $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ käänteisfunktio.

Olkoon $f : X \to Y$ reaaliarvoinen funktio ja $f^{-1} : Y \to X$ sen käänteisfunktio. Siten funktion $f(x)$ kuvaajan pistettä $(x, f(x))$ vastaa aina käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajan piste $(f(x), x)$. Näin ollen funktion f ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen.



Esimerkki 11.11. a–kantainen eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ ($a > 0,\ a \neq 1$) on joko aidosti kasvava ($a > 1$) tai aidosti vähenevä ($0 < a < 1$). Lauseen 11.1 nojalla sillä on olemassa käänteisfunktio. Koska $y = a^x \;\Leftrightarrow\; x = \log_a y$, niin a–kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktio on a–kantainen logaritmifunktio.

12 Yhtälöparit

12.1 Lineaarinen yhtälöpari

Ratkaistava yhtälöpari:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Yhtälöparin ratkaiseminen:

1) Ratkaistaan jommasta kummasta yhtälöstä yksi tuntematon toisen avulla lausuttuna.
2) Sijoitetaan ratkaistun tuntemattoman lauseke toiseen yhtälöön.
3) Ratkaistaan näin saatu yhtälö jäljelle jääneen tuntemattoman suhteen.
4) Sijoitetaan ratkaistu tuntemattoman arvo jompaan kumpaan alkuperäisistä yhtälöistä ja ratkaistaan toinen tuntematon.

Esimerkki 12.1. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$.

Toinen tapa: termien hävittäminen laskemalla yhtälöt sopivasti kerrottuna puolittain yhteen.

Suoran yhtälö esitetään yleensä muodossa $y = f(x) = ax + b$. Tämä esitys voidaan muokata *implisiittiseen* muotoon $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, eli muotoon, jossa muuttuja x ja funktion arvo y esiintyy yhtälön samalla puolella. Näin ollen *lineaarisen yhtälöparin ratkaiseminen merkitsee* käytännössä vastaavien suorien leikkauspisteiden etsimistä:

- Suorat leikkaavat, jos ratkaisu on yksikäsitteinen.
- Suorat samat, jos ratkaisuja on ääretön määrä (identtisesti tosi, esim. $0 = 0$).
- Suorat ovat yhdensuuntaiset eri suorat, jos yhtälöparilla ei ole ratkaisuja. (identtisesti epätosi, esim. $0 = 5$)

Huomautus.

- Suorat yhdensuuntaiset: kulmakertoimet samat.
- Suorat kohtisuorassa: kulmakertoimien tulo on -1.

12.2 Käyrien yhteisten pisteiden etsiminen

Ratkaistava yhtälöpari

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaiseminen:

1) Asetetaan $f(x) = g(x)$.
2) Ratkaistaan yhtälöstä x.
3) Sijoitetaan saatu x:n arvo (arvot) toiseen alkuperäisistä yhtälöistä, jolloin saadaan leikkauspistettä vastaava y:n arvo (arvot).

Tai: kuten lineaarisen yhtälöparin ratkaisemisen 2. tapa.

Esimerkki 12.2. Määritä käyrien $x^2 - y + 1 = 0$ ja $y - 2x = 0$ yhteiset pisteet.

13 Raja-arvo

13.1 Funktion raja-arvo

Määrättäessä funktion raja-arvoa pisteessä a tutkitaan funktion kulkua, kun x valitaan yhä lähempää arvoa a. (Mitä arvoa $f(x)$ lähestyy, kun x lähestyy arvoa a?)

Tarkastellaan esim. funktiota

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}.$$

Toisaalta

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = \frac{(3x - 2)(x - 2)}{x - 2} = 3x - 2, \quad x \neq 2.$$

Siten funktion $f(x)$ kuvaaja on suora $y = 3x - 2$, josta on poistettu piste $(2, 4)$. Kun x lähestyy arvoa 2, niin $f(x)$ lähestyy arvoa 4. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Raja-arvon määritelmä:

Olkoon funktio $f(x)$ määritelty välillä $]a - r, a + r[$, $(r > 0)$ mahdollisesti lukuunottamatta kohtaa $x = a$. Funktiolla f on raja-arvo b kohdassa a, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $\delta > 0$, että $|f(x) - b| < \varepsilon$ aina, kun $0 < |x - a| < \delta$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Siis funktiolla $f(x)$ on raja-arvo b kohdassa $x = a$, jos funktion $f(x)$ arvo saadaan miten lähelle tahansa arvoa b, kunhan vain x valitaan riittävän läheltä arvoa a.

