Matematiikan perusteet taloustieteilijöille 2

800118P

Luentomoniste

Kari Myllylä
Niina Korteslahti
Oulun yliopisto
Matemaattisten
tieteiden laitos

Kevät 2014

Sisältö

1 Matriisialgebra ja optimointi

Matriisien avulla voidaan

- käsitellä yhtälöitä tehokkaasti
- ratkaista yhtälöryhmiä
- ratkaista optimointitehtäviä
- regressioanalyysi
- laatia erilaisia malleja esim. panos-tuotos–malli

1.1 Määritelmä

Matriisi on taulukko

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = A_{m\times n} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m\times n} \,,$$

missä luvut a_{ij} ovat reaalilukuja. Lukuja a_{ij} sanotaan matriisin A *alkioiksi*. Alkio a_{ij} on matriisin A i:nnellä vaakarivillä ja j:nnellä pystyrivillä oleva alkio. Matriisi, jossa on m vaakariviä ja n pystyriviä, on $m\times n$–matriisi; merkitään $A_{m\times n}$. Jos $m = n$, niin A on *neliömatriisi*.

Kaksi matriisia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}$$

ovat *samat* eli $A = B$, jos ja vain jos

(i) $m = r$ ja $n = s$

(ii) $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i, j$.

Jos matriisissa $n = 1$ eli se on $m \times 1$-matriisi, niin kysymyksessä on m–ulotteinen *pystyvektori* $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$, missä u_i on vektorin $\bar{u}$ i. komponentti.

Vastaavasti $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ on n-ulotteinen *vaakavektori* ($1\times n$–matriisi) ja v_i on vektorin $\bar{v}$ i. komponentti.

1.2 Matriisien laskutoimituksia

1.2.1 Matriisien yhteen- ja vähennyslasku

Matriisit A ja B voidaan laskea yhteen (vähentää toisistaan) *jos ja vain jos* ne ovat molemmat $m \times n$–matriiseja.

Olkoot A ja B $m \times n$–matriiseja, ts.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Tällöin

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Vastaavasti

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Matriisien yhteenlasku on

1. vaihdannainen: $A + B = B + A$
2. liitännäinen: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Esimerkki 1.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 12 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 8 & 7 \\ -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} =$$

1.2.2 Skalaarilla kertominen

Matriisilaskennassa reaalilukua kutsutaan *skalaariksi*.

Olkoon nyt $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ja $k \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n} = Ak.$$

Esimerkki 1.2.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix} =$$

Huomautus. $A - B = A + (-B) = A + (-1) \cdot B$

1.2.3 Matriisien kertolasku:

Matriisien $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $B = (b_{ij})_{r \times s}$ tulo AB on mahdollinen *jos ja vain jos* $n = r$. Siis matriisin A pystyrivien lukumäärä = matriisin B vaakarivien lukumäärä. Matriisi A on tulon AB *edellinen tekijä* ja B *jälkimmäinen tekijä*.

Olkoon $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ja $B = (b_{ij})_{n \times s}$.

Tällöin $A_{m \times n} \cdot B_{n \times s} = (AB)_{m \times s} = (c_{ij})_{m \times s}$, missä $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ eli *alkio* c_{ij} *saadaan matriisin* A i*:nnen vaakarivin ja matriisin* B j*:nnen pystyrivin pistetulona.*

Siis

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}_{n \times s} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{ks} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{ks} \end{pmatrix}_{m \times s}. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{ja} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Laske AB, BA ja AC.

Matriisien kertolasku on

1. liitännäinen: $A(BC) = (AB)C$
2. *ei* vaihdannainen: siis yleensä $AB \neq BA$.

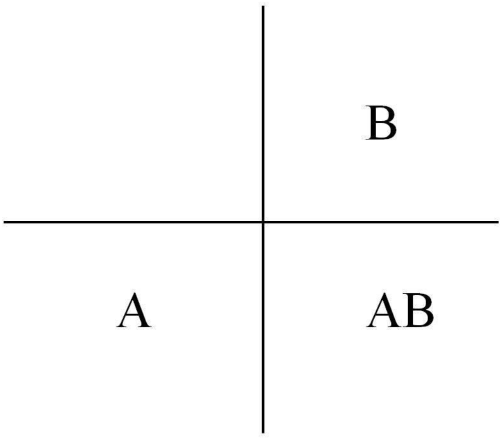
Esimerkki 1.4.

$$(2,1,0)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \qquad\qquad \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot(2,1,0) =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \qquad\qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} =$$

Falk-kaavio: (ks. Esim. 1.3)

$$A = \begin{pmatrix}3 & 5 & 8\\10 & 4 & 1\end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix}6 & 9\\1 & 7\\5 & 11\end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad AB =$$



1.3 Erikoistyyppisiä matriiseja

1.3.1 Diagonaalimatriisi

Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *neliömatriisi*. Matriisin A *päälävistäjän* muodostavat alkiot $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Matriisi A on *diagonaalimatriisi*, jos matriisin A *muut* alkiot paitsi mahdollisesti päälävistäjän alkiot ovat *nollia*.

Eli

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

on diagonaalimatriisi, jos $a_{ij} = 0$, kun $i \neq j$.

1.3.2 Identtinen matriisi (Yksikkömatriisi)

Identtinen matriisi on *diagonaalimatriisi*, jonka kaikki päälävistäjän alkiot ovat *ykkösiä*.

Siis $A = (a_{ij})_{n\times n}$ on identtinen matriisi, jos

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & i \neq j \\ a_{ii} = 1, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Identtistä matriisia merkitään symbolilla I_n $(= I_{n\times n})$. Siis

$$I_1 = \qquad\qquad , \quad I_2 = \qquad\qquad , \quad I_3 = \qquad\qquad\qquad \text{jne.}$$

Olkoon A $m \times n$–matriisi. Tällöin $A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$ ja $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

1.3.3 Nollamatriisi

Matriisi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ on *nollamatriisi*, jos $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i, j$. Nollamatriisia merkitään $\bar{O}_{m\times n}$.

Siis esimerkiksi

$$\bar{O}_{2\times 3} =$$

Selvästi

$$A_{m\times n} + \bar{O}_{m\times n} = \bar{O}_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n} \quad \text{ja}$$
$$B_{k\times m} \bar{O}_{m\times n} = \bar{O}_{k\times n} \quad \text{sekä} \quad \bar{O}_{m\times n} B_{n\times s} = \bar{O}_{m\times s}.$$

1.4 Transponoitu matriisi

Olkoon A $m\times n$–matriisi. Matriisin A *transponoitu matriisi* A^T on $n\times m$–matriisi, jonka i. vaakarivi on matriisin A i. pystyrivi (ja j. pystyrivi on matriisin A j. vaakarivi).

Jos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \text{ niin } \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

Huomautus.

$$(u_1, \ldots, u_n)^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T = (v_1, \ldots, v_n).$$

Diagonaalimatriisin D transponoitu matriisi D^T on aina alkuperäinen diagonaalimatriisi, eli $D^T = D$.

Esimerkki 1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 7 & 4 & 11 \\ 14 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T =$$

Neliömatriisi $A = (a_{ij})_{n\times n}$ on *symmetrinen*, jos $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i, j$. Tällöin $A = A^T$.

Symmetrinen matriisi A on *idempotentti*, jos lisäksi $A \cdot A = A$.

Esimerkki 1.6. Onko matriisi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

idempotentti matriisi?

Huomautus. Olkoot $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ ja $C = (c_{ij})_{n\times r}$. Tällöin

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{ja} \quad (BC)^T = C^T B^T.$$

1.5 Matriisin determinantti

Determinantti on *reaaliluku* ja määritellään vain *neliömatriiseille*. Matriisin A determinanttia merkitään $\det A$ ja $|A|$.

1.5.1 Determinantin määrääminen:

2×2*–matriisin determinantti*

$$\text{Kun } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}, \text{ niin } \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1×1–matriisin determinantti

$$\text{Kun } A = \big(a_{11}\big)_{1\times 1}, \text{ niin } \det A = |A| = a_{11}.$$

Esimerkki 1.7.

$$\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Determinantin määrittäminen yleisesti:

Jos $n > 2$, niin matriisin $A_{n\times n}$ determinantti palautuu 2×2–matriisin tapaukseen seuraavasti:

M_{ij} on sellainen $(n-1)\times(n-1)$–matriisi, joka saadaan matriisista A poistamalla siitä i. vaakarivi ja j. pystyrivi. M_{ij} on matriisin A (alkioon a_{ij} liittyvä) *alimatriisi*.

Determinantti $\det M_{ij} = |M_{ij}|$ on matriisin A (alkioon a_{ij} liittyvä) *alideterminantti*.

Skalaari $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ on matriisin A (alkioon a_{ij} liittyvä) *kofaktori*.

Tällöin matriisin A *determinantti*

$$\det A = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{(i+j)}|M_{ij}| \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Tällöin $\det A$ on *kehitetty i. vaakarivin* mukaan.

Samoin

$$\det A = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{(i+j)}|M_{ij}| \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\},$$

jolloin $\det A$ on kehitetty j. pystyrivin mukaan.

Siis $n \times n$–matriisin determinantti määrätään sen tiettyjen $(n-1)\times(n-1)$–alimatriisien determinanttien avulla.

Toistamalla yo. menettelyä jokaisen $n \times n$–matriisin A determinantti voidaan palauttaa sen tiettyjen 2×2–alimatriisien determinanteiksi.

Esimerkki 1.8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Määrää $|A|$.

Sarruksen menetelmä: - Käy vain 3×3-matriiseille.

Esimerkki 1.9. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Määrää $|A|$ Sarruksen menetelmällä.

1.5.2 Determinantin ominaisuuksia:

Olkoon A $n \times n$-matriisi.

1) Jos matriisin A kaksi samansuuntaista riviä vaihdetaan keskenään, determinantin merkki vaihtuu.

   Esimerkki 1.10.

$$\begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

2) Jos matriisin A jokin vaakarivi (tai pystyrivi) kerrotaan vakiolla $c \in \mathbb{R}$, determinantti muuttuu c–kertaiseksi.

