Matematiikan perusteet taloustieteilijöille 1b

802153P

Luentomoniste
Kari Myllylä
Niina Korteslahti
Oulun yliopisto
Matemaattisten
tieteiden laitos
Syksy 2013

Sisältö

1 Derivaatta

1.1 Määritelmä

Olkoon funktio $f(x)$ määritelty välillä $]a, b[$ ja $x_0 \in]a, b[$. Lauseketta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sanotaan funktion $f(x)$ *erotusosamääräksi* kohdassa x_0 ja se ilmoittaa funktion arvon muutoksen suhteessa muuttujan muutokseen eli funktion f muutosnopeuden välillä $[x_0, x]$. Näin ollen erotusosamäärä kuvaa *keskimääräistä muutosnopeutta* välillä $[x_0, x]$.

Jos raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on olemassa äärellisenä, sanotaan, että funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0.

Raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on funktion $f(x)$ *derivaatta* kohdassa x_0. *Derivaatta merkitsee funktion $f(x)$ muutosnopeuden raja-arvoa, kun muuttujan x muutos lähenee nollaa.*

Derivaatta kuvaa siis funktion *hetkellistä muutosnopeutta* kohdassa x_0. (Taloustieteessä yleensä muutos yhtä muuttujan yksikköä kohden.)

Esimerkki 1.1. Määritä funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä x_0, kun

a) $f(x) = c$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

Funktio f on *derivoituva* välillä $]a, b[$, jos sen derivaatta on olemassa välin jokaisessa pisteessä.

Lisäksi f on derivoituva funktio, jos sillä on derivaatta olemassa jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Derivaattafunktio:

Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä $]a, b[$. Merkitsemällä erotusosamäärän lausekkeessa $\Delta x = x - x_0$ saadaan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Korvaamalla x_0 muuttujalla x ($x_0 \in]a, b[$ on mielivaltainen), saadaan

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

joka on funktion f *derivaattafunktio.*

Funktion $y = f(x)$ derivaattaa merkitään:

$$f'(x), \quad Df(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad y', \quad \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki 1.2. Määrää funktion $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ derivaattafunktio $f'(x)$.

Olkoot funktiot f ja g derivoituvia pistessä x. Tällöin myös funktiot $f + g$, $f - g$, cf (c vakio), $f \cdot g$ ja $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$) ovat derivoituvia pisteessä x.

Funktiot, joille esitetään derivoimissäännöt, ovat derivoituvia määrittelyalueessaan ilman eri tutkimista.

1.2 Derivaatan geometrinen tulkinta (ks. kuvio)

Erotusosamäärä

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran kulmakerroin. Kun $x \to x_0$, niin piste Q liukuu pitkin käyrää $y = f(x)$ kohti pistettä P. Samalla pisteiden P ja Q kautta kulkeva suora lähenee käyrän $y = f(x)$ pisteeseen P eli pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirrettyä tangenttisuoraa.

Vastaavasti pisteiden P ja Q kautta kulkevan suoran kulmakerroin lähenee pisteeseen P asetetun tangentin kulmakerrointa. Siis

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretyn *tangentin kulmakerroin*.

Koska derivaatta on raja-arvona yksikäsitteinen, niin funktiolla voi olla kohdassa x_0 vain yksi derivaatan arvo $f'(x_0)$. Siten geometrisesti derivaatan olemassaolo edellyttää, että käyrän pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ voidaan piirtää täsmälleen yksi tangentti. Siten jos funktio on derivoituva välillä $]a, b[$, sen kuvaajassa ei saa olla tällä välillä kulmia (vrt. funktio $f(x) = |x|$).

Käyrän $y = f(x)$ *tangentin yhtälö pisteessä* $(x_0, f(x_0))$*:*

Edellä on todettu, että tangentin kulmakerroin $k_t = f'(x_0)$. Toisaalta tangentti kulkee pisteen $(x_0, f(x_0))$ kautta, joten tangentin yhtälö on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Esimerkki 1.3. Määrää käyrälle $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ pisteeseen $(1, 4)$ piirretyn tangentin yhtälö.

1.3 Derivoimissääntöjä

D1) $Dc = 0$, kun c=vakio

D2) $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$

D3) $D(f(x) \pm g(x)) = Df(x) \pm Dg(x)$

D4) $D(cf(x)) = cDf(x)$

D5) $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

D6) $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad (g(x) \neq 0)$

Esimerkki 1.4.

a) $D(4x^7 + 5)$ b) $D(2x^2 + 5x)$ c) $D[(x^2 + 2)(2x + 5)]$ d) $D\dfrac{x^2 + 2}{2x - 1}$

1.4 Yhdistetyn funktion derivaatta

Oletetaan, että funktio $g(x)$ on derivoituva kohdassa x_0 ja funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa $g(x_0)$ ja lisäksi $R_g \subset D_f$. Tällöin yhdistetty funktio $f \circ g$ on derivoituva kohdassa x_0 ja

D7) $(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Nyt voidaan määrätä seuraavan funktion derivaatta:

D8) $D(f(x)^n) = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x),\ n \in \mathbb{R}$

Esimerkki 1.5.

a) $D\left(\sqrt{x}\right)$ b) $D\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 2}}\right)$

1.5 Logaritmi- ja eksponenttifunktion derivaatta

Logaritmifunktion derivaatta:

D9) $D \ln x = \frac{1}{x}$

D10) $D(\log_a x) = D\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} D(\ln x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

D11) $D \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

D12) $D \log_a f(x) = \frac{1}{f(x) \cdot \ln a} \cdot f'(x)$

Eksponenttifunktion derivaatta:

D13) $D\, e^x = e^x$

D14) $D\, e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

D15) $D\, a^x = a^x \cdot \ln a$

D16) $D\, a^{f(x)} = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

Esimerkki 1.6.

a) $D \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ b) $D\, 3^{\sqrt[5]{x-1}}$

1.6 Käänteisfunktion derivaatta

Olkoon $f(x)$ reaalifunktio, jolla on käänteisfunktio f^{-1} olemassa. Jos f on aidosti kasvava (aidosti vähenevä), niin f^{-1} on myös aidosti kasvava (aidosti vähenevä). Lisäksi, jos f on jatkuva, niin myös f^{-1} on jatkuva. Samoin, jos f on derivoituva, niin f^{-1} on derivoituva.

Käänteisfunktion f^{-1} derivaattafunktio voidaan määrätä seuraavasti ilman käänteisfunktion määräämistä:

$$
\begin{aligned}
& f(f^{-1}(y)) = y \quad |\frac{d}{dy} \\
\Rightarrow\ & f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1 \\
& (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}
\end{aligned}
$$

Siis

D17) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad$ missä $x = f^{-1}(y)$ ja $f'(x) \neq 0$

Esimerkki 1.7. Määrää funktion $f(x) = \sqrt{2x+1}$ käänteisfunktion derivaatta pisteessä $y = 2$.

1.7 Jatkuvuus ja derivoituvuus

Lause 1.1. *Jos funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0, niin $f(x)$ on myös jatkuva kohdassa x_0.*

Lause 1.2. Jatkuva *funktio $f(x)$ on derivoituva kohdassa x_0, jos $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ on olemassa* $\left(\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \right)$.

Huomautus. Jos funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa x_0, niin $f(x)$ ei välttämättä ole derivoituva kohdassa x_0. Jos $f(x)$ ei ole jatkuva kohdassa x_0, ei se ole derivoituvakaan kohdassa x_0.

Lause 1.3. *Funktion $f(x)$ derivoituvuuden tutkiminen kohdassa x_0:*

1. *$f(x)$ jatkuva kohdassa x_0?*
2. *$\lim_{x \to x_0} f'(x)$ olemassa?*

Esimerkki 1.8. Tutki funktion $f(x)$ jatkuvuutta ja derivoituvuutta, kun

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1.8 Korkeammat derivaatat

Olkoon $f : X \to Y$ derivoituva funktio. Tällöin funktion $f(x)$ derivaattafunktio on $f'(x)$. Jos f' on edelleen derivoituva, sen derivaattaa $(f')'$ sanotaan funktion f *toiseksi derivaataksi* ja merkitään $f''(x)$. Siten

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Käytetään myös merkintöjä y'', $D^2 f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Esimerkki 1.9. Olkoon $f(x) = 2e^{x^2} + \ln x^2$. Määrää $f''(1)$.

Funktion $f(x)$ n. *derivaatta* saadaan samoin derivoimalla funktio $f(x)$ n kertaa. Sitä merkitään $f^{(n)}(x)$. Siis

$$f^{(1)}(x) = f'(x), \quad f^{(2)}(x) = f''(x), \quad f^{(3)}(x) = f'''(x) \quad \text{jne.}$$

Pilkkumerkintää käytetään yleensä, kun $n \leq 3$. Lisäksi sovitaan, että $f^{(0)}(x) = f(x)$. Muut merkintätavat vastaavasti kuin $f''(x)$:llä.

Esimerkki 1.10. Olkoon $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}_+$. Määrää $f^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}_+$

1.9 Implisiittinen derivointi

Edellä on käsitelty muodossa $y = f(x)$ annetun funktion derivointia. Joskus funktio $y = y(x)$ voidaan kuitenkin esittää ns. *implisiittimuodossa* $f(x, y) = 0$ eli muodossa, jossa y ei ole x:n suhteen ratkaistuna. On mahdollista, että y:tä ei edes kyetä ratkaisemaan x:n funktiona, mutta kuitenkin y riippuu muuttujasta x. Derivaatta $\frac{dy}{dx}$ voidaan silti usein määrätä *implisiittinen derivoinnin* avulla. Edellytyksenä on, että y on x:n suhteen derivoituva. Tällöin derivaatta $\frac{dy}{dx}$ sisältää yleensä sekä muuttujaa x että funktion arvon y.