Esimerkki 13.1. Osoita määritelmän nojalla, että

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x - 2} = 4.$$

Huomautus. Raja-arvon määritelmässä oleva luku δ saa riippua sekä luvusta a että luvusta ε, ei kuitenkaan muuttujasta x.

Huomautus. Funktion raja-arvo on *yksikäsitteinen*, jos on olemassa.

Raja-arvon peruslaskusääntöjä:

Lause 13.1. *Olkoon* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *ja* $\lim_{x\to a} g(x) = c$ *ja* $k \in \mathbb{R}$ *vakio. Tällöin*

a) $\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c$

b) $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c$

c) $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}, \quad$ *jos* $c \neq 0$

d) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = kb, \quad$ k *vakio*

Lause 13.2. *Olkoot* $P(x)$ *ja* $Q(x)$ *polynomeja ja* $a \in \mathbb{R}$*. Tällöin*

a) $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$

b) Jos $Q(a) \neq 0$*, niin* $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

c) Jos f *on vakiofunktio, eli* $f(x) = c \ \forall \ x \in \mathbb{R}$*, niin* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$

Esimerkki 13.2. Laske $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x + 1}{x + 1}$.

Toispuoleiset raja-arvot:

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Nyt $f(x)$ lähenee arvoa nolla, kun x lähenee nollaa oikealta. Merkitään

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \text{(oikeanpuoleinen raja-arvo 0:ssa).}$$

Toisaalta $f(x)$ lähenee arvoa -1, kun x lähenee nollaa vasemmalta. Merkitään

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (-x - 1) = -1 \quad \text{(vasemmanpuoleinen raja-arvo 0:ssa).}$$

Tällaisia raja-arvoja kutsutaan *toispuoleisiksi raja-arvoiksi*.

Lause 13.3. *Funktiolla* $f(x)$ *on kohdassa* $x = a$ *raja-arvo jos ja vain jos funktiolla* $f(x)$ *on kohdassa* $x = a$ *sekä vasemman- että oikeanpuoleinen raja-arvo ja ne ovat yhtäsuuret.*

Siis

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \exists \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Tällöin

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Esimerkki 13.3. Olkoon $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 2^{x+a} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Millä parametrin a arvolla funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 0$?

Raja-arvon toinen tärkeä käyttökohde on tutkia funktion arvon kehittymistä, kun muuttujan x arvo kasvaa tai pienenee rajatta. Tällöin puhutaan raja-arvosta äärettömyydessä ja käytetään merkintöjä

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Raja-arvot äärettömyydessä: $(x \to \pm\infty)$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Kun x kasvaa rajatta, $f(x)$ lähenee nollaa. Siis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vastaavasti, kun $x \to -\infty$, niin $f(x) \to 0$. Siis

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Epäoleelliset raja-arvot: $(f(x) \to \pm\infty)$

Tarkastellaan raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.

Kun $x \to 0^+$, niin $f(x) \to \infty$ ja kun $x \to 0^-$, niin $f(x) \to -\infty$.

Siis $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty.$

Näin ollen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ei ole olemassa.

Tarkastellaan vielä raja-arvoa $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$.

Nyt $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = \infty$ eli $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty.$

Vastaavasti

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^a} = \infty, \quad \text{kun } a \text{ parillinen} \\
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^a} \qquad \text{ei ole olemassa, kun } a \text{ pariton.}
\end{aligned}
$$

Epäoleelliset raja-arvot äärettömyydessä: $(x, f(x) \to \pm\infty)$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$.

Kun $x \to \infty$, niin $f(x) \to \infty$ eli $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

Vastaavasti $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$.

Samalla tavalla saadaan $\lim\limits_{x\to -\infty} -x^3 = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 = \infty$.