   Esimerkki 1.11.

$$\begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

3) Jos matriisin A johonkin riviin lisätään jokin muu samansuuntainen rivi vakiolla kerrottuna, determinantin arvo ei muutu.
   Tavoite: Paljon 0:ia riville, jonka suhteen determinantti kehitetään.

Esimerkki 1.12.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

4) Jos $A = (a_{ij})$ on *yläkolmiomatriisi* (tällöin kaikki alkiot päälävistäjän alapuolella nollia) tai *alakolmiomatriisi* (kaikki alkiot päälävistäjän yläpuolella nollia), niin

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Ominaisuuksien 1) – 3) avulla saadaan jokaisen neliömatriisin determinantti muutettua ylä- tai alakolmiomatriisin determinantiksi, joka on helppo määrittää.

5) $|A| = |A^T|$
6) Jos matriisin A jokin vaakarivi (tai pystyrivi) koostuu pelkästään nollista, niin $|A| = 0$. (Kehitetään determinantti ko. rivin suhteen.)
7) Jos matriisin A kaksi samansuuntaista riviä ovat samat, niin $|A| = 0$.
8) Olkoot A ja B $n \times n$–matriiseja. Tällöin |AB|=|BA|=|A||B|.
9) Jos $A = (a_{ij})$ on diagonaalimatriisi, niin $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Esimerkki 1.13. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Määritetään $|A|$ käyttämällä ominaisuutta 3).

1.6 Käänteismatriisi

Olkoon A $n \times n$–*neliömatriisi*. Sellaista $n \times n$–matriisia B, joka toteuttaa ehdon $AB = BA = I_n$ sanotaan matriisin A *käänteismatriisiksi* ja merkitään $B = A^{-1}$.

Kaikilla neliömatriiseilla ei ole käänteismatriisia. Matriisi, jolla on käänteismatriisi, on *säännöllinen*.

Lause 1.1. *Matriisilla A on käänteismatriisi olemassa* jos ja vain jos $\det A \neq 0$.

Huomautus. Käänteismatriisi on yksikäsitteinen.

Todistus. Jos B_1 ja B_2 ovat sellaisia matriiseja, että

$$AB_1 = B_1A = I_n \quad \text{ja} \quad AB_2 = B_2A = I_n,$$

niin

$$B_1 = B_1I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2.$$

Siis

$$B_1 = B_2.$$

□

Huomautus. Jos $AB = I_n$, niin myös $BA = I_n$.

1.6.1 Menetelmiä käänteismatriisin ratkaisemiseksi:

1) Ratkaistaan matriisin A käänteismatriisi $A^{-1} = B$ yhtälöstä $AB = I_n$. (Siis B tuntematon matriisi.)

$$AB = I_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kysymyksessä on n^2:n tuntemattoman b_{ij} ja n^2:n yhtälön ryhmä, joka on vaikea ratkaista paitsi tapauksessa $n = 2$.

Esimerkki 1.14. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Määritä A^{-1} mikäli se on olemassa.

2) Käänteismatriisi kofaktorien ja determinantin avulla
Olkoon A $n \times n$–matriisi, jolle $\det A \neq 0$. Olkoon K seuraava matriisin A kofaktorien A_{ij} muodostama matriisi:

$$K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

missä $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ (alkion a_{ij} kofaktori).
Tällöin
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, K^T.$$

Esimerkki 1.15. Määritä matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{käänteismatriisi.}$$

3) Gaussin eliminoimismenetelmä
Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Muodostetaan matriisi
$$\left(A \,\middle|\, I_n \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)_{n\times 2n}.$$

Tässä matriisissa *voidaan*

i) vaakarivi kertoa millä tahansa vakiolla,
ii) jokin vaakarivi lisätä vakiolla kerrottuna toiseen vaakariviin,
iii) vaihtaa vaakarivit keskenään.

Näillä operaatioilla pyritään muuttamaan matriisi $\left(A \,\middle|\, I \right)$ muotoon $\left(I \,\middle|\, B \right)$, jolloin matriisi $B = A^{-1}$.

Esimerkki 1.16. Määritä matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{käänteismatriisi.}$$

1.6.2 Käänteismatriisin ominaisuuksia:

Olkoon A $n \times n$–matriisi, jolle $\det A \neq 0$ eli A^{-1} $\exists$. Tällöin

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ EI: $(A^T)^{-1} = A^{-1}$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, jos B^{-1} $\exists$

4) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

1.7 Lineaarisen yhtälöryhmän matriisimuoto ja sen ratkaiseminen

1) Tarkastellaan yhtälöryhmää, jossa muuttujien lukumäärä on sama kuin yhtälöiden lukumäärä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \,, \end{cases} \tag{1}$$

missä kertoimet a_{ij} ja vakiot c_i ovat tunnettuja. Tämä on n:n *muuttujan* $x_1, \ldots, x_n$ vakiokertoiminen lineaarinen n:n yhtälön ryhmä. (Siis muuttujien lkm = yhtälöiden lkm.)
Yhtälöryhmä (1) voidaan esittää *matriisimuodossa*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \tag{2}$$

eli muodossa

$$A \cdot \bar{X} = \bar{C}. \tag{3}$$

Jos kerroinmatriisilla A on käänteismatriisi, kerrotaan yhtälö (3) puolittain vasemmalta käänteismatriisilla A^{-1} ja saadaan:

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\bar{X}) &= A^{-1}\bar{C} \;\Leftrightarrow \\ (A^{-1}A)\bar{X} &= A^{-1}\bar{C} \;\Leftrightarrow \\ I\bar{X} &= A^{-1}\bar{C} \;\Leftrightarrow \\ \bar{X} &= A^{-1}\bar{C}. \end{aligned} \tag{4}$$

Lause 1.2. *Jos matriisi A on säännöllinen eli A^{-1} on olemassa* $(\det A \neq 0)$, *niin yhtälöryhmän* (1) *yksikäsitteinen ratkaisu on $\bar{X} = A^{-1}\bar{C}$. (Yhtälöryhmällä yksikäsitteinen ratkaisu $\Leftrightarrow$ A säännöllinen.)*

Esimerkki 1.17. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -2y - 3z = 1 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ -x - 2y - 2z = 1\,. \end{cases}$$

Lause 1.3. (Cramerin sääntö). *Oletetaan, että yhtälöryhmässä* (1) *on n* tuntematonta *ja n* yhtälöä *sekä* $\det A \neq 0$ *eli yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu $\bar{X} = A^{-1}\bar{C}$.*

Cramerin sääntö *yhtälöryhmän ratkaisemiseksi ilman käänteismatriisin A^{-1} laskemista on seuraava:*

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & c_n & a_{n3} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\,,\; x_n = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & c_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & c_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & c_n \end{vmatrix}.$$

Esimerkki 1.18. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - 2y + z = -9 \\ 4x + 3y + 2z = 1\,. \end{cases}$$

2) Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m\,, \end{cases} \tag{5}$$

eli n:n *muuttujan* $x_1, \dots, x_n$ ja m:n *yhtälön* ryhmä, joka voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \tag{6}$$

Matriisiesitys on tällöin muotoa:

$$A \cdot \bar{X} = \bar{C}, \qquad \text{missä } A = (a_{ij})_{m\times n}. \tag{7}$$

Tapauksessa $m \neq n$ A^{-1} ei ole olemassa ja $\det A$ ei ole olemassa, joten menetelmät $\bar{X} = A^{-1}\bar{C}$ ja Cramer eivät toimi. Samoin, jos $m = n$, mutta $|A| = 0$, niin menetelmät $\bar{X} = A^{-1}\bar{C}$ ja Cramer eivät toimi.

Lause 1.4 (Gaussin eliminoimismenetelmä)**.** *Gaussin eliminoimismenetelmää voidaan soveltaa myös tapauksissa, joissa kerroinmatriisilla A ei ole käänteismatriisia,* $\det A = 0$, *ja silloinkin, kun yhtälöryhmän yhtälöiden ja tuntemattomien muuttujien lukumäärä ei ole sama.*

Menetelmä perustuu siihen, että yhtälöryhmään (5) *voidaan soveltaa seuraavia alkeismuunnoksia sen ratkaisun muuttumatta*

(a) *yhtälöiden järjestyksen vaihto*

(b) *yhden tai useamman yhtälön kertominen vakiolla* ($\neq 0$)

(c) *yhden tai useamman yhtälön kerrannaisen lisääminen muihin yhtälöihin.*

Yhtälöryhmän asemasta tarkastelemme täydennettyä kerroinmatriisia

$$(A|\bar{C}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)_{m\times(n+1)}. \tag{8}$$

Nyt yhtälöryhmän (5) *alkeismuunnoksia* (a), (b) *ja* (c) *vastaa täydennettyyn kerroinmatriisiin* (8) *kohdistuvat muunnokset:*

(a) *vaakarivien järjestyksen vaihto*

(b) *yhden tai useamman vaakarivin kertominen nollasta eroavalla vakiolla*

(c) *vaakarivin kertominen vakiolla ja sen lisääminen toiseen vaakariviin.*

Huomautus. Vain vaakarivimuunnoksia.

Näillä muunnoksilla matriisi (8) pyritään saamaan muotoon

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \bar{X} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \end{array}\right) = \left(\, I \; \middle| \; A^{-1}\bar{C} \, \right) = \left(\, I \; \middle| \; \bar{X} \, \right), \tag{9}$$

josta saadaan ratkaisu $\bar{X}$. (Tapaus $m = n$ ja yksikäsitteinen ratkaisu.)

Tai muotoon

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right), \tag{10}$$

joka avataan takaisin yhtälöryhmäksi. (Tapaukset $m \neq n$ tai ei yksikäsitteistä ratkaisua.)

Esimerkki 1.19.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Esimerkki 1.20.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ 2x + 4y - 2z = 20 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Esimerkki 1.21.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

1.8 Lineaarinen riippuvuus ja matriisin aste

1.8.1 Lineaarinen riippuvuus

Olkoot $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$ n–komponenttisia vektoreita (vaaka- tai pystyvektoreita).

Vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$ ovat *lineaarisesti riippuvia*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $r_1, r_2, \ldots, r_m$, jotka eivät kaikki ole nollia, että

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \ldots + r_m\bar{v}_m = \bar{0}.$$

Tällöin jotkut vektorit voidaan esittää toisten *lineaarisena yhdisteenä.*

Jos ehdosta

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \ldots + r_m\bar{v}_m = \bar{0}.$$

seuraa, että $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 0$, niin vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_m$ ovat *lineaarisesti riippumattomia.* Tällöin mitään vektoria ei voida esittää toisten lineaarisena yhdisteenä.

Esimerkki 1.22. Tutki, ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat.

a) $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$ ja $(1, 3, 3)$

b) $(1, 2)$ ja $(2, 0)$

1.8.2 Matriisin aste

Matriisi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ on muodostunut m:stä vaakavektorista ja n:stä pystyvektorista. Jokaisella matriisilla *lineaarisesti riippumattomien vaakarivien lukumäärä on lineaarisesti riippumattomien pystyrivien lukumäärä.* Tätä lukumäärää sanotaan matriisin A *asteeksi* ja merkitään $r(A)$.

Tietysti $1 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

Esimerkki 1.23. Määritä matriisin A aste, kun

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Matriisin $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *alimatriisi* on matriisi, joka saadaan poistamalla matriisista A nolla tai useampia pysty- ja/tai vaakarivejä.

Lause 1.5. *Olkoon A matriisi ja m suurin sellainen kokonaisluku, että matriisilla A on olemassa $m \times m$–alimatriisi, jonka determinantti $\neq 0$. Tällöin $r(A) = m$.*

Esimerkki 1.24. (*Toisella tavalla.*) Määritä matriisin A aste, kun

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.8.3 Matriisin asteen ominaisuudet

Olkoot A ja B $n \times n$–matriiseja.

1) Diagonaalimatriisin aste = matriisin nollasta eriävien alkioiden lukumäärä. (Miksi?)

   Erityisesti $r(I_n) = n$.
2) $r(A) = r(A^T)$.
3) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

Lause 1.6. $r(A_{n\times n}) = n$ *jos ja vain jos A on säännöllinen eli* $\det A \neq 0$ *eli* A^{-1} $\exists$.

Siis A on säännöllinen jos ja vain jos sen kaikki pystyrivit (vast. vaakarivit) ovat lineaarisesti riippumattomat.

Matriisissa voidaan sen astetta muuttamatta:

a) Vaihtaa samansuuntaisten rivien järjestystä.
b) Kertoa mikä tahansa vaaka- tai pystyrivi nollasta eroavalla vakiolla.
c) Lisätä mihin tahansa riviin jokin toinen samansuuntainen rivi vakiolla kerrottuna.

Tavoite: Yläkolmio/alakolmiomatriisin aste on helppo laskea Lauseen 1.5 menettelyllä.

Esimerkki 1.25. Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & -8 & 6 & 9 \\ -5 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{aste.}$$

1.9 Matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

Matriisien sovelluksissa joudutaan joskus tilanteeseen, jossa on ratkaistava $n \times n$–matriisia A koskeva yhtälö

$$A_{m\times n}\bar{X}_{n\times 1} = \lambda \bar{X}, \tag{11}$$

missä $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat tuntemattomia.

$$\text{Esimerkiksi} \begin{cases} 2x + 3y + 5z = \lambda x \\ x \ + 2y + 2z = \lambda y \\ x \ + 3y + 3z = \lambda z \end{cases} \quad , x, y, z \text{ ja } \lambda \text{ tuntemattomia.}$$

Yhtälö (11) pätee aina, kun $\bar{X} = \bar{0}$.

Jos on olemassa nollavektorista eroava vektori $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ ja reaaliluku λ, joille $A\bar{X} = \lambda\bar{X}$, niin luku λ on matriisin A *ominaisarvo* ja $\bar{X}$ on ominaisarvoa λ vastaava *ominaisvektori* $\bar{X} \neq \bar{0}$.

Huomautus. Olkoon $\bar{X}$ matriisin A ominaisvektori ja λ vastaava ominaisarvo. Jos $a \neq 0$, niin myös $a\bar{X}$ on matriisin A ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

Todistus.

$$A(a\bar{X}) = (Aa)\bar{X} = (aA)\bar{X} = a(A\bar{X}) = a\lambda\bar{X} = \lambda(a\bar{X})$$

□

1.9.1 Ominaisarvojen määrääminen

Tarkastellaan yhtälöä (11)

$$
\begin{aligned}
&A\bar{X} = \lambda\bar{X} \\
\Leftrightarrow\ &A\bar{X} - \lambda\bar{X} = \bar{0} \\
\Leftrightarrow\ &A\bar{X} - \lambda I\bar{X} = \bar{0} \\
\Leftrightarrow\ &(A - \lambda I)\bar{X} = \bar{0}.
\end{aligned}
$$

Tällä yhtälöllä on *yksikäsitteinen ratkaisu*, kun $(A - \lambda I)$ on säännöllinen, eli $|A - \lambda I| \neq 0$ eli $(A - \lambda I)^{-1}$ on olemassa. Tämä ratkaisu on

$$\bar{X} = (A - \lambda I)^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Siten ratkaisu $\bar{X} = \bar{0}$ on *yksikäsitteinen* (eli ainoa) ratkaisu, kun $(A - \lambda I)$ on säännöllinen, eli $|A - \lambda I| \neq 0$.

Täten yhtälöllä $(A-\lambda I)\bar{X} = \bar{0}$ on (*ei-triviaali*) ratkaisu $\bar{X} \neq \bar{0}$ täsmälleen silloin, kun $A-\lambda I$ ei ole säännöllinen eli täsmälleen silloin, kun $\det(A - \lambda I) = |A-\lambda I| = 0$.

Siten matriisin A *ominaisarvot saadaan* yhtälön $|A - \lambda I_n| = 0$ reaalijuurina.

Lauseke $|A-\lambda I|$ on λ:n suhteen astetta n oleva polynomi. Sitä sanotaan matriisin A *karakteristiseksi* polynomiksi ja yhtälöä $|A - \lambda I| = 0$ matriisin A *karakteristiseksi* yhtälöksi.

Huomautus. Karakteristisen polynomin nollakohdat eivät välttämättä ole reaalisia (siis eivät ominaisarvoja) ja jokin nollakohta voi olla moninkertainen.

Esimerkki 1.26. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ominaisarvot.}$$

1.9.2 Ominaisarvojen ominaisuuksia

Olkoon matriisin A karakteristisen yhtälön $|A - \lambda I| = 0$ juuret $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (kaikki eivät ehkä eri lukuja eivätkä reaalisia). Tällöin

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A| = \det A$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Summa $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ on matriisin A *jälki*, merkitään $tr(A)$.

Huomautus. Ala- ja yläkolmiomatriisin ominaisarvot ovat päälävistäjän alkiot.

1.9.3 Ominaisvektoreiden määrittäminen

Olkoon λ matriisin $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ominaisarvo. Ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälön $(A - \lambda I_n)\bar{X} = \bar{0}$ ratkaisuna $\bar{X}$, missä $\bar{X} \neq \bar{0}$.

Esimerkki 1.27. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Pystyvektorien

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

pistetulo on $\bar{X} \cdot \bar{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Vastaavasti vaakavektorien

$$\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{ja} \quad \bar{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

pistetulo on $\bar{X} \cdot \bar{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Pystyvektorit

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan eli *ortogonaaliset*, jos

$$\bar{X}^T\bar{Y} = \bar{0} \quad \text{eli} \quad \bar{X}\cdot\bar{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Vastaavasti vaakavektorit $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\bar{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ovat ortogonaaliset, jos $\bar{X}\cdot\bar{Y} = 0$ eli $\bar{X}\bar{Y}^T = \bar{0}$.

Huomautus. Symmetrisen matriisin A eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaaliset. Siis jos $\bar{X}_i$ on symmetrisen matriisin A ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, niin $\bar{X}_1\cdot\bar{X}_2 = 0$.

1.10 Optimointi ja matriisit

Olkoon $y = f(\bar{X}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, eli f on n:n muuttujan funktio.

Funktion f *gradientti* $\nabla f(\bar{X})$ pisteessä $\bar{X}$ on

$$\nabla f(\bar{X}) = (f_1(\bar{X}), f_2(\bar{X}), \ldots, f_n(\bar{X})),$$

missä f_i on funktion f osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen.

Hessin matriisi muodostetaan seuraavasti:

$$H = f_{xx} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad \text{missä} \quad f_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Olkoon $\bar{g}(\bar{X}) = \begin{pmatrix} g_1(\bar{X}) \\ g_2(\bar{X}) \\ \vdots \\ g_m(\bar{X}) \end{pmatrix}$, missä $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ (vektoriarvoinen n:n muuttujan funktio).

Jacobin matriisi

$$J = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Esimerkki 1.28. Olkoon $f(\bar{X}) = f(x,y,z) = 3xy + yz + 5z$, määrää $\nabla f(\bar{X})$ ja H.

Esimerkki 1.29. $\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(x,y,z) = (2x + y^2, 2x^2 + z^2 + y, 8z^3)$. Määrää $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{X}}$.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} .$$

Matriisi A on *positiivideﬁniitti*, jos sen alideterminantit

$$\left|A_1\right| = a_{11}, \quad \left|A_2\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \left|A_3\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots$$

$$\left|A_n\right| = \left|A\right| \quad \text{ovat kaikki positiivia.}$$

Vastaavasti matriisi A on *negatiivideﬁniitti*, jos

$$\left|A_1\right| < 0 \ , \quad \left|A_2\right| > 0 \ , \quad \left|A_3\right| < 0 \ , \quad \ldots$$
$$\text{eli} \quad (-1)^i |A_i| > 0 \ .$$

1.10.1 Normaalit ääriarvot (ei sidotut)

Minimoi/maksimoi $f(x_1, \ldots, x_n)$, missä f on derivoituva funktio, $n \geq 2$.

1^o Ääriarvon mahdollinen olemassaolo: (KRP)

Lause 1.7. *Jos funktio $f(\bar{X}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ on derivoituva pisteessä $\bar{X}_0$, niin piste $\bar{X}_0$ on funktion $f(\bar{X})$ mahdollinen paikallinen ääriarvokohta jos ja vain jos $\bar{X}_0$ on* kriittinen piste *eli*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{X}_0) = 0 \quad \forall \ i \quad (\textit{osittaisderivaatat} = 0)$$

eli

$$\begin{cases} f_{x_1} = 0 \\ f_{x_2} = 0 \\ \quad \vdots \\ f_{x_n} = 0 \end{cases}$$

eli gradientti $\nabla f(\bar{X}_0) = \bar{0}$.