Implisiittisessä derivoinnissa lauseke $f(x, y) = 0$ derivoidaan termeittäin x:n suhteen ja y:tä käsitellään x:n funktiona. Saadusta lausekkeesta ratkaistaan $\frac{dy}{dx}$ tai y'.

Esimerkki 1.11. Määrää $\frac{dy}{dx}$ eli tutki y:n muutosnopeutta x:n suhteen pisteessä $x = 1$, kun $x^3 + y^3 - \frac{9}{2}xy = 0$ ja $y = f(x)$.

Esimerkki 1.12. Määrää $\dfrac{dy}{dx}$ ja $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, kun $e^y - xe^x = 0$ ja y=f(x).

1.10 L'Hospitalin sääntö

Tarkastellaan raja-arvoa $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Olkoon	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$	ja	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
tai	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	ja	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Tällöin $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ tai $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\dfrac{\infty}{\infty}$, jotka eivät ole määriteltyjä.

Jos nyt $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ on olemassa, niin

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Esimerkki 1.13.

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ b) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1.11 Differentiaali

Olkoon $f(x)$ derivoituva funktio kohdassa x_0. Asetetaan

$$u(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0), \quad \text{kun } x \in D_f \text{ ja } x \neq x_0. \tag{1}$$

Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Kun kerrotaan yhtälö (1) puolittain lausekkeella $x - x_0$, saadaan funktion $f(x)$ differentiaalikehitelmä.

Differentiaalikehitelmä:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + u(x)(x-x_0), \tag{2}$$

missä, $u(x) \to 0$, kun $x \to x_0$.

Kun merkitään $\Delta x = x - x_0$ ja $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, saadaan yhtälö (2) muotoon

$$\Delta y = \Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + u(x)\Delta x, \tag{3}$$

missä $u(x) \to 0$, kun $\Delta x \to 0$.

Differentiaalikehitelmä (3) kuvaa muuttujan x muutosta Δx vastaavaa *todellista* funktion f arvon *muutosta* Δf.

Nyt termi $f'(x_0)\Delta x$ on funktion $y = f(x)$ muuttujan lisäystä Δx vastaava *differentiaali* kohdassa x_0 ja sitä merkitään

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \tag{4}$$

Koska $u(x) \to 0$, kun $\Delta x \to 0$, niin differentiaali df arvioi hyvin funktion $f(x)$ arvon muutosta Δf $(= f(x) - f(x_0))$ kohdan x_0 läheisyydessä.

Geometrisesti funktion arvon todellisen muutoksen $\Delta f(x)$ korvaamista differentiaalilla $df(x)$ vastaa käyrän $y = f(x)$ korvaaminen sen pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ piirretyllä tangentilla.

Huomautus. Mitä voimakkaammin funktio $y = f(x)$ muuttuu kohdan x_0 ympäristössä, sitä huonommin differentiaali df kuvaa funktion todellista muutosta Δf.

Jos f(x)=x, niin $f'(x) = 1$ aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Täten $dx = df = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x$ eli $dx = \Delta x$. Näin saadaan differentiaalille lauseke

$$dy = df(x) = f'(x)dx. \tag{5}$$

Esimerkki 1.14. Mikä on funktion $f(x) = x^2$ muuttujan lisäystä $\frac{1}{10}$ vastaava differentiaali df kohdassa $x_0 = 2$. Mikä on tällöin Δf?

Esimerkki 1.15. Olkoon kulutusfunktio $C(x) = 5 + 0.6x + 0.2\sqrt{x}$, $x =$ kokonaistulo. Jos $x = 25$ ja muuttujan x maksimaalinen virhemahdollisuus 0.3, niin arvioi kulutuksen maksimaalista ja suhteellista virhettä.

1.12 Ensimmäisen derivaatan taloustieteellisiä sovellutuksia

1. rajakustannus
2. rajatulo
3. jousto
4. rajakulutusalttius ja rajasäästämisalttius

Keskimääräinenmuutos(-nopeus) ilmaisee funktion $y = f(x)$ muutoksen suhteessa muuttujan x muutokseen, kun x muuttuu jonkin välin verran.

Rajamuutos merkitsee funktion $y = f(x)$ muutosnopeuden raja-arvoa, kun muuttujan x muutos lähenee nollaa eli rajamuutos on funktion $f(x)$ muutosnopeus jollain hetkellä (ts. derivaatta).

Rajamuutos ilmaisee paljonko funktion f arvo muuttuu, kun muuttuja x kasvaa yhdellä yksiköllä.

1.12.1 Kustannusfunktio

Oletetaan, että tavaramäärän x tuottamisesta ja markkinoinnista aiheutuvat *kokonaiskustannukset* $C(x)$ voidaan ilmaista funktiona $C = C(x)$. Tällöin *keskimääräiset yksikkökustannukset* $AC(x)$ ovat (ts. kustannukset/tuote)

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Rajakustannusfunktio $MC(x)$ on kokonaiskustannusfunkton $C(x)$ 1. derivaatta ja se ilmaisee kokonaiskustannusten hetkellisen muutosnopeuden suhteessa tuotantomäärän x muutokseen. Keskimääräiset kustannukset ja rajakustannukset riippuvat yleensä aina tuotannon tasosta jolla ollaan.

Keskimääräiset kustannukset ovat minimissään, kun ne ovat yhtä suuret kuin rajakustannukset. (Miksi?) Keskimääräisten kustannusten funktio on yleensä alaspäin kupera.

Esimerkki 1.16. Olkoot kokonaiskustannukset $C(x) = 2x^2+3x+1$, x=tuotannon määrä. Määrää keskimääräiset kustannukset ja rajakustannukset. Milloin keskimääräiset kustannukset ovat minimissään?

1.12.2 Tulofunktio

Olkoon *kysyntäfunktio* $y = f(x)$, missä y on tavaran yksikköhinta ja x on kysynnän suuruus (tavaramäärä).

Kokonaistulo $R(x)$ on tällöin

$$R(x) = xy = x \cdot f(x).$$

Rajatulo on

$$MR(x) = \frac{dR(x)}{dx} = R'(x),$$

joka on siis kokonaistulon muutosnopeus kysynnänmäärän x suhteen.

Huomautus. Keskimääräinen tulo $\frac{R(x)}{x} = f(x)$, joten se on sama funktio kuin kysyntäfunktio.

Funktion $R(x)$ arvo on aina positiivinen, sillä x ja $f(x) = y$ ovat positiivisia.

Rajatulo $MR(x)$ voi olla myös negatiivinen, sillä kokonaistulo voi sekä lisääntyä että vähentyä kysynnän kasvaessa.

Esimerkki 1.17. Olkoon kysyntäfunktio $y = -x + 3$ (y = yksikköhinta, x = määrä). Määrää kokonaistulo, rajatulo ja keskimääräinen tulo.

Yleisesti lineaariselle kysyntäfunktiolle $y = f(x) = ax + b$ pätee:

- tuotannon kasvaessa kokonaistulo aluksi kasvaa ja myöhemmin vähenee,
- sekä keskimääräinen tulo että rajatulo vähenevät.
- Keskimääräinen tulo ja rajatulo leikkaavat y–akselin samassa pisteessä ja keskimääräisen tulon funktion kulmakerroin on puolet rajatulon kulmakertoimesta.

Kokonaistulofunktio on suurimmillaan kohdassa, jossa rajatulofunktio saa arvon 0 (ks. ääriarvot).

1.12.3 Jousto

Funktion $y = f(x)$ *jousto* $Ef(x)$ kohdassa x on

$$Ef(x) = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Jousto on funktion $f(x)$ suhteellisen muutoksen muutosnopeus muuttujan x suhteellisen muutoksen suhteen. Jousto mittaa, kuinka herkästi funkto $f(x)$ reagoi muuttujan x muutoksiin. Jousto kertoo, kuinka monta % funktion arvo muuttuu, kun muuttujan arvo muuttuu yhden % verran. Funktion arvo muuttuu suhteessa hitaammin, kun $|Ef(x)| < 1$. Joustoa käytetää tutkittaessa kysyntää, tarjontaa, kustannuksia ja tuottavuutta.

Huomautus. Joustolla ei ole yksikköä!

1.12.4 Kansantulo, kulutus ja säästäminen

Kulutusfunktio $C(x)$ ilmaisee käytettävissä olevan (kokonais) *kansantulon* x ja kansallisen (kokonais) kulutuksen välisen suhteen.

Yksinkertaisissa malleissa kulutusfunktion $C(x)$ oletetaan kasvavan, kun kansantulo kasvaa, ja vähenevän , kun kansantulo vähenee, kuitenkin siten, että kansantulon muuttuessa kulutus ei muutu yhtä paljon.

Rajakulutusalttius tarkoittaa kulutusfunktion muutosnopeutta, kun kansantulo muuttuu. Rajakulutusalttius on suurempi kuin nolla, mutta pienempi kuin yksi.

Olkoon kulutusfunktio $C = C(x)$, missä $C(x) =$ kansallinenkulutus, $x =$ kansantulo, C ja x samaa yksikköä.

Rajakulutusalttius on

$$\frac{dC(x)}{dx} = C'(x).$$

Yksinkertaisissa malleissa *käytettävissä oleva tulo = kulutus + säästäminen.*

Siis

$$x = C(x) + S(x),$$

missä $S(x)$ on säästöt, kun kansantulo on x.

Siten *säästämisfunktio*

$$S(x) = x - C(x)$$

ja *rajasäästämisalttius*

$$S'(x) = \frac{dS(x)}{dx} = 1 - C'(x) = 1 - \frac{dC(x)}{dx}.$$

Kansantuloanalyysissä *investoinnit* käsitetään pääoman muodostukseksi, eli

$$I = I(x) = S(x) = x - C(x),$$

ja ne edustavat lisäystä reaalipääomaan.