Esimerkki 13.4. Laske

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^2}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)^2}{x^6}$

Symbolia ∞ koskevia laskusääntöjä:

a) $\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

b) $\infty \pm r = \infty, \quad -\infty \pm r = -\infty, \quad \text{kun } r \in \mathbb{R}$

c) $\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

d) $\infty \cdot r = \begin{cases} \infty, & \text{jos } r > 0 \\ -\infty, & \text{jos } r < 0 \end{cases}$

e) $\dfrac{\infty}{r} = \begin{cases} \infty, & \text{jos } r > 0 \\ -\infty, & \text{jos } r < 0 \end{cases}$

f) $\dfrac{r}{\infty} = \dfrac{r}{-\infty} = 0, \quad \text{kun } r \in \mathbb{R}$

g) $\infty^r = \infty, \quad \text{kun } r > 0$

$\infty^r = 0, \qquad \text{kun } r < 0.$

Seuraavat muodot eivät ole määriteltyjä:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{0}, \quad \infty^0.$$

13.2 Raja-arvon määräämisestä

13.2.1 Polynomifunktio

A) Olkoon $P(x)$ polynomi. Lauseen 13.2 nojalla $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.

B) Määrättäessä raja-arvoja $\lim\limits_{x \to \infty} P(x)$ ja $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$, voidaan ottaa tekijäksi korkein esiintyvän muuttujan x potenssi ja päätellä sen jälkeen raja-arvo.

Toisaalta raja-arvot $\lim\limits_{x \to \infty} P(x)$ ja $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$ määräytyvät korkeinta muuttujan x potenssia sisältävän termin perusteella.

Esimerkki 13.5. Laske

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x)$

13.2.2 Rationaalifunktio

Rationaalifunktio on muotoa $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Laskettava $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, missä $a \in \mathbb{R}$.

A) Jos $Q(a) \neq 0$, niin $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ (vrt. lause 13.2).

Esimerkki 13.6.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x+3}{x^5+7x-2}$$

B) Jos sekä $P(a)=0$ että $Q(a)=0$, eli $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{0}{0}$, niin osoittajassa ja nimittäjässä on tekijänä termi $x-a$, joka supistetaan pois ja lasketaan sitten raja-arvo kuten edellä.

Esimerkki 13.7.
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$$

C) Jos $P(a)\neq 0$, mutta $Q(a)=0$, eli $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{0}$, mikä ei ole määritelty, pitää tutkia erikseen toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x\to a^-} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ja $\lim_{x\to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Jos kyseiset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ on olemassa ja se on joko ∞ tai $-\infty$ (riippuen osoittajan ja nimittäjän merkistä).

Esimerkki 13.8. Tutki raja-arvoja $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ ja $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$.

Esimerkki 13.9.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x}{(x+2)^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x}{x+2}$

Laskettava $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ tai $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$.

D) Määrättäessä raja-arvoja $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ja $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ voidaan supistaa nimittäjässä esiintyvällä korkeimmalla muuttujan x potenssilla.

Toisaalta raja-arvot $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ja $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ määräytyvät osoittajan ja nimittäjän korkeimman asteen termien perusteella.

Esimerkki 13.10.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+2}{2x^2+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+2}{x^2+3x+1}$

13.2.3 Neliöjuurilausekkeet raja-arvotehtävissä

Jos $f(x)$ sisältää neliöjuurilausekkeen niin $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, jos $f(a)$ ei ole epämääräinen.

Monissa tapauksissa on apua laventamisesta

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = x - y$$

Esimerkki 13.11.

a) $\lim_{x\to 0}\sqrt{2-x+x^2}$

b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+2})$

c) $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Termejä voidaan kuljettaa neliöjuuren sisään tai ulos sieltä seuraavasti:

- $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}.$
- Neliöjuuren alle ei saa viedä negatiivista.

Esimerkki 13.12.

a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{2x^2}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$

13.2.4 Potenssilausekkeet raja-arvotehtävissä

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq a < 1 \\ \infty, & \text{kun } a > 1 \\ \text{ei ole olemassa,} & \text{kun } a < 0 \end{cases}$$

Huomautus.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

14 Funktion jatkuvuus

14.1 Jatkuvuuden määritelmä

Funktio $f(x)$ on *jatkuva kohdassa* $x_0 \in D_f$, jos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Funktio $f(x)$ on *jatkuva välillä* $]a, b[$, jos se on jatkuva välin $]a, b[$ jokaisessa pisteessä.

Funktio $f(x)$ on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Geometrisesti:

$f(x)$ on jatkuva välillä $]a, b[$, jos funktion f kuvaaja välillä $]a, b[$ ei katkea.