2^o Ääriarvon olemassaolo ja laatu:

Lause 1.8. *Olkoon löydetty kriittinen piste $\bar{X}_0$ ja $H(\bar{X}_0)$ funktion $f(\bar{X})$ Hessin matriisi kriittisessä pisteessä $\bar{X}_0$. Tällöin*

1) Kriittinen piste $\bar{X}_0$ on funktion $f(\bar{X})$ paikallinen *maksimikohta*, jos funktion Hessin matriisin alideterminantit

$$(-1)^i|H_i(\bar{X}_0)| > 0, \quad \text{kaikilla } i = 1, \ldots, n \;\; \text{(H negatiividefiniitti)}.$$

2) Kriittinen piste $\bar{X}_0$ on funktion $f(\bar{X})$ paikallinen *minimikohta*, jos funktion Hessin matriisin alideterminantit

$$|H_i(\bar{X}_0)| > 0, \quad \text{kaikilla } i = 1, \ldots, n \;\; \text{(H positiividefiniitti)}.$$

3) Kriittinen piste $\bar{X}_0$ ei ole paikallinen ääriarvokohta, jos

$$|H_i(\bar{X}_0)| \neq 0, \quad \text{kaikilla } i = 1, \ldots, n$$

   mutta 1) tai 2) ei toteudu

4) Jos $|H_i(\bar{X}_0)| = 0$, jollakin $i = 1, \ldots, n \;\Rightarrow$ Testi ei kerro mitään, joten tutki tarkemmin.

Esimerkki 1.30. Etsi paikalliset ääriarvot funktiolle $f(x, y) = x^2y + y^3 - y$.

1.10.2 Sidotut ääriarvot

Kahden muuttujan ja yhden yhtälörajoitteen tapaus

Ääriarvot funktiolle $f(x, y)$ ehdolla $g(x, y) = 0$.

Muodostetaan *Lagrange*–funktio

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

1^o Ääriarvon mahdollinen olemassaolo: (KRP)

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ L_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ L_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \text{eli} \qquad \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases}$$

2^o Ääriarvon olemassaolo ja laatu:

Lasketaan laajennetun Hessin matriisin $\bar{H}$ determinantti

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

ja sen arvo kriittisessä pisteessä.

KRP on sidottu paikallinen maksimikohta, jos $|\bar{H}| > 0$. KRP on sidottu paikallinen minimikohta, jos $|\bar{H}| < 0$. Jos $|\bar{H}| = 0$, tutki tarkemmin.

Esimerkki 1.31. Etsi ääriarvot funktiolle $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ehdolla $x + 2y = 24$.

n:n muuttujan ja m:n yhtälörajoitteen tapaus, missä $m < n$

Maksimoi (vast. minimoi) funktio $f(x_1, \ldots, x_n)$ ehdoilla $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, missä $i = 1, \ldots, m$.

Lagrange–funktio:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, \ldots, x_n),$$

missä λ_j:t ovat Lagrange-kertoimia.

1^o Ääriarvon mahdollinen olemassaolo: (KRP)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} L_{x_i} = 0 & \text{, kaikilla } i = 1, \ldots, n \\ g_j = 0 & \text{, kaikilla } j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Näin saadaan mahdollinen paikallinen ääriarvokohta $\bar{X}_0$.

2^o Ääriarvon olemassaolo ja laatu:

Määritellään *laajennettu Hessin matriisi* $\bar{H}$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \bar{0}_{m\times m} & J_{m\times n} \\ J^T_{n\times m} & H_{n\times n} \end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}$$

eli

$$
\bar{H} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\
& & & & & \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & L_{x_1x_1} & \cdots & L_{x_1x_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & L_{x_nx_1} & \cdots & L_{x_nx_n}
\end{array}\right)_{(m+n)\times(m+n)}.
$$

Laajennetun Hessin matriisin tarvittavat alideterminantit $|\bar{H}_i|$ ovat

$$
|\bar{H}_i(\bar{X}_0)| = \left|\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \\
& & & & & \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & L_{x_1x_1} & \cdots & L_{x_1x_i} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} & L_{x_ix_1} & \cdots & L_{x_ix_i}
\end{array}\right|,
$$

missä $i = m+1, \ldots, n$.

Eli $|\bar{H}_i|$ on "vasemmasta yläkulmasta" i:nteen muuttujaan asti otettu alideterminantti. Siis nollamatriisin lisäksi otetaan mukaan i kappaletta pysty- ja vaakarivejä.

Nyt ääriarvon laatu mahdollisessa paikallisessa ääriarvokohdassa $\bar{X}_0$ määräytyy seuraavasti:

1) Jos $(-1)^i|\bar{H}_i| > 0$, kaikilla $i = m+1, \ldots, n$, niin KRP on paikallinen sidottu maksimikohta.
2) Jos $(-1)^m|\bar{H}_i| > 0$, kaikilla $i = m+1, \ldots, n$, niin KRP on paikallinen sidottu minimikohta.
3) Jos kumpikaan ei toteudu, testi ei kerro mitään, joten tutki tarkemmin.

Esimerkki 1.32. Määritä funktion $f(x, y, z) = -x^2 - 7y - 10z - 3$ paikalliset ääriarvot ehdoilla $x + y + z = 0$ ja $x + 2y + 3z = 0$.

Lagrangen kertoimen tulkinta

Tehtävä alunperin muotoa:

> Maximoi/minimoi funktio $f(\bar{X})$ ehdoilla $g_j(\bar{X}) = b_j$, missä $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $j = 1, \ldots, m$.

Voidaan osoittaa, että optimikohdassa $\bar{X}$

$$\lambda_j = \frac{\partial f(\bar{X})}{\partial b_j}.$$

Eli kerroin λ_j osoittaa kuinka paljon optimiarvo muuttuu, jos alkuperäisen tehtävän rajoitetta g_j muutetaan.

Eli jos rajoitteessa oleva vakio b_j muuttuu yhden yksikön, niin optimiarvo muuttuu λ_j yksikköä.

Usein b_j kuvaa jonkin resurssin määrää (työt, luonnonvarat), jolloin λ_j ilmoittaa resurssin varjohinnan. Eli paljonko kannattaa maksaa, jos saa yhden yksikön lisää resurssia?

Esimerkki 1.33. Anna arvio funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ääriarvoille ehdolla $x + 2y = 25$.

Esimerkki 1.34. Anna arvio funktion $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ääriarvoille ehdolla $x + 2y = 23$.

Huomautus. Ehtojen kertoimien on oltava positiivisia ja $L = f - \sum \lambda_j g_j$.

n:n muuttujan ja yhden epäyhtälörajoitteen tapaus

Ääriarvot funktiolle $f(x_1, \ldots, x_n)$ ehdolla $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$.

Menetelmä on seuraava:

1) Ääriarvotetaan funktio $f(x_1, \ldots, x_n)$ *ilman epäyhtälöehtoa* $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$.
   Mahdollinen paikallinen ääriarvokohta $\bar{X}_0$ löytyy siis funktion $f(\bar{X})$ osittaisderivaattojen nollakohtana.
   Suoritetaan normaali laatutarkastelu kriittiselle pisteelle $\bar{X}_0$ *Hessin* matriisin avulla.
   Jos kriittinen piste toteuttaa ehdon $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$, niin se on myös epäyhtälöehdon mukainen sidottu paikallinen ääriarvokohta.
   (Ääriarvokohta löytyy siis ehtoalueen sisältä, $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$.)

2) Tarkastellaan epäyhtälörajoitteen $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$ sijaan *yhtälörajoitetta* $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
Ratkaistaan kuten normaali sidottu ääriarvotehtävä, missä Lagrange-funktio on nyt muotoa

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n).$$

Olkoon ratkaisuna saatu kriittinen piste $\bar{X}_0$.
Suoritetaan Lagrangen mukainen laatutarkastelu kriittiselle pisteelle $\bar{X}_0$ *laajennetun Hessin* matriisin avulla.
(Ääriarvokohta löytyy siis ehtoalueen reunalta, $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$.)

3) Kohtiin 1) ja 2) perustuva päättely.

Esimerkki 1.35. Maksimoi/minimoi $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ehdolla $x + 2y \leq 24$.

Esimerkki 1.36. Maksimoi/minimoi $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ ehdolla $x + 2y \geq 24$.

n:n muuttujan ja yhden epäyhtälörajoitteen tapaus

(Lambda–päättely)

Ääriarvot funktiolle $f(x_1, \ldots, x_n)$ ehdolla $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$.

Menetelmä on seuraava:

1) Oletetaan epäyhtälörajoitteen sijaan yhtälörajoite $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
Ratkaistaan kuten normaali sidottu ääriarvotehtävä, missä Lagrange-funktio on nyt muotoa

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n).$$

Olkoon ratkaisuna saatu kriittinen piste $\bar{X}_0$ ja $\lambda = \lambda_0$. (Tarkista, että löydetty KRP toteuttaa alkuperäisen ehdon.)

2) Jos saatu $\lambda_0 > 0$, niin $\bar{X}_0$ on funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ mahdollinen sidottu ääriarvokohta ehdolla $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$. Laatu määräytyy *laajennetun Hessin* matriisin avulla.
Jos saatu $\lambda_0 \leq 0$, niin funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ sidottu ääriarvokohta ehdolla $g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$ saadaan funktion normaalista ääriarvokohdasta eli funktion osittaisderivaattojen nollakohdasta. Samoin ääriarvon laatu *Hessin* matriisin avulla.

Esimerkki 1.37. Maksimoi/minimoi $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ ehdolla $xyz \geq 125$.