Investoinnin ja kulutuksen oletetaan olevan suhteessa toisiinsa siten, että tietty (rahamääräinen) lisäys investointeihin voi tuottaa rahamäärältään moninkertaisen lisäyksen kansantuloon. Täsmällinen ilmaisu tälle riippuvuudelle annetaan *kertoimen* k avulla. Tämä kerroin kuvaa suurimman mahdollisen tulonlisäyksen suhdetta sen aiheuttaneeseen investointilisäykseen. Merkitään

$$k \cdot \Delta I = \Delta x.$$

Siis

$$k = \frac{\Delta x}{\Delta I} = \frac{dx}{dI} = \frac{1}{\frac{dI}{dx}} = \frac{1}{\frac{d(x - C(x))}{dx}} = \frac{1}{1 - C'(x)} = \frac{1}{S'(x)}$$

Esimerkki 1.18. Olkoon kulutusfunktio $C(x) = 10 + 0,8x + 0,5\sqrt{x}$, missä x on kansantulo. Määrää $S(x)$, $\frac{dC}{dx}$ ja $\frac{dS}{dx}$ sekä kerroin k.

2 Funktion tutkiminen derivaatan avulla

2.1 Differentiaalilaskennan väliarvolause

Tarkastellaan aluksi seuraavaa kuviota:

Pisteiden $A = (a, f(a))$ ja $B = (b, f(b))$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Kuvion mukaan käyrällä $y = f(x)$ on olemassa piste C, johon asetettu tangenttisuora on pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suuntainen.

Tangentin kulmakerroin pisteessä C on $f'(c)$. Siten

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Lause 2.1 (Differentiaalilaskennan väliarvolause)**.** *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja* derivoituva *välillä $]a, b[$. Silloin on olemassa ainakin yksi sellainen piste $c \in]a, b[$, että*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Esimerkki 2.1. Olkoon $f(x) = x^3 - 1$. Määrää $c \in]-2, 2[$ se.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}\,.$$

Seurauslause 2.1. *Olkoon $y = f(x)$* derivoituva *funktio ja olkoot x_1 ja x_2 ($x_1 < x_2$) funktion f nollakohtia. Tällöin väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $x_0 \in]x_1, x_2[$, jolle*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{x_2 - x_1} = 0.$$

Siis jatkuvan ja derivoituvan funktion $f(x)$ kahden nollakohdan välillä on funktion derivaatalla nollakohta.

2.2 Yhden muuttujan funktion monotonisuudesta ja ääriarvoista

Funktio $y = f(x)$ on monotoninen välillä I, jos se on joko kasvava tai vähenevä tuolla välillä. Funktio $y = f(x)$ on aidosti monotoninen välillä I, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä välillä I.

Monotonisuuden yhteys derivaattaan on seuraava:

Lause 2.2. *Oletetaan, että funktio $y = f(x)$ on* derivoituva (*ja siten myös jatkuva*) *välillä I. Tällöin funktio $y = f(x)$ on*

(*i*) *kasvava välillä I, jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in I$ (tangentit välillä I nousevia suoria)*

(*ii*) *vähenevä välillä I, jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in I$ (tangentit välillä I laskevia suoria)*

(*iii*) *aidosti kasvava välillä I, jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in I$ (tangentit välillä I aidosti nousevia suoria)*

(*iv*) *aidosti vähenevä välillä I, jos $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in I$ (tangentit välillä I aidosti laskevia suoria)*

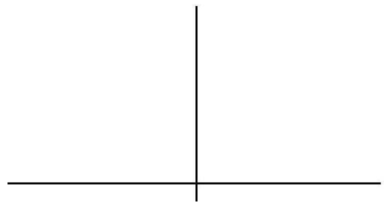
Esimerkki 2.2. Onko funktio $f(x) = x^5 + 5x^3 + 8x + 1$ aidosti kasvava?

Esimerkki 2.3. Olkoon $a > 0,\ a \neq 1$. Tutki funktion a^x monotonisuutta.

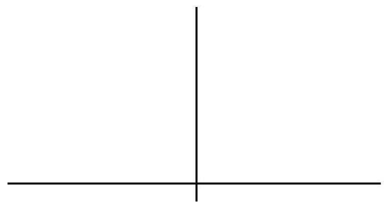
Esimerkki 2.4. Milloin funktio $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2$ on kasvava?

Funktiolla $f(x)$ on kohdassa $x_0 \in D_f$ *suurin arvo*, jos $f(x) \leq f(x_0)$ kaikilla $x \in D_f$. Vastaavasti funktiolla $f(x)$ on kohdassa $x_0 \in D_f$ *pienin arvo*, jos $f(x) \geq f(x_0)$ kaikilla $x \in D_f$. Suurinta arvoa sanotaan myös *absoluuttiseksi maksimiksi* ja pienintä arvoa *absoluuttiseksi minimiksi*.

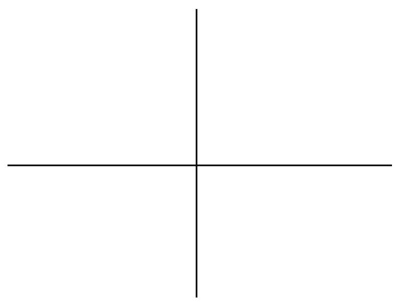
Esimerkki 2.5. Välillä $[-1, 1]$ funktion $f(x) = 2x - 1$ pienin arvo on $f(-1) = -3$ ja suurin arvo on $f(1) = 1$.



Esimerkki 2.6. Funktion $f(x) = x^2$ pienin arvo $\mathbb{R}$:ssä on $f(0) = 0$. Suurinta arvoa funktiolla ei ole.



Esimerkki 2.7. Funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole pienintä eikä suurinta arvoa $\mathbb{R}$:ssä.



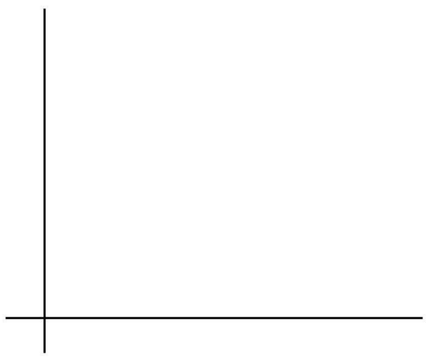
2.3 Paikallisten ääriarvojen määrittäminen

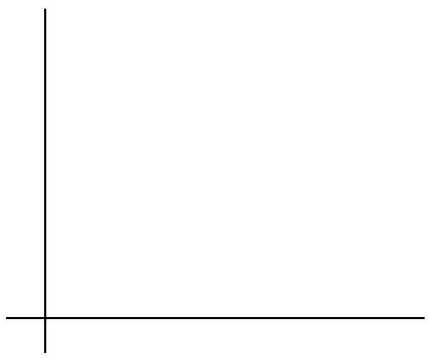
Piste $x_0 \in D_f$ on funktion f *paikallinen maksimikohta*, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in D_f$ ja $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. Tällöin $f(x_0)$ on funktion f *paikallinen maksimiarvo*. Paikallisia ääriarvoja kutsutaan myös *lokaalisiksi ääriarvoiksi.*

Vastaavasti kohta $x_0 \in D_f$ on funktion f *paikallinen minimikohta*, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(x) \geq f(x_0)$ aina, kun $x \in D_f$ ja $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. Tällöin $f(x_0)$ on funktion f *paikallinen minimiarvo.*

Aputulos 1. *Oletetaan, että $f(x)$ on määritelty eräässä pisteen x_0 ympäristössä ja f on* derivoituva *kohdassa x_0. Jos x_0 on funktion f paikallinen ääriarvokohta, niin $f'(x_0) = 0$.*

Geometrisesti:





$f'(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ käyrän pisteessä x_0 olevan tangentin kulmakerroin nolla.

Lause 2.3 (KRP:n löytäminen)**.** Derivoituvan *funktion* mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:

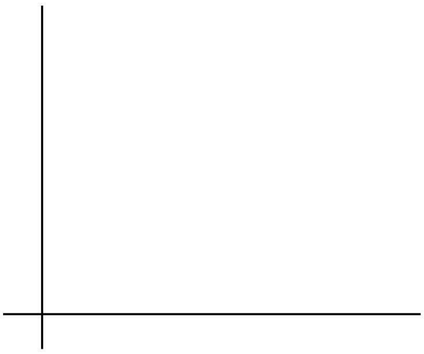
$$f'(x) = 0 \qquad\qquad (KRP)$$

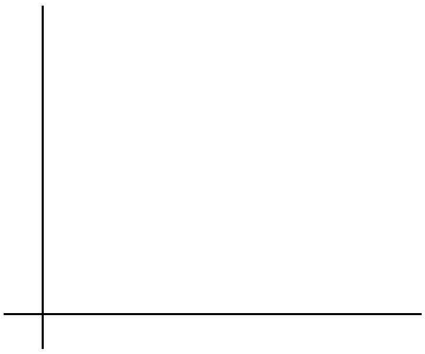
Esimerkki 2.8. Etsi funktion $f(x) = x^5 + 5x^3 + 8x + 1$ mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat.

Huomautus. Lause 2.3 ei päde suoraan; Jos $f'(x_0) = 0$, niin x_0 ei ole välttämättä funktion f ääriarvokohta (voi olla *satulapiste*).