Esimerkkejä eri tilanteista:

1) Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $]a, b[$

2) Funktio $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa $x = x_0$, sillä $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

3) Funktio $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa x_0, sillä $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ei ole olemassa, koska $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Funktion jatkuvuuden tutkiminen kohdassa $x = x_0$*:*

(i) Onko $f(x)$ määritelty kohdassa $x = x_0$?

(Jos ei ole $\Rightarrow$ ei jatkuva; katso nimittäjä, $\sqrt{\ }$ ja log)

(ii) Onko $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ olemassa?

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad ? \right)$$

(iii) Onko $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

Määrittelyjoukossaan jatkuvia funktioita:

- polynomi- ja rationaalifunktiot
- eksponentti- ja logaritmifunktiot
- trigonometriset funktiot (sin, cos, tan ja cot)

Esimerkki 14.1. Tutki onko funktio $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$ jatkuva.

14.2 Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia

Lause 14.1. *Jos funktiot* f *ja* g *ovat jatkuvia kohdassa* $x = x_0$*, niin myös funktiot* $f + g$*,* $f - g$*,* $f \cdot g$ *ja* $c \cdot f$ *(*$c \in \mathbb{R}$ *vakio) ovat jatkuvia kohdassa* $x = x_0$ *. Lisäksi funktio* $\frac{f}{g}$ *on jatkuva kohdassa* x_0*, jos* $g(x_0) \neq 0$*.*

Siis funktioyhdistelmät jatkuvia $\Leftrightarrow$ jokainen funktio on yksinään jatkuva.

Esimerkki 14.2. Määrää a siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0 \\ -x^2 + a, & x < 0 \end{cases}$ on jatkuva.

Lause 14.2. *Olkoon funktio* $g(x)$ *jatkuva kohdassa* x_0 *ja funktio* $f(x)$ *jatkuva kohdassa* $g(x_0)$*. Tällöin yhdistetty funktio* $(f \circ g)(x)$ *on jatkuva kohdassa* x_0*.*

Suljetulla välillä jatkuva funktio:

Sanotaan, että funktio $f(x)$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva avoimella välillä $]a, b[$ ja lisäksi $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Esimerkkejä eri tilanteista:

1) Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$

2) Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $]a, b[$ muttei välillä $[a, b]$, sillä $\lim_{x \to b^-} f(x) \neq f(b)$. Kuitenkin $f(x)$ on jatkuva välillä $[a, b[$.

Lause 14.3. *Suljetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio* $f(x)$ *saavuttaa* suurimman *ja* pienimmän arvonsa *tällä välillä.*

Siis voidaan löytää sellaiset $x_1, x_2 \in [a, b]$, että $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ aina, kun $x \in [a, b]$.

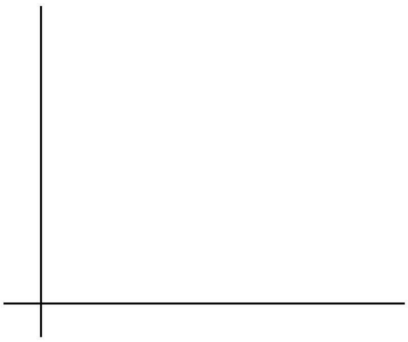
Lísäksi jokaista lukua $d \in [f(x_1), f(x_2)]$ kohti on olemassa ainakin yksi sellainen $c \in [a, b]$, että $f(c) = d$.

Geometrisesti:

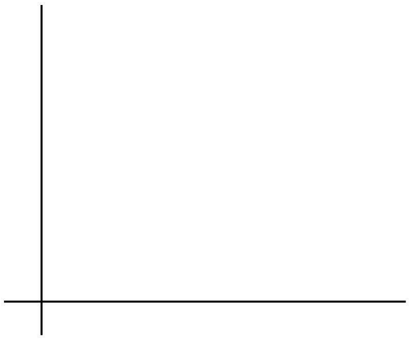
$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ aina, kun $x \in [a, b]$.