***n:n* muuttujan ja yhden epäyhtälörajoitteen tapaus**

(Kuhn-Tuckerin–menetelmä)

Olkoon $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n:n muuttujan funktio epäyhtälörajoitteella $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$. Piste $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ on funktion f paikallinen maksimikohta vain, jos on olemassa ei-negatiivinen luku λ siten, että λ ja piste $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ toteuttavat Kuhn-Tuckerin ehdot:

$$\begin{aligned} & h_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n \\ & \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ & g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \end{aligned}$$

Nämä ehdot ovat riittävät, jos funktio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on ylöspäin kupera ja $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on alaspäin kupera. Koska funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maksimikohta on funktion $-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ minimikohta, niin tulos on käytettävissä myös silloin, kun alaspäin kupera funktio minimoidaan alaspäin kuperan ehtojoukon yli.

Huomautus. Funktio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on alaspäin kupera alueessa, jos mitkä tahansa kaksi pistettä $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ ja $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ toteuttavat epäyhtälöehdon

$$\begin{aligned} f[(1-t)\tilde{x}_1 + t\bar{x}_1, \ldots, &(1-t)\tilde{x}_n + t\bar{x}_n] \\ &\leq (1-t) f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) + t f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Funktio on aidosti alaspäin kupera, jos $\leq$ voidaan korvata merkillä $<$; funktio on ylöspäin kupera, jos $\leq$ voidaan korvata merkillä $\geq$, ja aidosti ylöspäin kupera, jos $\leq$ voidaan korvata merkillä $>$.

1.11 Panos-tuotos–malli

Tunnetaan eräs *panos-tuotos–taulu:*

	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$\ldots$	x_{in}	y_i
x_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\ldots$	x_{1n}	y_1
x_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\ldots$	x_{2n}	y_2
x_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\ldots$	x_{3n}	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	$\ldots$	x_{nn}	y_n

Vaakarivillä toimialan i kokonaistuotannon x_i käyttö välituotteina x_{ij} toimialoilla j ja lopputuotteena y_i.

Muodostetaan malli, joka kertoo yleisesti lopputuotteiden kysynnän perusteella toimialojen kokonaistuotannon.

Mallin muodostaminen tapahtuu vaakarivien perusteella:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \ , \quad \text{missä } n \text{ on toimialojen lukumäärä.} \tag{12}$$

Mallin kiinteät kertoimet lasketaan eräästä tunnetusta panos-tuotos–taulusta seuraavasti:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \ \Leftrightarrow \ x_{ij} = a_{ij}x_j \ , \quad \text{missä } 0 \leq a_{ij} \leq 1. \tag{13}$$

Panoskerroin a_{ij} ilmaisee kuinka paljon toimialalla j tarvitaan toimialan i tuotantoa yhden tuoteyksikön tuottamiseen.

Sijoittamalla yhtälö (13) yhtälöön (12) saadaan:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \ , \quad \text{missä } i = 1, \ldots, n.$$

Eli

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \ , \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \ , \\ \quad \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \ . \end{cases}$$

Yleinen muoto:

$$\bar{X} = A\bar{X} + \bar{Y} \ , \quad \text{missä} \ \begin{array}{l} \bar{X} = \text{kokonaistuotanto} \\ \bar{Y} = \text{loppukysyntä} \\ A = \text{nk. teknillinen matriisi} \end{array} .$$

Eli

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1} .$$

Tästä saadaan ratkaistua toimialojen tuotannot x_i, kun tunnetaan kertoimet a_{ij} ja lopputuotteiden kysynnät y_i, eli tiedetään halutut lopputuotemäärät ja suhde kuinka paljon toimiala tarvitsee toisten toimialojen tuotantoa välituotteina. Siis

$$\begin{aligned}
& \bar{X} = A\bar{X} + \bar{Y} \\
\Leftrightarrow\ & \bar{X} - A\bar{X} = \bar{Y} \\
\Leftrightarrow\ & I\bar{X} - A\bar{X} = \bar{Y} \\
\Leftrightarrow\ & (I - A)\bar{X} = \bar{Y} \quad \mid (I-A)^{-1}\cdot \\
\Leftrightarrow\ & \bar{X} = (I-A)^{-1}\bar{Y}
\end{aligned}$$

Näin johdettu yhtälö $\bar{X} = (I - A)^{-1}\bar{Y}$ on panos-tuotos–malli, joka ilmaisee toimialojen kokonaistuotannon riippuvuuden lopputuotteiden kysynnästä. Käänteismatriisi $(I - A)^{-1}$ on *Leontief:n käänteismatriisi*. Merkitään sen alkioita b_{ij}:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Siis $x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n$.

Leontief:n käänteismatriisi ilmaisee toimialojen kokonaistuotannon ja lopputuotteiden kysynnän välisen riippuvuuden. Eli alkio b_{ij} ilmaisee, kuinka paljon tuotantoa tarvitaan toimialalla i, jotta toimialalla j voitaisiin tuottaa yksi lopputuoteyksikkö.

Esimerkki 1.38. Kahden teollisuudenalan tuotantoa kuvaa seuraava taulukko. Muodosta sen avulla panos-tuotos–malli. (luvut milj. euroa)

		kokonais-tuotanto	välikäyttö A	välikäyttö B	loppu-kysyntä
tuottaja	A	600	150	240	210
	B	480	200	120	160

1.12 Derivointi vektorimuodossa

Ääriarvotehtävissä joudutaan joskus derivoimaan lausekkeita, jotka sisältävät matriiseja ja vektoreita.

1.12.1 Lineaarisen vektorin derivointi

Funktio $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ on *lineaarinen*, jos se on muotoa

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$ vakioita.

Asettamalla

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

funktio f saadaan muotoon

$$f(\bar{X}) = \bar{a}^T\bar{X} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{X}^T\bar{a} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Osittaisderivoimalla funktiota f saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_1} = a_1\ , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_2} = a_2\ , \ \ldots\ , \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_n} = a_n\ .$$

Osittaisderivaatoista voidaan muokata vektori

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{X}} = \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \bar{a}\ .$$

Samoin

$$\frac{\partial \bar{X}^T\bar{a}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}^T\bar{a}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{X}^T\bar{a}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \bar{a}\ .$$

Esimerkki 1.39. Jos

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

niin $f(\bar{X}) = \bar{a}^T\bar{X} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4$ ja

$$\frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_1} = 2\,,\ \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_2} = -1\,,\ \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_3} = 3\,,\ \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial x_4} = 5\,,\ \text{eli} \quad \frac{\partial \bar{a}^T\bar{X}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \bar{a}\,.$$

1.12.2 Vektoriarvoisen funktion derivointi

Funktio $\bar{F} : \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}^n$ on *m:n muuttujan vektoriarvoinen funktio.* Funktion arvot ovat n-komponenttisia pystyvektoreita, joiden jokainen komponentti on m:n muuttujan reaaliarvoinen funktio.

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Kukin f_i voidaan derivoida jokaisen muuttujan x_j suhteen

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{m \times n} = J^T.$$

Esimerkki 1.40. Olkoon

$$\bar{F}(\bar{X}) = \bar{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 \\ 4x_1x_3^2 - x_2^2 + 5x_2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_3^2 \\ 2x_2 - 2x_3 & -2x_2 + 5x_3^2 \\ -2x_2 & 8x_1x_3 + 10x_2x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

1.12.3 Kvadraattisenmuodon derivointi

Olkoon A *symmetrinen* $n \times n$–matriisi ja $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Lauseke

$$\bar{X}^T A \bar{X} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(\bar{X})$$

on *kvadraattinen muoto.*

Ottamalla osittaisderivaatat muuttujien $x_1, x_2 \ldots, x_n$ suhteen, saadaan

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}}(\bar{X}^T A \bar{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{X}^T A \bar{X}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(\bar{X}^T A \bar{X}) \end{pmatrix} = 2A\bar{X}$$

Tai

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}}(\bar{X}^T A \bar{X}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{X}^T A \bar{X}) \ , \ \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{X}^T A \bar{X}) \ , \ \ldots \ , \frac{\partial}{\partial x_n}(\bar{X}^T A \bar{X}) \right) = 2\bar{X}^T A \ .$$

Esimerkki 1.41. Olkoon

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{X}^T A \bar{X} &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (3x_1 + x_2 - 2x_3, x_1 + 3x_3, -2x_1 + 3x_2 + 2x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1^2 + x_2x_1 - 2x_3x_1 + x_1x_2 + 3x_3x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2x_3^2 = f(\bar{X}) \ . \end{aligned}$$

Siten

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bar{X}^T A \bar{X} = 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\bar{X}^T A \bar{X} = 2x_1 + 6x_3$$

$$\text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\bar{X}^T A\bar{X} = -4x_1 + 6x_2 + 4x_3.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{X}}\bar{X}^T A\bar{X} &= \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_1 + 6x_3 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 3x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2A\bar{X}\ .
\end{aligned}$$

1.12.4 Bilineaarinen derivointi

Olkoon

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

ja B $m \times n$–matriisi.

Lauseke

$$\bar{X}^T B\bar{Z} = (x_1, \ldots, x_m)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = f(\bar{X}, \bar{Z})$$

on *bilineaarimuoto*.

Tällöin

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}}(\bar{X}^T B\bar{Z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{X}^T B\bar{Z}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m}(\bar{X}^T B\bar{Z}) \end{pmatrix} = B\bar{Z}$$

$$\text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}(\bar{X}^T B\bar{Z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1}(\bar{X}^T B\bar{Z}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n}(\bar{X}^T B\bar{Z}) \end{pmatrix} = B^T\bar{X}\ .$$

Esimerkki 1.42. Olkoon

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \bar{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} .$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{X}^T B \bar{Z} &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= (2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1 z_1 + 3x_2 z_1 + 2x_3 z_1 + 2x_1 z_2 + 3x_2 z_2 + 4x_3 z_2 = f(\bar{X}, \bar{Z}) . \end{aligned}$$

Nyt

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = 2z_1 + 2z_2 \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = 3z_1 + 3z_2$$

$$\text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial x_3}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = 2z_1 + 4z_2.$$

Eli

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = \begin{pmatrix} 2z_1 + 2z_2 \\ 3z_1 + 3z_2 \\ 2z_1 + 4z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = B\bar{Z} .$$

Edelleen

$$\frac{\partial}{\partial z_1}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial z_2}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 .$$

Siis

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}}(\bar{X}^T B \bar{Z}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^T \bar{X}.$$

1.13 Matriisien sovellutus regressioanalyysissä

Usean muuttujan *Pienimmän neliösumman–regressioanalyysissä* ajatellaan, että (selitettävä) muuttuja y riippuu (selittävistä) muuttujista $x_1, x_2, \dots, x_k$ ja häiriötekijästä u yhtälön

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \dots + \beta_k x_k + u$$

mukaisesti.