Lause 2.4 (KRP:n löytäminen)**.** Jatkuvan *funktion mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat:*

1. $f'(x) = 0$ ($\textit{derivaatan } 0\textit{–kohdat}$)
2. $f(x)$ *ei derivoituva*   (*epäderivoituvuuskohdat*)





Lause 2.5 (Ääriarvon olemassaolo ja laatu)**.** *Olkoon funktio* f jatkuva *eräässä kohdan* x_0 *ympäristössä. Olkoon lisäksi* $f'(x_0) = 0$ *tai* x_0 *epäderivoituvuuskohta. Jos funktion* f *derivaatta muuttuu kohdassa* x_0

(i) *positiivisesta negatiiviseksi, kyseessä on paikallinen maksimikohta.*
(f *muuttuu aidosti kasvavasta aidosti väheneväksi*)

(ii) *negatiivisesta positiiviseksi, kyseessä on paikallinen minimikohta.*
(f *muuttuu aidosti vähenevästä aidosti kasvavaksi*)

Jos $f'(x)$ *ei muuta merkkiään kohdassa* x_0*, niin funktiolla* $f(x)$ *ei ole ääriarvokohtaa kohdassa* x_0*, vaikka* $f'(x_0) = 0$ *tai* x_0 *on epäderivoituvuuskohta.*

Lause 2.6. *Jos* D_f *ei ole koko* $\mathbb{R}$ *vaan jokin väli, paikallinen ääriarvo voi esiintyä myös välin* päätepisteissä.

Lause 2.7. *Funktion $f(x)$ paikallisia ääriarvokohtia voivat olla*

1. *kohdat, joissa funktio on* epäjatkuva
2. *kohdat, joissa derivaattaa ei ole*
3. *derivaatan nollakohdat* $(f'(x) = 0)$
4. *välin päätepisteet* $($*f määritelty suljetulla välillä*$)$

Huomautus. Lause 2.5 ei päde epäjatkuvuuskohdassa $\quad \Rightarrow \quad$ *tutki tarkemmin!*

Lause 2.8. *Tarkasteltaessa paikallisten ääriarvojen absoluuttisuutta verrataan niiden arvoja keskenään sekä tutkitaan tarvittaessa raja-arvot* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *ja* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Esimerkki 2.9. Määritä funktion $f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & \text{kun } -2 \leq x < 0 \\ -x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ääriarvot.

Esimerkki 2.10. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$ ääriarvot välillä $[0, 3]$.

Esimerkki 2.11. Etsi funktion $f(x) = x^3$ paikalliset ja absoluuttiset ääriarvot.

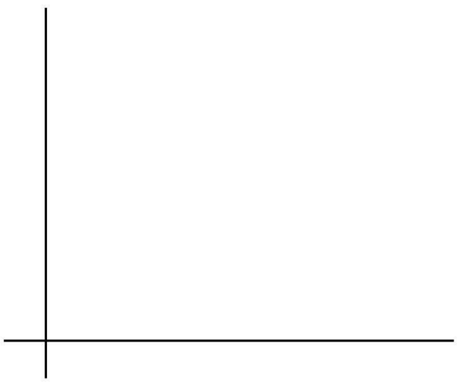
Esimerkki 2.12. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 24$ ääriarvot.

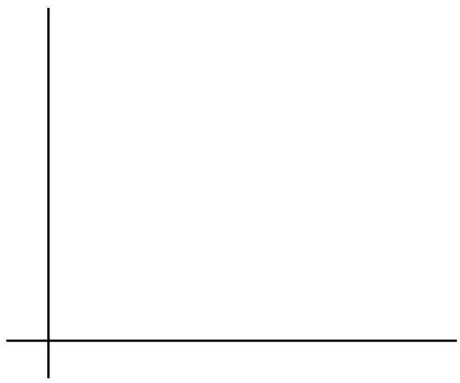
Esimerkki 2.13. Määritä seuraavan funktion paikalliset ja absoluuttiset ääriarvot.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{kun } x < 0 \\ -\frac{x}{2}, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

2.4 Kuperuus ja käännepisteet

Olkoon funktio f derivoituva välillä $]a, b[$. Jos käyrä $y = f(x)$ ei missään kohdassa välillä $]a, b[$ ole minkään tangenttinsa alapuolella, on käyrä välillä $]a, b[$ *kupera alaspäin*. Vastaavasti jos käyrä $y = f(x)$ ei missään kohdassa välillä $]a, b[$ ole minkään tangenttinsa yläpuolella, on käyrä välillä $]a, b[$ *ylöspäin kupera*.



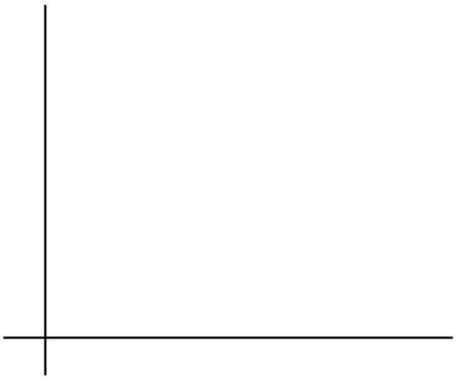
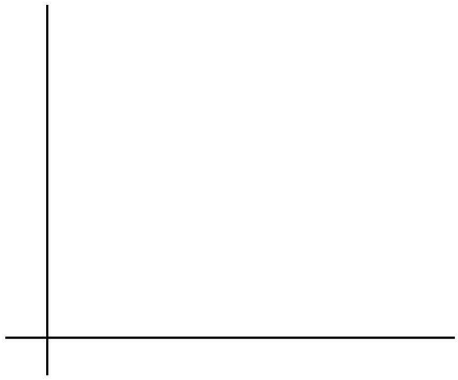


Lause 2.9. *Käyrä $y = f(x)$ on aidosti kupera alaspäin välillä $]a, b[$*

$\Leftrightarrow$ *tangenttien kulmakertoimet tulevat aidosti suuremmiksi muuttujan x kasvaessa*

$\Leftrightarrow$ *derivaatta $f'(x)$ on aidosti kasvava välillä $]a, b[$*

$\Leftrightarrow$ *$f''(x) > 0$ välillä $]a, b[$*

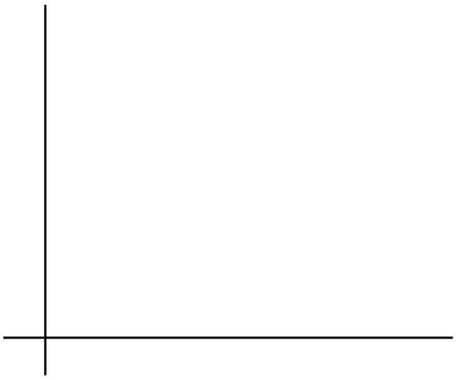
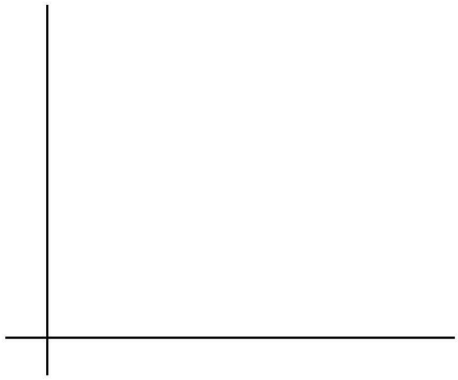



Lause 2.10. *Käyrä $y = f(x)$ on aidosti kupera ylöspäin välillä $]a, b[$*

$\Leftrightarrow$ *tangenttien kulmakertoimet tulevat aidosti pienemmiksi muuttujan x kasvaessa*

$\Leftrightarrow$ *derivaatta $f'(x)$ on aidosti vähenevä välillä $]a, b[$*

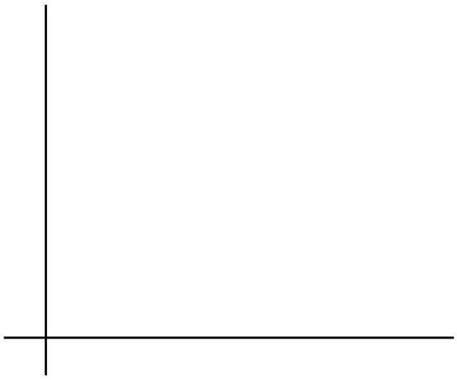
$\Leftrightarrow$ *$f''(x) < 0$ välillä $]a, b[$*

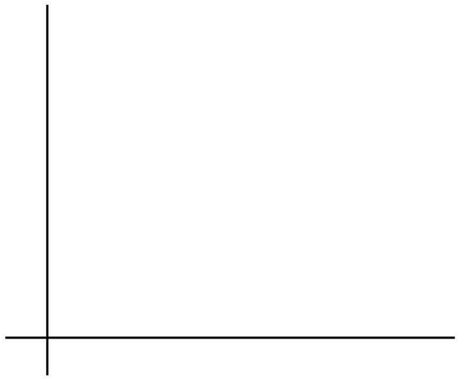



Esimerkki 2.14. Tutki funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ kuperuutta.