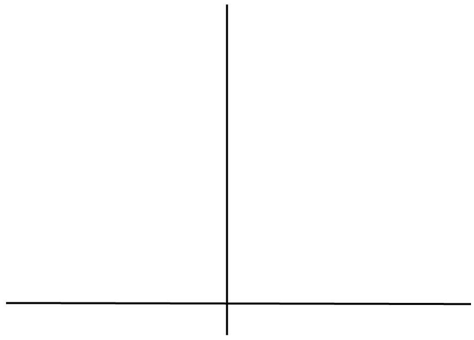
$\min f(x) = f(x_1)$ ja $\max f(x) = f(x_2)$.

$d \in [f(x_1), f(x_2)]$ ja $d = f(c_1) = f(c_2)$.



Esimerkki 14.3. Funktio $f(x) = x^2 - 3x + 2$ on jatkuva suljetulla välillä $[0, 3]$. Se saavuttaa pienimmän arvonsa kohdassa $x = \frac{3}{2}$, jolloin $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$, ja suurimman arvonsa kohdissa $x = 0$ ja $x = 3$. Tällöin $f(0) = f(3) = 2$. (Maksimin ja minimin etsimisestä myöhemmin!)

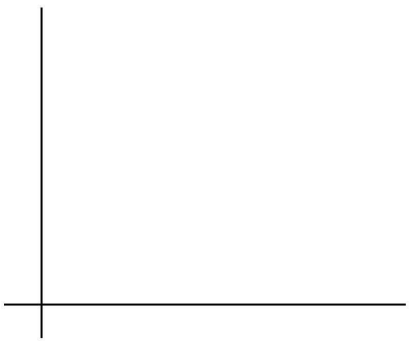


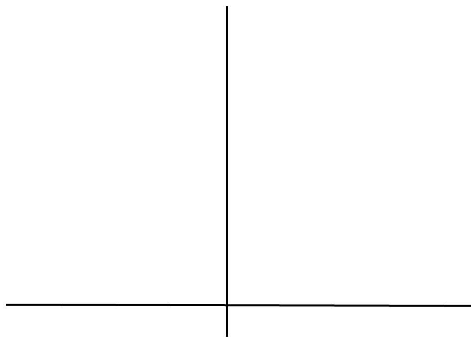


Esimerkki 14.4. Funktio $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$ on epäjatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$, sillä $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa $x = 0$, koska $f(x)$ ei ole määritelty kohdassa $x = 0$.

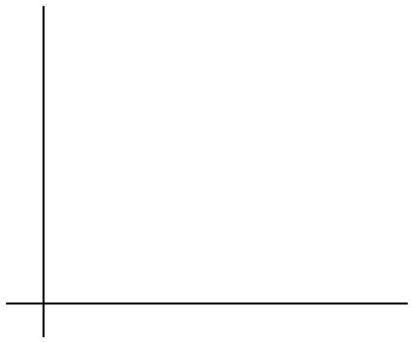
Nyt funktiolla f on pienin arvo välillä $[-1, 1]$ kohdissa $x = -1$ ja $x = 1$, jolloin $f(-1) = f(1) = -1$.

Suurinta arvoa funktiolla $f(x)$ ei ole välillä $[-1, 1]$. Funktiolla $f(x)$ on kuitenkin ylärajana arvo 0 välillä $[-1, 1]$.



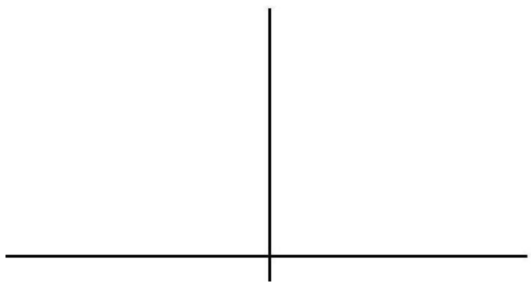


Esimerkki 14.5. Funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on rationaalifunktiona jatkuva välillä $]0, 3[$. Nyt $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{1}{3} = f(3)$ ja siten $f(x)$ on jatkuva välillä $]0, 3]$. Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, joten se ei ole jatkuva kohdassa $x = 0$. Funktiolla f on pienin arvo välillä $]0, 3]$ kohdassa $x = 3$ ja $f(3) = \frac{1}{3}$. Nyt funktiolla $f(x)$ ei ole suurinta arvoa välillä $]0, 3]$, sillä $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.