Vakioita $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ ei tunneta ja käytettävissä on n:n kappaleen otos muuttujan y ja muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_k$ arvoja. Siis n kpl y:n arvoja ja niitä vastaavat x_i:n arvot ovat tiedossa:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} \dots + \beta_k x_{ki} + u_i \,, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{14}$$

Tehtävänä on löytää estimaatit (arviot) vakioille $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ eli löytää (paras) lineaarinen funktio, jonka kautta y riippuu muuttujista x_i. Merkitään:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}_{n \times k+1}, \; \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmä (14) saadaan nyt matriisimuotoon

$$\bar{Y} = X\bar{\beta} + \bar{u} \,. \tag{15}$$

Vakioiden $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ estimaattien löytämiseksi käytetään ns. *pienimmän neliösumman menetelmää.*

Merkitään vektorin $\bar{\beta}$ estimaattia

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} .$$

Tällöin

$$\bar{Y} = X\hat{\beta} + \bar{e} \,,$$

missä $\bar{e} = \bar{Y} - X\hat{\beta} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^T$ on n:n ns. jäännöstermin muodostama pystyvektori.

Siis

$$e_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}) \, .$$

Pienimmän neliösumman menetelmässä summa

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \bar{e}^T \bar{e}$$

minimoidaan. (Virheen minimointi.)

Siis etsitään $\hat{\beta}$, jolla virhe minimoituu.

Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \bar{e}^T \bar{e} &= (\bar{Y} - X\hat{\beta})^T \cdot (\bar{Y} - X\hat{\beta}) \\
&= (\bar{Y}^T - (X\hat{\beta})^T) \cdot (\bar{Y} - X\hat{\beta}) \\
&= (\bar{Y}^T - \hat{\beta}^T X^T) \cdot (\bar{Y} - X\hat{\beta}) \\
&= \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T X\hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T \bar{Y} + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} \, .
\end{aligned}$$

Vektorin $\hat{\beta}$ määrittämiseksi etsitään lausekkeen $\bar{e}^T \bar{e}$ pienin arvo kuten normaalissa ääriarvotehtävässä.

Etsitään ensin KRP derivoimalla lauseke tuntemattoman $\hat{\beta}$ suhteen ja asettamalla se nollaksi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} (\bar{e}^T \bar{e}) &= -X^T (\bar{Y}^T)^T - X^T \bar{Y} + 2X^T X \hat{\beta} \\
&= -2X^T \bar{Y} + 2X^T X \hat{\beta} = \bar{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow X^T X \hat{\beta} = X^T \bar{Y} \Leftrightarrow& \\
\hat{\beta} =& (X^T X)^{-1} X^T \bar{Y} \, ,
\end{aligned}$$

mikäli $X^T X$ säännöllinen.

Jotta voidaan osoittaa, että $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \bar{Y}$ on minimiratkaisu, on tutkittava toista derivaattaa

$$\frac{\partial^2 \bar{e}^T \bar{e}}{\partial \hat{\beta}^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} (-2X^T \bar{Y} + 2X^T X \hat{\beta}) = 2X^T X \, .$$

Jos matriisi $X^T X$ on positiividefiniitti, niin kyseessä on minimiratkaisu.

Käytännön tilanteissa $X^T X$ on aina positiividefiniitti.

Esimerkki 1.43. Estimoi yhtälön $y = \beta_0 + \beta_1 x_1$ kertoimia β pienimmän neliösumman menetelmällä, kun havaintoaineisto on seuraava:

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 & \qquad x_{11} &= -1 \\ y_2 &= 3 & x_{12} &= 0 \\ y_3 &= -2 & x_{13} &= 1 \\ y_4 &= 8 & x_{14} &= -2 \end{aligned}$$

1.14 Lineaarinen optimointi

Maksimoitaessa voittoa tai minimoitaessa kustannuksia tulee usein eteen resurssien rajallisuus.

Tehtävä. Maksimoi/minimoi kohdefunktio

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_0 \quad \text{(Lineaarinen!!!)}$$

rajoitteilla

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \quad \text{(Lineaariset!!!)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad \forall \quad j = 1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

1.14.1 Geometrinen ratkaisu

Kahden päämuuttujan tapaus:

Max/min $f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0$ rajoitteilla

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ ei pakollinen.} \end{cases}$$

Muodostetaan *ratkaisumonikulmio* eli etsitään ehtoalue, jossa rajoitteet toteutuvat.

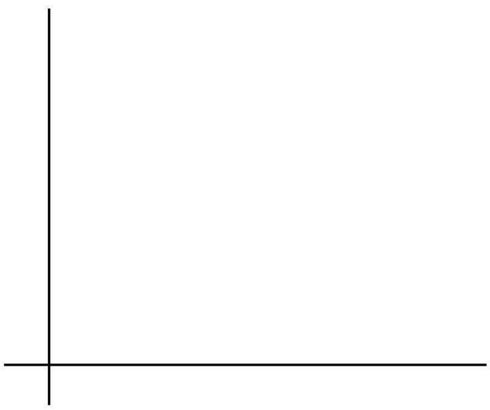
Lause 1.9. *Jos ratkaisumonikulmio on suljettu, niin optimointitehtävän yksikäsitteinen ratkaisu löytyy ratkaisumonikulmion kärjistä. Jos ratkaisuja on useita, niin ainakin kaksi niistä löytyy ratkaisumonikulmion kärkipisteistä. Jos ratkaisumonikulmio on avoin alue, tutki tarkemmin.*

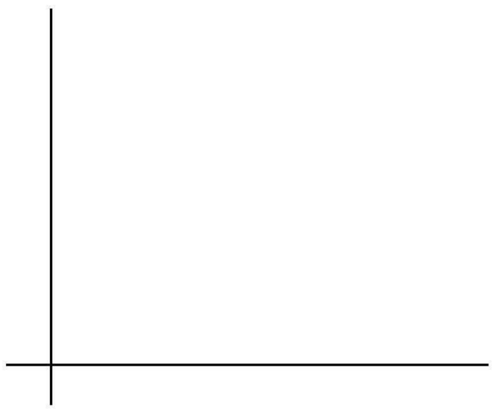
Esimerkki 1.44. Max/min $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2$ rajoitteilla

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ x_1, x_2 \ge 0\,. \end{cases}$$

Huomautus. Ratkaisumonikulmio ei välttämättä ole suljettu rajoitteilla. Esimerkiksi:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 40 \end{cases}$$





Esimerkki 1.45. Min/max $f(x, y) = 2x + 10y$ rajoitteilla

$$\begin{cases} 2x + y \ge 6 \\ 5x + 4y \ge 20 \\ x, y \ge 0\,. \end{cases}$$

Esimerkki 1.46. Min/max $f(x, y) = -2x + 10y$ rajoitteilla

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 5x + 4y \geq 20 \\ x, y \geq 0\,. \end{cases}$$

1.14.2 Kantaratkaisu–menetelmä

Tehtävä. Maksimoi/minimoi kohdefunktio

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

rajoitteilla

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Rajoite-epäyhtälöt muutetaan lisämuuttujien $(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ avulla yhtälöiksi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n + m. \end{cases}$$

Kantaratkaisu on eo. yhtälöryhmän sellainen ratkaisu, jossa tuntemattomista $x_1, \ldots, x_{n+m}$ on n kappaletta nollia ja lisäksi positiivisuusehtoa ei huomioida.

Kantamuuttujat ovat ne m muuttujaa, joita ei aseteta nolliksi.

Hyväksyttävä kantaratkaisu on kantaratkaisu, joka toteuttaa myös positiivisuusehdon.

Optimaalinen kantaratkaisu on hyväksyttävä kantaratkaisu, joka antaa kohdefunktion optimiarvon.

Lause 1.10. *Jos kohdefunktiolla on äärellinen optimi, niin ainakin yksi optimaalinen ratkaisu löytyy hyväksyttävänä kantaratkaisuna.*

Optimointi:

1) haetaan kantaratkaisut
2) valitaan hyväksyttävät kantaratkaisut
3) lasketaan funktion arvot kohdan 2) pisteissä
4) valitaan näistä haettu optimiarvo.

Esimerkki 1.47. Min/max $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2$ rajoitteilla

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \, . \end{cases} .$$

Huomautus. Kantaratkaisu–menetelmä ei toimi avoimessa alueessa. Pienellä varovaisuudella kylläkin.

1.14.3 SIMPLEX–menetelmä

Tehtävä. Maksimoi/minimoi kohdefunktio

$$z = f(\bar{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

rajoitteilla

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Rajoite-epäyhtälöt muutetaan lisämuuttujien avulla yhtälöiksi:

Esimerkiksi rajat

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} + x_{n+3} = b_2 \, . \end{cases}$$

Lisämuuttujat:

x_{n+1} ei kohdefunktioon, kylläkin arvotaulukkoon.
x_{n+3} kohdefuntioon ja arvotaulukkoon.

$$\begin{cases} \text{minimointi} & \Rightarrow Mx_{n+3} \\ \text{maksimointi} & \Rightarrow -Mx_{n+3}\,, \end{cases} \quad M \text{ suuri positiivinen luku.}$$

x_{n+2} ei kohdefunktioon eikä arvotaulukkoon lisämuuttujana.

Esimerkki 1.48. Minimoi $z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2$ rajoitteilla

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Rajoite-epäyhtälöt muutetaan lisämuuttujien avulla yhtälöiksi:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\,. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ minimoi $z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2 + Mx_5$ edellä olleilla rajoitteilla.

Muodostetaan *arvotaulukko* seuraavasti:

			c_j	2	10	0	0	M
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6		2	1	1	0	0
M	x_5	20		5	4	0	-1	1
	z_j	$20M$		$5M$	$4M$	0	$-M$	M
	$c_j - z_j$			$2 - 5M$	$10 - 4M$	0	M	0

(Kun $x_3 = 6$ ja $x_5 = 20$, niin $x_1 = x_2 = 0 \;\Rightarrow\; z = 20M$)

z_j:n arvot saadaan laskemalla lisämuuttujien arvoiksi sarakkeen luvut ja kertoimiksi c_3 ja c_5.