Funktion kuvaajan pistettä, jossa kuperuuden suunta muuttuu, sanotaan *käännepisteeksi* ja sitä vastaavaa muuttujan x arvoa *käännekohdaksi*. Käännepisteeseen piirretty käyrän tangentti kulkee käyrän läpi. Jos funktio f on kahdesti derivoituva, niin käännekohtia ovat ne toisen derivaatan nollakohdat, joissa $f''(x)$ vaihtaa merkkiä:

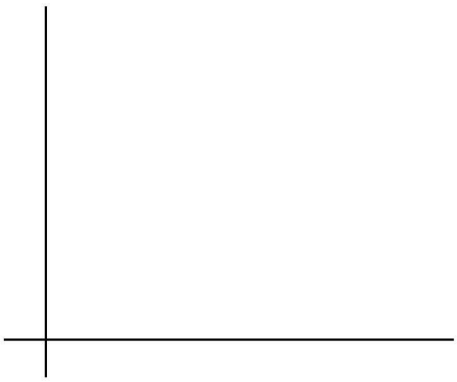
$$\begin{array}{ccc} + \Rightarrow - & \text{(alaspäin kuperuus)} \quad \Rightarrow \quad \text{(ylöspäin kuperuus)} \\ - \Rightarrow + & \text{(ylöspäin kuperuus)} \quad \Rightarrow \quad \text{(alaspäin kuperuus)} \end{array}$$

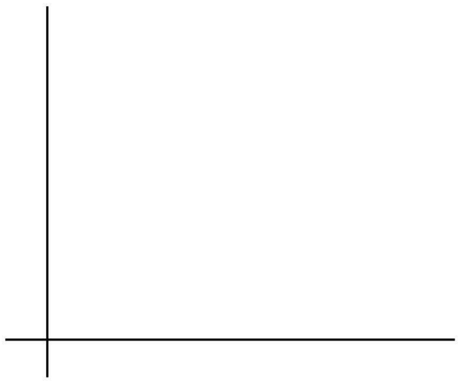




Lause 2.11. *Olkoon* f derivoituva *eräässä kohdan* x_0 *ympäristössä ja oletetaan, että* $f'(x_0) = 0$ (*siis KRP*).

1. $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ *on paikallinen maksimikohta*
2. $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ *on paikallinen minimikohta*
3. $f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ *voi olla maksimikohta, minimikohta tai satulapiste* (*ks. derivaatan merkkikaavio Lause 2.5 tai Lause 2.12*)





Esimerkki 2.15. Määrää funktion $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 2$ ääriarvokohdat.

Lause 2.12. *Olkoon* $f(x)$ jatkuva *funktio, joka on* n kertaa derivoituva *pisteessä* x_0*. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että* $f(x_0)$ *on paikallinen ääriarvo, on, että on olemassa sellainen* parillinen *kokonaisluku* n*, jolla*

$$f^{(k)}(x_0) = 0$$

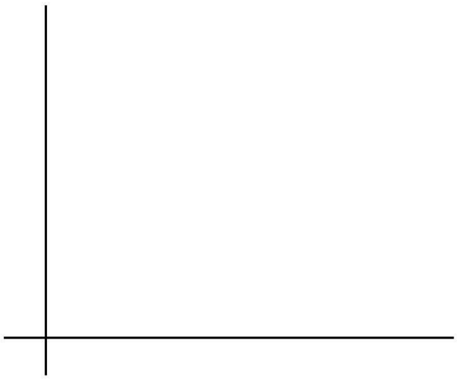
kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *ja* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

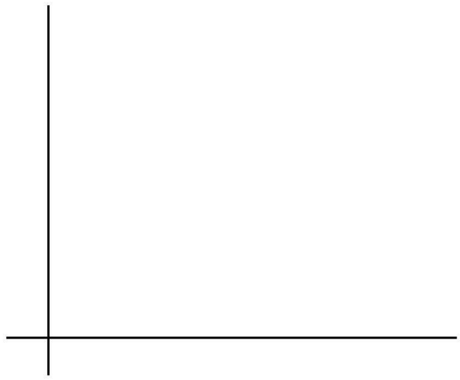
Kyseessä on lisäksi paikallinen minimi, jos $f^{(n)}(x_0) > 0$ *ja paikallinen maksimi, jos* $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Esimerkki 2.16. Määrää funktion $f(x) = x^3$ paikalliset ääriarvot.

Esimerkki 2.17. Määrää funktion $f(x) = x^4$ paikalliset ääriarvot.

Lause 2.13. *Suljetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio* $f(x)$ *saavuttaa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa.*





3 Usean muuttujan funktiot

3.1 Yleistä

Joukko $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \\
&\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \ldots, \\
&\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}, \text{ kun } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Siis esimerkiksi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \text{ ja} \\
&\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

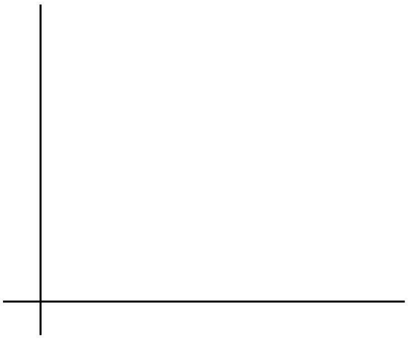
Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : X \to \mathbb{R}$ funktio. Funktio f on n:n *muuttujan reaaliarvoinen funktio*. Merkintä $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ tarkoittaa, että y on funktion f arvo pisteessä $(x_1, \ldots, x_n) \in X$.

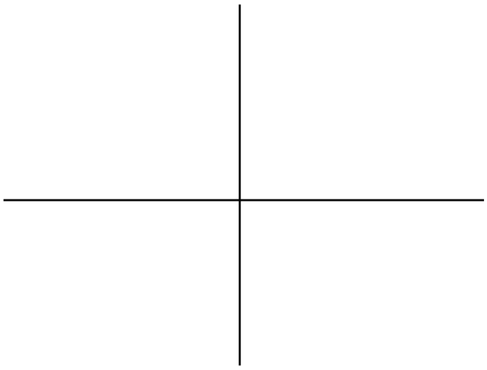
Esimerkki 3.1.

a) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $f(x, y, z) = x + y - z$

Kahden muuttujan reaaliarvoista funktiota $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, voidaan havainnollistaa pinnan $z = f(x, y)$ avulla x, y, z–koordinaatistossa. Tämä pinta on funktion f kuvaaja.

Esimerkki 3.2. Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ funktio, missä määrittelyjoukko $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, ja $f(x, y) = 3$ kaikilla $(x, y) \in X$. Tällöin määrittelyehto $x^2 + y^2 \leq 1$ antaa 1–säteisen ympyrän sisältämän alueen.





Huomautus. Joskus funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ kukin muuttuja x_i saa arvoja jollakin välillä I_i.

Esimerkki 3.3.

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y + z, \quad 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y < 2,\ 0 \leq z < 3.$$

Siis $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in [0, 1],\ y \in [1, 2[,\ z \in [0, 3[\}$.

Jos funktion määrittelyjoukkoa ei ole annettu, määrittelyjoukoksi ajatellaan kaikki ne pisteet, joissa funktion arvo voidaan määritellä.

Funktiolla $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ on *raja-arvo* b pisteessä $(a_1, \ldots, a_n)$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellaiset luvut $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0$, että $|f(x_1, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon$ aina, kun $0 < |x_1 - a_1| < \delta_1, \ldots, 0 < |x_n - a_n| < \delta_n$.

Tällöin merkitään

$$\lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (a_1, \ldots, a_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = b.$$

Samoin funktio $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ on *jatkuva* pisteessä $(a_1, \ldots, a_n)$, jos

$$\lim_{(x_1, \ldots, x_n) \to (a_1, \ldots, a_n)} f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Geometrisesti funktion $f(x, y)$ jatkuvuus pisteessä (a, b) merkitsee sitä, että pinta $z = f(x, y)$ on jatkuva eikä sisällä hyppäystä pisteessä (a, b).

Esimerkki 3.4.

a) Määrää $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,1)} \frac{y}{x^2}$

b) Onko funktio $f(x, y) = x^2 + y^2$ jatkuva pisteessä $(1, 1)$?

c) Onko funktio $f(x, y) = |x| + y^2$ jatkuva?

3.2 Osittaisderivaatat

Olkoon $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ n:n muuttujan funktio. Tutkitaan funktion f derivaattaa muuttujan x_1 suhteen pisteessä $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Asettamalla $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ saadaan yhden muuttujan x_1 funktio $y = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$. Jos tämä funktio $f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ on *derivoituva* kohdassa $x_1 = a_1$, eli raja-arvo

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_1 - a_1}$$

on olemassa ja äärellinen, niin sitä sanotaan funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *osittaisderivaataksi muuttujan* x_1 *suhteen* pisteessä $(a_1, \ldots, a_n)$.

Siis

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_1 - a_1}$$

Tätä merkitään myös:

$$f_1(a_1, \ldots, a_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n).$$

Vastaavasti lasketaan osittaisderivaatat muuttujien x_i suhteen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}$$

Huomautus. Funktion osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen kuvaa funktion hetkellistä muutosnopeutta muuttujan x_i suhteen.

Esimerkki 3.5. Määrää funktion $f(x, y) = x^2 + xy + 1$ osittaisderivaatat muuttujien x ja y suhteen pisteessä $(1, 3)$.

Osittaisderivaatan funktio saadaan seuraavasti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

3.2.1 Osittaisderivaattojen määrääminen

Jos funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen on olemassa funktion määrittelyjoukon jokaisessa pisteessä, funktion kyseinen osittaisderivaattafunktio saadaan derivoimalla funktiota $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ muuttujan x_i suhteen ja pitämällä muut muuttujat vakiona. Tällöin käytetään merkintää $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, f_{x_i}, f_i.

Huomautus. Funktiot, joille on annettu derivoimissäännöt, ovat derivoituvia määrittelyjoukossaan D_f. Jos funktio ei ole jatkuva, ei se ole derivoituvakaan.

Lause 3.1. *Olkoon funktio f jatkuva pisteessä $(a_1, \ldots, a_n)$. Tällöin funktio f on derivoituva muuttujan x_i suhteen pisteessä $(a_1, \ldots, a_n)$ eli $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ on olemassa, jos*

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

on olemassa.

Esimerkki 3.6. Onko funktio $f(x, y) = |x| + y^2$ derivoituva?

Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen pisteessä $(a_1, \ldots, a_n)$ saadaan sijoittamalla f:n osittaisderivaattafunktioon $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ piste $(a_1, \ldots, a_n)$.