Seuraus 14.4 (Bolzanon lause)**.** *Olkoon f suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio ja oletetaan, että $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset. Tällöin on olemassa sellainen $c \in]a,b[$, että $f(c) = 0$. (Jatkuva funktio ei voi vaihtaa merkkiä saamatta arvoa 0.)*

Geometrisesti:



Esimerkki 14.6. Osoita, että yhtälöllä $20x^3 - 3x^2 - 40x + 6 = 0$ on kolme erisuurta reaalijuurta (nollakohtaa, ratkaisua).

15 Lukujonot ja sarjat

15.1 Lukujonon raja-arvo

Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ reaalilukujen muodostama päättymätön *jono*. Lukua a_n sanotaan jonon *yleiseksi termiksi*. Jonoa voidaan merkitä yleisen termin avulla (a_n). Yleensä yleinen termi kertoo jonon rakenteen.

Esimerkki 15.1. Jonoa $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ merkitään (n) ja jonoa $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$ merkitään $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Lukujonoa (a_n) sanotaan *suppenevaksi* ja lukua a sen *raja-arvoksi*, jos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Jos jono (a_n) ei suppene, se *hajaantuu*.

Jono (a_n) hajaantuu, jos

(i) jonolla (a_n) ei ole raja-arvoa, kun n lähenee ääretöntä. Esim. $(a_n) = ((-1)^n) : -1, 1, -1, 1, \ldots$

(ii) Jono (a_n) kasvaa tai vähenee rajatta, kun n lähenee ääretöntä. Tällöin merkitään $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (tai $-\infty$).

Esimerkki 15.2. Tutki seuraavien jonojen (a_n) hajaantumista ja suppenemista

a) $(a_n) = (n)$ b) $(a_n) = (-n)$ c) $(a_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

Huomautus.

- Raja-arvojen laskusäännöt kuten funktioilla.
- Eksponentti- ja potenssifunktiolle pätee:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a^n = 0, && \text{kun } |a| < 1 \\
&\lim_{n\to\infty} a^n = \infty, && \text{kun } a > 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, && \text{kun } k \in \mathbb{N}_+.
\end{aligned}$$

Lukujonoa (a_n) sanotaan *kasvavaksi*, jos $a_n \leq a_{n+1}$, ja *väheneväksi*, jos $a_n \geq a_{n+1}$ aina, kun $n \in \mathbb{N}_+$.

Esimerkki 15.3. Tutki seuraavien jonojen (a_n) suppenemista ja määrää raja-arvot, jos mahdollista.

$$\text{a) } (a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{b) } (a_n) = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Lukujonoa (a_n) sanotaan *aritmeettiseksi*, jos $a_{n+1} - a_n = d$ aina, kun $n \in \mathbb{N}_+$ ja d on vakio.

Lukujono (a_n) on *geometrinen*, jos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ aina, kun $n \in \mathbb{N}_+$ ja q on vakio.

Esimerkki 15.4. Tutki jonoa (a_n), kun

$$\text{a) } (a_n) = (2n - 1) \qquad \text{b) } (a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

15.2 Sarjateoria

Kun lukujonon (a_n) jäsenistä muodostetaan ääretön summa $a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, saadaan lukujonosta *sarja*.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ on *sarjan n. osasumma*.

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on *aritmeettinen*, jos $a_{k+1} - a_k = d$ aina, kun $k \in \mathbb{N}_+$ ja d on vakio.

Vastaavasti sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on *geometrinen*, jos $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = q$ aina, kun $k \in \mathbb{N}_+$ ja q on vakio.

Esimerkki 15.5. Tutki seuraavien sarjojen aritmeettisuus ja geometrisuus.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (2k) \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Aritmeettisen sarjan *osasumma*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Geometrisen sarjan osasumma

$$S_n = \begin{cases} na_1, & \text{jos } q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & \text{jos } q \neq 1. \end{cases}$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on *suppeneva* ja luku S sen *summa*, jos $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (S äärellinen, $S \in \mathbb{R}$).

Huomautus.

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja summa $= S$, niin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Jos $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, niin sarja ei suppene.

Jos $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, niin sarja *VOI MAHDOLLISESTI* supeta.

Eräiden sarjojen suppenemisesta:

Aritmeettinen sarja hajaantuu aina, sillä

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ tai } -\infty.$$

Geometrinen sarja suppenee silloin ja vain silloin, kun $|q| < 1 \Leftrightarrow -1 < q < 1$.

Tällöin summa

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$