Esimerkki 3.7. Määrää funtion $f(x, y, z) = xe^{x+y} + z^2x + xyz$ osittaisderivaattafunktiot muuttujien x, y ja z suhteen. Laske näiden arvo pisteessä $(1, 0, 2)$.

3.3 Kokonaisdifferentiaali

Olkoon funktion $z = f(x, y)$ osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia ja olkoon $(a, b) \in D_f$.

Tällöin

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x, y) - f(a, b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + u_1(x, y)(x - a) + u_2(x, y)(y - b), \end{aligned} \tag{6}$$

missä $u_1 \to 0$ ja $u_2 \to 0$, kun $x \to a$ ja $y \to b$.

Tämä on funktion f *differentiaalikehitelmä*.

Kuten yhden muuttujan tapauksessa, *differentiaali*

$$dz = df(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot dy,$$

missä $dx = \Delta x$ ja $dy = \Delta y$.

Differentiaali $dz = df(a, b)$ arvioi funktion $z = f(x, y)$ *todellista* muutosta $\Delta z = \Delta f = f(x, y) - f(a, b)$ hyvin pisteen (a, b) läheisyydessä.

Geometrisesti Δz:n korvaaminen dz:lla vastaa pinnan $z = f(x,y)$ korvaamista pisteeseen $(a,b,f(a,b))$ piirretyllä tangenttitasolla $z_t(x,y)$, joka saadaan yhtälöstä

$$z_t - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b).$$

Huomautus. Jokainen muotoa $ax + by + cz + d = 0 \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ oleva yhtälö on avaruuden $\mathbb{R}^3$ jonkin tason yhtälö ($d = 0 \;\Rightarrow\;$ taso kulkee origon kautta).

Lause 3.2. Kokonaisdiffentiaali *n:n muuttujan funktiolle $y = f(x_1,\dots,x_n)$:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Esimerkki 3.8. Olkoon $f(x,y) = x^3 + 3y^2$. Määrää funktion f muuttujan x muutosta $\frac{1}{2}$ ja muuttujan y muutosta $\frac{1}{3}$ vastaava kokonaisdifferentiaali ja todellinen muutos kohdassa $(2,3)$.

3.4 Yhdistetyn funktion derivointi

Oletetaan, että funktion $y = f(x_1,\dots,x_n)$ osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ ovat olemassa eli funktio on derivoituva muuttujien suhteen. Oletetaan lisäksi, että kukin $x_1, x_2, \dots, x_n$ on edelleen muuttujan t funktio, ts. $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$.

Tällöin myös funktio f on muuttujan t funktio ja funktion f (kokonais)derivaatta muuttujan t suhteen saadaan lausekkeesta

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt},$$

kun muuttujat x_i ovat derivoituvia muuttujansa t suhteen.

Tai: sijoittamalla.

Esimerkki 3.9. $f(x,y) = x^2 - 3xy^2$, missä $x = 2t$ ja $y = t^2$. Määrää $\frac{df}{dt}$.

Jos funktio $y = f(x_1,\dots,x_n)$ on derivoituva muuttujien x_i suhteen ja kukin muuttuja x_i on muuttujien $t_1,\dots,t_m$ funktio (ts. $x_1 = x_1(t_1,\dots,t_m),\dots,$ $x_n = x_n(t_1,\dots,t_m)$) ja lisäksi kukin x_i on derivoituva muuttujiensa t_i suhteen, siis osittaisderivaatat

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial x_1}{\partial t_m},\dots,\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

ovat olemassa.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial t_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_m}
\end{aligned}$$

Tai: sijoittamalla.

Esimerkki 3.10. Olkoon $f(x, y) = x^2 - 3xy^2$, missä $x = u \cdot v$ ja $y = u^2 + v^2$. Määrää $\frac{\partial f}{\partial u}$ ja $\frac{\partial f}{\partial v}$.

3.5 Osittaisderivaatan taloustieteellisiä sovellutuksia

3.5.1 Rajakustannusfunktiot

Oletetaan, että kahden hyödykkeen A ja B tuottamisesta koituvia *kokonaiskustannuksia* kuvaa funktio

$$C = C(x, y),$$

missä

$$\begin{aligned}
x &= \text{hyödykkeen } A \text{ tuotantomäärä}, \\
y &= \text{hyödykkeen } B \text{ tuotantomäärä}.
\end{aligned}$$

Tällöin *rajakustannusfunktiot* ovat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial x} &= \text{rajakustannus tuotantomäärän } x \text{ suhteen}, \\
\frac{\partial C}{\partial y} &= \text{rajakustannus tuotantomäärän } y \text{ suhteen}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.11. Olkoon kustannusfunktio $C(x, y) = x \cdot \ln(5 + y)$. Tällöin rajakustannukset ovat $\frac{\partial C}{\partial x} = \ln(5 + y)$ ja $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x}{5+y}$.

3.5.2 Kysyntäfunktiot

Oletetaan, että kahden hyödykkeen kysynnän määrät ovat x ja y ja vastaavat hinnat p ja q ja että $x = f(p, q)$ ja $y = g(p, q)$. (Siis kysynnät x ja y riippuvat vain hinnoista p ja q.)

Saadut funktiot

$$x = f(p, q) \quad \text{ja} \quad y = g(p, q)$$

ovat *kysyntäfunktioita*.

Kysyntäfunktioilla $x = f(p, q)$ ja $y = g(p, q)$ on seuraavat ominaisuudet

1. $x, y, p, q, \geq 0$
2. Jos hinta q on vakio, niin kysyntä x on hinnan p suhteen vähenevä funktio. Samoin, jos p on vakio, kysyntä y on hinnan q suhteen vähenevä funktio.
3. Yhtälöryhmä $\begin{cases} x = f(p, q) \\ y = g(p, q) \end{cases}$ voidaan yksikäsitteisesti ratkaista hintojen p ja q suhteen eli on mahdollista määrätä käänteisfunktiot $p = F(x, y)$ ja $q = G(x, y)$.

Kun kysyntäfunktiot ovat $x = f(p, q)$ ja $y = g(p, q)$, niin

$\dfrac{\partial x}{\partial p}$ on kysynnän x *rajakysyntä* hinnan p suhteen

$\dfrac{\partial x}{\partial q}$ on kysynnän x rajakysyntä hinnan q suhteen

$\dfrac{\partial y}{\partial p}$ on kysynnän y rajakysyntä hinnan p suhteen

$\dfrac{\partial y}{\partial q}$ on kysynnän y rajakysyntä hinnan q suhteen

Esimerkki 3.12. Olkoon kysyntäfunktiot $x = 2e^{q-p}$ ja $y = 3e^{p-q}$. Tällöin rajakysyntäfunktiot ovat

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -2e^{q-p}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = 2e^{q-p}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = 3e^{p-q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} = -3e^{p-q}.$$

Määritellään nyt kysyntäfunktioiden $x = f(p,q)$ ja $y = g(p,q)$ *osajoustot:*

$$
\begin{aligned}
E_p x_{(q=c_1)} &= \frac{p}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} && \text{Kysynnän } x \text{ \textit{osittaisjousto} hinnan } p \text{ suhteen, kun } q = c_1 \\
E_q x_{(p=c_2)} &= \frac{q}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} && \text{Kysynnän } x \text{ osittaisjousto hinnan } q \text{ suhteen, kun } p = c_2 \\
E_p y_{(q=c_3)} &= \frac{p}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p} && \text{Kysynnän } y \text{ osittaisjousto hinnan } p \text{ suhteen, kun } q = c_3 \\
E_q y_{(p=c_4)} &= \frac{q}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} && \text{Kysynnän } y \text{ osittaisjousto hinnan } q \text{ suhteen, kun } p = c_4
\end{aligned}
$$

3.5.3 Tuotantofunktiot

Olkoon hyödykkeen *tuotantofunktio* $z = f(x,y)$, missä

$$
\begin{aligned}
z &= \text{hyödykkeen tuotantomäärä} \\
x \text{ ja } y &= \text{kahden tuotannontekijän käyttömäärät} \\
&\quad\ \text{(työ, maa, pääoma, materiaali, koneet).}
\end{aligned}
$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x} && \text{on tuotannontekijän } x \text{ \textit{rajatuottavuus}} \\
&\frac{\partial z}{\partial y} && \text{on tuotannontekijän } y \text{ rajatuottavuus.}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 3.13. Olkoon tuotantofunktio $z = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, missä x on työ ja y on pääoma. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} && \text{(työn rajatuottavuus)} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 4x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} \cdot y^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} && \text{(po:n rajatuottavuus)}
\end{aligned}
$$

3.6 Korkeammista osittaisderivaatoista

Jos funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ ovat edelleen derivoituvia, saadaan funktion f *toisen kertaluvun osittaisderivaatat*:

$$
\begin{aligned}
f_{x_1 x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \\
f_{x_1 x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
&\ldots, \\
f_{x_i x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}
$$

Vastaavasti määritellään vielä *korkeammatkin osittaisderivaatat*.

Esimerkki 3.14. Määrää funktion $f(x, y) = x^3 e^{3y}$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

3.7 Implisiittinen derivointi

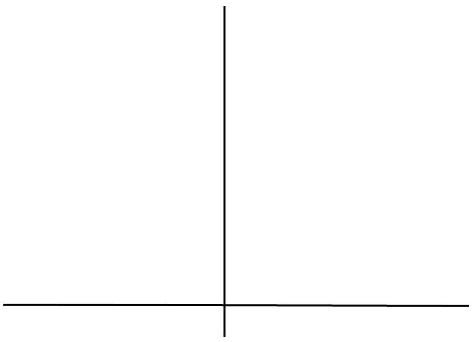
Esimerkki 3.15. Olkoon $z^2 x - 2xyz + y = 0$, missä $z = f(x, y)$. Määrää $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

4 Usean muuttujan funktion ääriarvoista

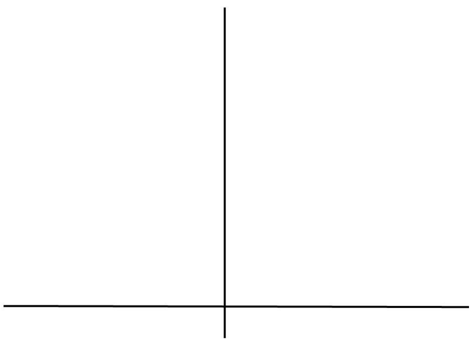
4.1 Usean muuttujan funktion ääriarvokohta

Funktiolla $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ on pisteessä $(a_1, \ldots, a_n) \in D_f$ *suurin arvo* (absoluuttinen maksimi), jos $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n)$ kaikilla $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f$. Vastaavasti funktiolla on pisteessä $(a_1, \ldots, a_n) \in D_f$ *pienin arvo* (absoluuttinen minimi), jos $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(a_1, \ldots, a_n)$ kaikilla $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f$.

Esimerkki 4.1. Olkoon $z = f(x, y) = x + y$. Funktion kuvaaja on taso eikä sillä siksi ole suurinta eikä pienintä arvoa.



Esimerkki 4.2. Olkoon $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Funktion kuvaaja on paraboloidi. Suurinta arvoa ei ole, mutta pienin arvo on $f(0, 0) = -1$.



Piste $(a_1, \ldots, a_n) \in D_f$ on funktion f *paikallinen maksimikohta*, jos $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n)$ eräässä pisteen $(a_1, \ldots, a_n)$ ympäristössä. Tällöin

$f(a_1, \ldots, a_n)$ on funktion *paikallinen maksimiarvo*. Vastaavasti $(a_1, \ldots, a_n) \in D_f$ on funktion f *paikallinen minimikohta* ja $f(a_1, \ldots, a_n)$ *paikallinen minimiarvo*, jos $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(a_1, \ldots, a_n)$ eräässä pisteen $(a_1, \ldots, a_n)$ ympäristössä.

Lause 4.1 (KRP:n etsiminen)**.** *Olkoon funktio f* jatkuva *ja oletetaan, että sillä on* osittaisderivaatat *pisteessä* $(a_1, \ldots, a_n)$*. Jos funktiolla on paikallinen ääriarvo pisteessä* $(a_1, \ldots, a_n)$*, niin*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = 0, \\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \ldots, a_n) = 0, \\
&\ldots \\
&\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0.
\end{aligned}$$

Mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat saadaan siis ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\
\ldots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.
\end{cases}$$

Huomautus. KRP, joka ei ole ääriarvokohta, on satulapiste.

Esimerkki 4.3. Määrää kriittiset pisteet seuraaville funktioille

a) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$
b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

Lause 4.2. *Jos funktio $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ on jatkuva suljetussa joukossa*

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\},$$

niin voidaan löytää sellaiset pisteet $(c_1, \ldots, c_n) \in A$ ja $(d_1, \ldots, d_n) \in A$, että

$$f(c_1, \ldots, c_n) \leq f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(d_1, \ldots, d_n)$$

kaikilla $(x_1, \ldots, x_n) \in A$.

Siis suljetussa joukossa jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tässä joukossa.

Lause 4.3. *Funktion* mahdolliset ääriarvokohdat *löydetään tutkimalla:*

1. *Osittaisderivaattojen* 0*–kohdat*
2. *Määrittely-/tarkastelujoukon A reunat (ja nurkat),* *ts. arvot* $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ *ja* $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$
3. *Pisteet, joissa osittaisderivaattoja ei ole*
4. *Epäjatkuvuuskohdat*

Jos funktio on jatkuva ja derivoituva suljetussa joukossa A, niin mahdolliset ääriarvokohdat löytyvät kohtien 1. ja 2. avulla. Näistä valitaan pienin ja suurin.

4.2 Usean muuttujan funktion ääriarvon laatu

Lause 4.4. Derivoituva *funktio* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *on* ylöspäin kupera*, jos*

1)

$$f(\alpha a_1+(1-\alpha)b_1, \ldots, \alpha a_n+(1-\alpha)b_n) \geq \alpha f(a_1, \ldots, a_n)+(1-\alpha)f(b_1, \ldots, b_n)$$

aina, kun $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in D_f$ *ja* $0 < \alpha < 1$.

2)

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &\leq f(a_1, \ldots, a_n) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_1 - a_1) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_n - a_n) \end{aligned}$$

aina, kun $(a_1, \ldots, a_n) \in D_f$.

3)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_i h_j \leq 0$$

aina, kun $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f$, $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$ *ja* $h_i \neq h_j$.

Kun eo. ehdoissa epäyhtälömerkki muutetaan vastakkaiseksi, saadaan alaspäin kuperan *funktion kolme tulosta.*

Esimerkki 4.4. Tutki funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - 2xz + z^2 - 1$ kuperuutta.

Lause 4.5. *Olkoon* $z = f(x, y)$ *2. kertaluvun* osittaisderivaattoineen jatkuva. *Tällöin* $z = f(x, y)$ *on* ylöspäin kupera *täsmälleen silloin, kun kaikilla* $(x, y) \in D_f$

(i)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 \geq 0$$

ja alaspäin kupera *täsmälleen silloin, kun*

(*ii*)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0 \qquad ja \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 \geq 0$$

Esimerkki 4.5. Tutki funktion $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 3xy$ kuperuutta.

Lause 4.6. *Oletetaan, että* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *on 1. kertaluvun* osittaisderivaattoineen jatkuva*. Jos funktio on ylöspäin kupera, sen jokainen kriittinen piste on absoluuttinen maksimikohta. Jos funktio on alaspäin kupera, sen jokainen kriittinen piste on absoluuttinen minimikohta.*

Lause 4.7. *Oletetaan, että funktio* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *on 2. kertaluvun* osittaisderivaattoineen *jatkuva ja piste* $(a_1, \ldots, a_n)$ *on funktion* kriittinen piste (*osittaisderivaatat*=0)*. Tällöin kriittinen piste* $(a_1, \ldots, a_n)$ *on*

(*i*) paikallinen minimikohta*, jos*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) \cdot h_i h_j > 0$$

kaikilla $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$, $h_i \neq h_j$.
(*Siis f alaspäin kupera KRP:n ympäristössä.*)

(*ii*) paikallinen maksimikohta*, jos*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) \cdot h_i h_j < 0$$

kaikilla $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$, $h_i \neq h_j$.
(*Siis f ylöspäin kupera KRP:n ympäristössä.*)

(*iii*) satulapiste*, jos*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) \cdot h_i h_j$$

saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, kun termit $h_1, \ldots, h_n$ *vaihtelevat.*

(*iv*) *Testi ei kerro mitään, kun*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) \cdot h_i h_j = 0$$

joillakin $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$, $h_i \neq h_j$.

Esimerkki 4.6. Etsi funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^4 - 2xz + z^2 - 1$ ääriarvot.

Lause 4.8. *Olkoon funktio $z = f(x, y)$ 2. kertaluvun* osittaisderivaattoineen jatkuva *ja (a, b) on funktion* kriittinen piste. *Tällöin kriittinen piste (a, b) on*

(i) paikallinen minimikohta*, jos*

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2 > 0$$

$$\textit{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0$$

(ii) paikallinen maksimikohta*, jos*

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2 > 0$$

$$\textit{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0$$

(iii) satulapiste*, jos*

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2 < 0$$

(iv) *Testi ei kerro mitään, jos $\Delta = 0$.*
Tutki tarkemmin.

Esimerkki 4.7. Määrää funktion $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$ paikalliset ääriarvot.

Esimerkki 4.8. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$ suurin ja pienin arvo joukossa $A = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2\}$.

5 Sidotut ääriarvot

5.1 Sidotut ääriarvot yhtälörajoitteen tapauksessa

Oletetaan, että funktiot $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ ovat 2. kertaluvun *osittaisderivaattoineen jatkuvia* määrittelyjoukossaan. Määrättävä funktion $f(x, y)$ *paikalliset ääriarvot ehdolla* $g(x, y) = 0$.

5.1.1 Sijoitus

Ratkaistaan x tai y ehtoyhtälöstä $g(x, y) = 0$ (jos mahdollista) ja sijoitetaan funktioon $f(x, y)$, jolloin saadaan yhden muuttujan funktio, jolle lasketaan ääriarvot normaalisti.

Esimerkki 5.1. Etsi funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ääriarvot ehdolla $x + 2y = 24$.

5.1.2 Lagrangen menetelmä

Muodostetaan *kohdefunktio* $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Määritetään kohdefunktion $F(x, y, \lambda)$ *kriittiset pisteet* eli mahdolliset ääriarvokohdat ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ääriarvon *laadun* testaaminen *kriittisessä pisteessä:*

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

$\Rightarrow$ paikallinen maksimikohta

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$$

$\Rightarrow$ paikallinen minimikohta

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 \leq 0$$

$\Rightarrow$ testi ei anna tulosta (tutkittava funktioita tarkemmin)

Esimerkki 5.2. Etsi funktion $f(x,y) = 5x^2+6y^2-xy$ ääriarvot ehdolla $x+2y = 24$.

5.1.3 Lagrangen yleistys

Lagrangen menetelmä voidaan yleistää n:n muuttujan funktiolle $f(x_1,\ldots,x_n)$ ja k:lle ehdolle

$$g_i(x_1,\ldots,x_n) = 0, \quad i = 1,\ldots,k$$

Kohdefunktioksi F saadaan tällöin

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1,\ldots,x_n).$$

Laskemalla kohdefunktion F osittaisderivaatat muuttujien $x_1,\ldots,x_n$ ja $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ suhteen ja merkitsemällä ne nollaksi, saadaan yhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on *kriittiset pisteet* eli mahdolliset ääriarvokohdat. Siis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, & i = 1,\ldots,n \\ g_i = 0, & i =,1,\ldots,l \end{cases}.$$

Kriittinen piste on funktion f paikallinen maksimikohta (vastaavasti minimikohta) ehdoilla g_i, jos tämä KRP on kohdefunktion F paikallinen maksimikohta (vastaavasti minimikohta). Funktion F ääriarvon *laatutarkastelu* normaalisti (s. 87).

5.1.4 Lagrangen kertoimen tulkinta

Tehtävä alunperin muotoa:

Maksimoi/minimoi funktio $f(x,y)$ ehdolla $\overline{g}(x,y) = b$. Voidaan osoittaa, että optimikohdassa (x_0,y_0)

$$\lambda = \frac{\partial f(x,y)}{\partial b}.$$

Eli kerroin λ arvioi kuinka paljon optimiarvo muuttuu, jos alkuperäisen tehtävän rajoitettu b muutetaan.

Eli jos rajoitteessa oleva vakio b muuttuu yhden yksikön, niin optimiarvo muuttuu λ yksikköä.

Usein b kuvaa jonkin resurssin määrää (työ, luonnonvarat), jolloin λ ilmoittaa resurssin varjohinnan. Eli paljonko kannattaa maksaa, jos saa yhden yksikön lisää resurssia.

Huomautus. Jotta arviointimenetelmä toimii, ehdossa on oltava muuttujien kertoimien positiivisia.

Esimerkki 5.3. Anna arvio funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ääriarvoille ehdolla $x + 2y = 25$.

Esimerkki 5.4. Anna arvio funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ääriarvoille ehdolla $x + 2y = 23$.

5.2 Absoluuttiset ääriarvot ehtoalueessa

Maksimoi/minimoi funktio $f(x, y)$ usean ehdon määräämässä *ehtoalueessa*

$$E = \{(x, y) \,|\, g_i(x, y) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Ehdot toteuttavat absoluuttiset ääriarvot löytyvät joko paikallisista ääriarvokohdista ehtoalueen E sisältä, ($g_i(x, y) < 0$), tai sidotuista ääriarvokohdista ehtoalueen E reunalta, ($g_i(x, y) = 0$).

Esimerkki 5.5. Etsi funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ääriarvot joukossa $E = \{(x, y) \,|\, x \geq 0, y \geq 0,\ x + 2y \leq 24\}$.

5.3 Sidotut ääriarvot epäyhtälörajoitteen tapauksessa

5.3.1 Kuhn-Tucker –menetelmä

Oletetaan, että on määrättävä *ylöspäin kuperan* derivoituvan funktion $f(x, y)$ *maksimi ehdolla* $g(x, y) \leq 0$, missä $g(x, y)$ on *alaspäin kupera* funktio.

Jos on määrättävä *alaspäin kuperan* funktion $f(x, y)$ *minimi ehdolla* $g(x, y) \leq 0$, missä $g(x, y)$ on *alaspäin kupera*, niin muutetaan tehtävää siten, että määrätäänkin *ylöspäin kuperan* funktion $-f(x, y)$ *maksimi.*

Kuperuuden tutkiminen:

1) Kahden muuttujan toisen asteen polynomi

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

on alaspäin kupera, jos

$$4AC - B^2 > 0 \quad \text{ja} \quad A > 0 \quad \text{ja} \quad C > 0.$$

Polynomi $f(x,y)$ on ylöspäin kupera, jos

$$4AC - B^2 > 0 \quad \text{ja} \quad A < 0 \quad \text{ja} \quad C < 0.$$

Polynomi ei ole alaspäin eikä ylöspäin kupera, jos

$$4AC - B^2 < 0.$$

2) Funktio $f(x,y)$ on alaspäin kupera, jos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0 \quad \text{ja} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 \geq 0 \quad \forall\ (x,y) \in D_f$$

Funktio $f(x,y)$ on ylöspäin kupera, jos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0 \quad \text{ja} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 \geq 0 \quad \forall\ (x,y) \in D_f$$

Kuhn-Tucker –menetelmä on seuraava:

1. Muodostetaan *kohdefunktio* $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$. Ratkaistaan *kriittiset pisteet* yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{(vrt. Lagrange)}$$

   Olkoon ratkaisu (x_0, y_0) ja λ_0.
2. Jos saatu $\lambda_0 > 0$, niin kriittinen piste (x_0, y_0) on funktion $f(x,y)$ sidottu *maksimikohta* ehdolla $g(x,y) \leq 0$ (löytyy siis alueen reunalta $g(x,y) = 0$).

Jos $\lambda_0 \leq 0$, niin piste (x_0, y_0) *ei ole ääriarvokohta*. Tällöin funktion $f(x, y)$ sidottu maksimikohta ehdolla $g(x, y) \leq 0$ on sen *normaali maksimikohta ilman ehtoa* $g(x, y) \leq 0$. Tämä maksimikohta saadaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

ratkaisuna (löytyy siis alueen sisältä $g(x, y) < 0$).

Esimerkki 5.6. Määrää funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ minimi ehdolla $x + 2y \geq 24$.

Esimerkki 5.7. Määrää funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ minimi ehdolla $x + 2y \leq 24$.

5.3.2 Kahden muuttujan ja yhden epäyhtälörajoitteen tapaus (ilman Kuhn-Tuckeria)

Etsittävä ääriarvot funktiolle $f(x, y)$ ehdolla $g(x, y) \leq 0$.

Menetelmä on seuraava:

1. Ääriarvotetaan funktio $f(x, y)$ *ilman ehtoa* $g(x, y) \leq 0$. Ratkaistaan kuten normaali ääriarvotehtävä. Siten mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (x_0, y_0) löytyy funktion $f(x, y)$ osittaisderivaattojen nollakohtana.

   Suoritetaan normaali laatutarkastelu kriittiselle pisteelle (x_0, y_0).

   Jos kriittinen piste toteuttaa ehdon $g(x, y) \leq 0$, niin se on myös tämän ehdon mukainen sidottu paikallinen ääriarvokohta.

   (Ääriarvokohta löytyy alueen sisältä, $g(x, y) < 0$.)

2. Tarkastellaan epäyhtälörajoitteen $g(x, y) \leq 0$ sijaan yhtälörajoitetta $g(x, y) = 0$.

   Ratkaistaan kuten normaali sidottu ääriarvotehtävä Lagrangen menetelmällä, missä kohdefunktio on nyt muotoa

   $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

   Olkoon ratkaisuna saatu kriittinen piste (x_0, y_0).

Suoritetaan Lagrangen menetelmän laatutarkastelu löydetylle kriittiselle pisteelle.

(Ääriarvokohta löytyy alueen reunalta, $g(x, y) = 0$.)

3. Lopullinen päättely kohtiin 1. ja 2. perustuen.

Esimerkki 5.8. Maksimoi/minimoi $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ehdolla $x + 2y \leq 24$.

Esimerkki 5.9. Maksimoi/minimoi $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ehdolla $x + 2y \geq 24$.

5.4 Hyötyfunktion maksimi

Kuluttajan oletetaan valitsevan hyödykkeitä siten, että niiden käytöstä saatava *tyytyväisyys maksimoituu.*

Oletetaan, että kuluttajan ostot rajoittuvat kahteen hyödykkeeseen Q_1 ja Q_2.

Hyötyfunktio on

$$U = f(q_1, q_2),$$

missä q_1 ja q_2 ovat hyödykkeiden kulutusmäärät.

Siis hyötyfunktio $U = f(q_1, q_2)$ kuvaa hyödykkeiden kulutusmääristä aiheutuvaa tyytyväisyyttä.

Oletetaan, että hyötyfunktiolla $U = f(q_1, q_2)$ on jatkuvat 1. ja 2. kertaluvun osittaisderivaatat olemassa. Nämä osittaisderivaatat ovat hyödykkeiden rajahyötyjä.

Tyytyväisyys kasvaa kulutuksen kasvaessa eli

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} > 0.$$

Kuluttaja haluaa *maksimoida hyötynsä*, mutta kulutusta rajoittaa *budjettirajoite*

$$y_0 = p_1 q_1 + p_2 q_2,$$

missä y_0 on ostamiseen käytettävissä oleva rahamäärä ja p_1 ja p_2 ovat hyödykkeiden Q_1 ja Q_2 yksikköhintoja.

Maksimoidaan siis hyötyfunktio $U = f(q_1, q_2)$ budjettirajoitteella $y_0 = p_1q_1+p_2q_2$.

Budjettirajoitteesta saadaan

$$q_2 = \frac{y_0 - p_1 q_1}{p_2}.$$

Näin ollen hyötyfunktio

$$U = f\left(q_1, \frac{y_0 - p_1 q_1}{p_2}\right)$$

on yhden muuttujan q_1 funktio.

Maksimoidaan hyötyfunktio U muuttujan q_1 suhteen.

Asetetaan ensin

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0. \qquad \text{(Etsitään siis KRP)}$$

Tämä ehto on välttämätön, muttei riittävä. Toisen derivaatan negatiivisuus takaa maksimin olemassaolon. Täytyy siis vielä olla

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0.$$

Esimerkki 5.10. Maksimoi hyötyfunktio $U = q_1 q_2$, kun $p_1 = 15$, $p_2 = 5$ ja kuluttajan tulot $y_0 = 150$.