$c_j - z_j$ edustaa lisäystä funktion arvoon, joka saavutetaan muuttujan j yhden yksikön lisäyksellä (ko. arvoista).

Optimaalisuuden tarkistus:

Maksimointitehtävä:

Jos rivin $c_j - z_j$ kaikki arvot ovat negatiivisia (≤ 0), niin tulosta ei voida parantaa ja on löydetty maksimikohta.

Minimointitehtävä:

Jos rivin $c_j - z_j$ kaikki arvot ovat positiivisia (≥ 0), niin tulosta ei voida parantaa ja on siten löydetty minimikohta.

Nyt $2 - 5M < 0$ ja $10 - 4M < 0$ $\Rightarrow$ ei minimikohta.

Korvaavan ja *väistyvän* muuttujan valinta:

Suurin *parannus* eli tässä tapauksessa *pienennys* funktion arvoon saadaan muuttujan x_1 lisäyksestä

$$(2 - 5M < 10 - 4M,\ M \text{ suuri positiivinen luku})$$

$$\Rightarrow\ x_1 \textit{ korvaava muuttuja} \text{ ja } x_1\text{:n sarake } \textit{optimisarake}.$$

Jaetaan lisämuuttujien arvot vastaavilla optimisarakkeen arvoilla:

$$x_3 : \frac{6}{2} = 3 \qquad\qquad x_5 : \frac{20}{5} = 4$$

Se, jolla on pienempi positiivinen arvo, valitaan *väistyväksi muuttujaksi.*

$$\Rightarrow\ x_3 \text{ väistyvä muuttuja}$$

Muodostetaan *uusi arvotaulu*:

Korvaavan muuttujan x_1 rivi saadaan väistyvän muuttujan x_3 rivin alkioista jakamalla ne optimisarakkeen x_1 muuttujan x_3 arvolla.

			c_j	2	10	0	0	M
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
M	x_5	20		5	4	0	-1	1

Muut rivit:

$$\begin{pmatrix}\text{uuden}\\ \text{rivin}\\ \text{alkio}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{vanhan}\\ \text{rivin}\\ \text{alkio}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{vanhan rivin}\\ \text{alkio optimi-}\\ \text{sarakkeessa}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{vastaava}\\ \text{alkio korvaa-}\\ \text{valla rivillä}\end{pmatrix}$$

			c_j	2	10	0	0	M
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
M	x_5	5		0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-1	1
	z_j	$6+5M$		2	$1+\frac{3}{2}M$	$1-\frac{5}{2}M$	$-M$	M
	$c_j - z_j$			0	$9-\frac{3}{2}M$	$-1+\frac{5}{2}M$	M	0

Ei minimiratkaisu, sillä $9 - \frac{3}{2}M < 0$.

Nyt x_2 on *korvaava muuttuja* ja x_2:n sarake on *optimisarake*.

Lisäksi

$$x_1 : \ \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \quad \text{ja} \quad x_5 : \ \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \ x_5 \ \textit{väistyvä muuttuja}$$

Muodostetaan uusi arvotaulu:

			c_j	2	10	0	0	M
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
10	x_2	$\frac{10}{3}$		0	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

			c_j	2	10	0	0	M
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$\frac{4}{3}$		1	0	$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
10	x_2	$\frac{10}{3}$		0	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	z_j	$\frac{108}{3} = 36$		2	10	$\frac{-42}{3} = -14$	$\frac{-18}{3} = -6$	$\frac{18}{3} = 6$
	$c_j - z_j$			0	0	14	6	$M-6$

Tämä on minimiratkaisu, sillä $14 > 0$, $6 > 0$ ja $M - 6 > 0$.

Siis minimiratkaisu on $x_1 = \frac{4}{3}$ ja $x_1 = \frac{10}{3}$, jolloin minimiarvo on 36.

Esimerkki 1.49. Maksimoi $z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2$ rajoitteilla

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Muutetaan epäyhtälörajoitteet yhtälöiksi:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\,. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ maksimoi $z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2 - Mx_5$ edellä olleilla rajoitteilla.

Muodostetaan *arvotaulukko* seuraavasti:

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6		2	1	1	0	0
$-M$	x_5	20		5	4	0	-1	1
	z_j	$-20M$		$-5M$	$-4M$	0	M	$-M$
	$c_j - z_j$			$2 + 5M$	$10 + 4M$	0	$-M$	0

(Kun $x_3 = 6$ ja $x_5 = 20$, niin $x_1 = x_2 = 0 \;\Rightarrow\; z = -20M$)

Optimaalisuuden tarkistus:

Nyt $2 + 5M > 0$ ja $10 + 4M > 0$ $\Rightarrow$ ei maksimikohta.

Korvaavan ja *väistyvän* muuttujan valinta:

Suurin *parannus* funktion arvoon saadaan muuttujan x_1 lisäyksestä

$$(2 + 5M > 10 + 4M, \quad M \text{ suuri positiivinen luku})$$

$\Rightarrow$ x_1 *korvaava muuttuja* ja x_1:n sarake *optimisarake*.

Jaetaan lisämuuttujien arvot vastaavilla optimisarakkeen arvoilla:

$$x_3 : \frac{6}{2} = 3 \qquad\qquad x_5 : \frac{20}{5} = 4$$

Se, jolla on pienempi positiivinen arvo, valitaan *väistyväksi muuttujaksi.*

$$\Rightarrow \ x_3 \text{ väistyvä muuttuja}$$

Muodostetaan *uusi arvotaulu*:

Korvaavan muuttujan x_1 rivi saadaan väistyvän muuttujan x_3 rivin alkioista jakamalla ne optimisarakkeen x_1 muuttujan x_3 arvolla.

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$-M$	x_5	20		5	4	0	-1	1

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$-M$	x_5	5		0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-1	1
	z_j	$6-5M$		2	$1-\frac{3}{2}M$	$1+\frac{5}{2}M$	M	$-M$
	$c_j - z_j$			0	$9+\frac{3}{2}M$	$-1-\frac{5}{2}M$	$-M$	0

Ei maksimiratkaisu, sillä $9 + \frac{3}{2}M > 0$.

Nyt x_2 on *korvaava muuttuja* ja x_2:n sarake *optimisarake*.

Lisäksi

$$x_1 : \ \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \quad \text{ja} \quad x_5 : \ \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \ x_5 \textit{ väistyvä muuttuja}$$

Muodostetaan uusi arvotaulu:

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
10	x_2	$\frac{10}{3}$		0	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	$\frac{4}{3}$		1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
10	x_2	$\frac{10}{3}$		0	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	z_j		36	2	10	-14	-6	6
	$c_j - z_j$			0	0	14	6	$-M-6$

Tämä ei ole maksimiratkaisu, sillä $14 > 0$ ja $6 > 0$. Koska $14 > 6$, niin x_3 on korvaaja muuttuja ja x_3:n sarake on optimisarake. Lisäksi

$$x_1 : \ \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 : \ \frac{\frac{10}{3}}{\frac{-5}{3}} = -2$$

$$\Rightarrow \ x_1 \text{ väistyvä muuttuja}$$

Muodostetaan uusi arvotaulu:

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	1		$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
10	x_2	$\frac{10}{3}$		0	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	1		$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
10	x_2	5		$\frac{5}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	z_j	50		$\frac{50}{4}$	10	0	$-\frac{10}{4}$	$\frac{10}{4}$
	$c_j - z_j$			$-\frac{42}{4}$	0	0	$\frac{10}{4}$	$-M-\frac{10}{4}$

Ei maksimiratkaisu, sillä $\frac{10}{4} > 0$. Nyt x_4 on korvaava muuttuja ja x_4:n sarake optimisarake. Lisäksi

$$x_3 : \ \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \quad \text{ja} \quad x_2 : \ \frac{5}{-\frac{1}{4}} = -20$$

$$\Rightarrow \ x_3 \text{ väistyvä muuttuja}$$

Muodostetaan uusi arvotaulu:

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	4		3	0	4	1	-1
10	x_2	5		$\frac{5}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

			c_j	2	10	0	0	$-M$
c_j	lisämuuttujat	arvot		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	4		3	0	4	1	-1
10	x_2	6		2	1	1	0	0
	z_j	60		20	10	10	0	0
	$c_j - z_j$			-18	0	-10	0	$-M$

Selvästi kyseessä on maksimiratkaisu. Nyt

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ x_4 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 5x_1 + 4 \cdot 6 - 4 + x_5 = 20 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_5 = 0$$

Optimikohta on siis $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

$$z = 2 \cdot 0 + 10 \cdot 6 - M \cdot 0 = 60.$$

2 Integraalilaskenta

2.1 Johdanto

Integrointi on derivoimisen käänteistoimitus. Siis

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad D\,F(x) = f(x).$$

On siis määritettävä funktio $F(x)$, kun sen derivaattafunktio $f(x)$ tiedetään.

Taloustieteessä voidaan käyttää seuraavissa tapauksissa:

rajahyötyfunktio	$\Rightarrow$	hyötyfunktio
rajakustannusfunktio	$\Rightarrow$	kustannusfunktio
rajatulofunktio	$\Rightarrow$	tulofunktio

Määrätty integraali: integrointi yli jonkin välin

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Menetelmä, jolla voidaan laskea käyrän rajoittaman pinnan ala.

Kokonaistulo on rajatulofunktion rajoittaman pinnan ala. Kuluttajan ylijäämä on kysyntäkäyrän alapuolella jäävä pinta-ala. Vastaavasti tuottajan ylijäämä on tarjontakäyrän alapuolella jäävä pinta-ala.

2.2 Integraalifunktio

Pyritään määräämään funktio $F(x)$, kun sen derivaattafunktio $f(x)$ on annettu.

Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in D_f.$$

Merkitään

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

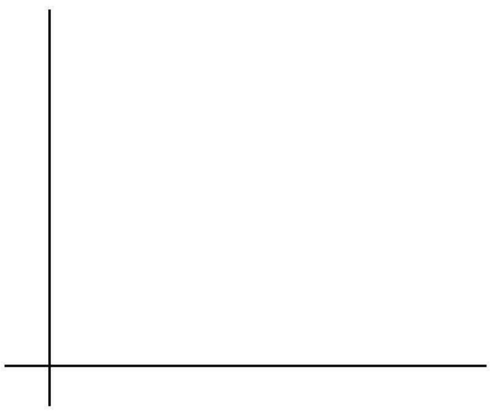
Koska funktio $F(x)$ on *derivoituva* on se myös *jatkuva*. Olkoon $F(x)$ funktion $f(x)$ *eräs* integraalifunktio. Siis $F'(x) = f(x)$. Toisaalta kun c on vakio, niin

$$D(F(x) + c) = DF(x) + Dc = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Siis *jokainen* funktio $F(x) + c$, missä c on vakio, on myös funktion $f(x)$ integraalifunktio.

Lause 2.1. (Integraalilaskennan peruslause). *Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva ja derivoituva välillä $]a, b[$. Jos lisäksi $f'(x) = 0 \ \forall \ x \in]a, b[$, niin $f(x)$ on vakiofunktio tällä välillä.*

Todistus. Vertaa $f(x)$:n kasvunopeus. $\square$



Olkoon $D_f =]a, b[$ ja olkoot $F(x)$ ja $G(x)$ *molemmat* funktion $f(x)$ integraalifunktioita, eli $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = f(x)$.

Tällöin

$$D(G(x) - F(x)) = DG(x) - DF(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Integraalilaskennan peruslauseen nojalla $G(x) - F(x)$ on vakiofunktio, eli on olemassa $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$G(x) - F(x) = c \quad \forall x \ \in]a, b[\quad \Leftrightarrow \quad G(x) = F(x) + c.$$

Lause 2.2. *Olkoon $f(x)$ funktio, jolle $D_f =]a,b[$ ja $F(x)$ on eräs funktion $f(x)$ integraalifunktio. Tällöin $\{F(x)+c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ on funktion $f(x)$ kaikkien integraalifunktioiden joukko.*

Kun annetaan yksi piste (x_0, y_0), jonka kautta integraalifunktio kulkee, niin integraalifunktio saadaan täysin määrättyä:

$$F(x_0) + c = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad c = y_0 - F(x_0).$$

Lause 2.3. *Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ funktioita, joilla $D_f = D_g =]a,b[$. Oletetaan, että $F(x)$ on eräs funktion f(x) ja $G(x)$ eräs funktion $g(x)$ integraalifunktio. Tällöin*

(i) $F(x) + G(x)$ on funktion $f(x) + g(x)$ integraalifunktio
(ii) $aF(x)$ on funktion $af(x)$ integraalifunktio ($a \in \mathbb{R}$ vakio)

Todistus.

(i) $D(F(x) + G(x)) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$
(ii) $D(aF(x)) = aD(F(x)) = aF'(x) = af(x)$.

□

Funktion $f(x)$ integraalifunktiota merkitään:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

missä $F(x)$ on funktion $f(x)$ eräs integraalifunkto ja c on integroimisvakio. Lause 2.3 saadaan nyt muotoon

(i) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(ii) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

Derivoimiskaavoista saadaan seuraavat *integroimiskaavat*:

(1) $\displaystyle\int a\,dx = ax + c,$ missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio.

(2) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1,\ a \in \mathbb{R}, \quad$ sillä $\displaystyle D\frac{x^{a+1}}{a+1} = \frac{(a+1)x^a}{a+1} = x^a.$

Jos $a \notin \mathbb{Z}$, niin oltava $x \geq 0$. (juuren alla posit.)

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,\ \ x \neq 0,$

$$\text{sillä}\quad D\ln|x| = \begin{cases} D\ln x = \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x > 0 \\ D\ln(-x) = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

(4) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c, \quad \text{sillä} \quad De^x = e^x.$

(5) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \text{sillä} \quad D\frac{a^x}{\ln a} = \frac{a^x\cdot\ln a}{\ln a} = a^x.$

Olkoot funktiot $g(x)$, $f(x)$ ja $f'(x)$ jatkuvia ja $G(x)$ eräs funktion $g(x)$ integraalifunktio. Tällöin

$$D\,G(f(x)) = G'(f(x))\cdot f'(x) = g(f(x))\cdot f'(x).$$

Siis

(6) $\displaystyle\int g(f(x))\cdot f'(x)\,dx = G(f(x)) + c.$

Tämän avulla saadaan seuraavat integroimiskaavat:

(7) $\displaystyle\int (f(x))^a\cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1,$

$$\text{sillä}\quad D\frac{(f(x))^{a+1}}{a+1} = \frac{(a+1)(f(x))^a}{a+1}\cdot f'(x) = f(x)^a f'(x).$$

Olkoon nyt $a \neq -1$ ja $f(x) \neq 0$. Tällöin

(8) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c,\ \ f(x) \neq 0,$ sillä

$$D\ln|f(x)| = \begin{cases} D\ln f(x) = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}, & \text{kun } f(x) > 0 \\ D\ln(-f(x)) = \dfrac{1}{-f(x)}\cdot -f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}, & \text{kun } f(x) < 0. \end{cases}$$

(9) $\displaystyle\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c, \quad \text{sillä} \quad De^{f(x)} = e^{f(x)}\cdot f'(x)$

(10) $\displaystyle\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c,$

$$\text{sillä} \quad D\frac{a^{f(x)}}{\ln a} = \frac{\ln a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)}{\ln a} = a^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Funktiota $f(x)$ sanotaan *integroituvaksi*, jos sillä on olemassa integraalifunktio. Jokainen jatkuva funktio on integroituva. Saadaan suhde

$$f \text{ derivoituva} \quad \Rightarrow \quad f \text{ jatkuva} \Rightarrow \quad f \text{ integroituva.}$$

Olkoot funktiot f ja g derivaattoineen jatkuvia. Tällöin

$$\begin{aligned} & D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \Rightarrow & \int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))\,dx = f(x) \cdot g(x) + c \\ \Leftrightarrow & \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) + c \end{aligned}$$

Tästä saadaan ns. *osittaisintegroinnin* kaava:

(11)

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx + c.$$

Valitaan:

$$\begin{aligned} f' &: \text{voidaan (osataan) integroida} \\ g &: \text{yksinkertaistuu enemmän derivoimalla} \end{aligned}$$

Esimerkki 2.1.

$$\int \left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right) dx$$

Esimerkki 2.2. Määritä funktion $f(x) = 8x^3 - 2x$

a) Kaikki integraalifunktiot
b) Se integraalifunktio $F(x)$, jolle $F(1) = 9$.

Esimerkki 2.3.

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1}{x}\,dx$$

Esimerkki 2.4.

$$\int \frac{2^{3x} + 2^{2x}}{2^x}\, dx$$

Esimerkki 2.5.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

Esimerkki 2.6.

$$\int e^{-x^2} x\, dx$$

Esimerkki 2.7.

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$$

Esimerkki 2.8.

$$\int x \ln x\, dx$$

2.3 Integrointi osamurtokehitelmän avulla

On määrättävä $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja.

Jos polynomi $P(x)$ on jaollinen polynomilla $Q(x)$, niin tehtävä palautuu polynomin integrointiin.

Jos polynomi $P(x) = Q'(x)$, niin tehtävä palautuu integroimiskaavaan (7).

Oletetaan nyt, että $P(x)$ ei ole jaollinen polynomilla $Q(x)$ eikä se ole sen derivaattafunktio. Olkoon lisäksi polynomi $P(x)$ *alempaa astetta* kuin $Q(x)$, muutoin suoritetaan ensin jakaminen (katso esim. 2.9 jälkeinen teksti).

Tällöin rationaalifunktio $\frac{P(x)}{Q(x)}$ voidaan esittää *osamurtolausekkeiden summana*, jotka kyetään integroimaan.

Menetelmä on seuraava:

1) Jaetaan nimittäjä $Q(x)$ jaottomiin tekijöihin ratkaisemalla sen nollakohdat. Tekijät ovat muotoa $ax + b$ (vastaa polynomin $Q(x)$ reaalista nollakohtaa) tai $ax^2 + bx + c$ (tapaus, jossa nollakohta ei ole reaaliluku eli 2. asteen tekijä ei jakaannu).

2) Kutakin polynomin $Q(x)$ tekijää vastaa osamurtolauseke seuraavasti:

a) yksinkertainen lineaarinen tekijä $ax+b$

$$\rightarrow \quad \frac{A}{ax+b}$$

b) n–kertainen lineaarinen tekijä $(ax+b)^n$

$$\rightarrow \quad \frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

c) yksinkertainen toisen asteen jaoton tekijä ax^2+bx+c

$$\rightarrow \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

d) n–kertainen toisen asteen jaoton tekijä $(ax^2+bx+c)^n$

$$\rightarrow \quad \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

missä $A, B, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ ovat vakioita, jotka pitää määrätä.

3) Vakiot määrätään seuraavasti:
Lauseke $\frac{P(x)}{Q(x)}$ esitetään osamurtolausekkeiden summana. Kerrotaan puolittain nimittäjällä $Q(x)$, jolloin vasemmalle puolelle jää $P(x)$ ja oikealle puolelle osamurtolausekkeiden vakioita sisältävä polynomi. Vertaamalla kyseisen polynomin ja polynomin $P(x)$ termien kertoimia, saadaan vakiot määrättyä.

4) Integraali $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ saadaan osamurtolausekkeiden integraalien summana.

Esimerkki 2.9.

$$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx$$

Jos $P(x)$ on *korkeampaa tai yhtä suurta astetta* kuin $Q(x)$, niin jaetaan:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

missä jakojäännös $P_1(x)$ on alempaa astetta kuin $Q(x)$.

Siten

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int R(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Esimerkki 2.10.

$$\int \frac{x^3 - 2x - 6}{x^2 - 2x + 1}\, dx$$

Esimerkki 2.11.

$$\int \frac{x}{x^4 + 6x^2 + 5}\, dx$$

2.4 Integrointi sijoitusmenetelmää käyttäen

Integraali $\int f(x)\, dx$ voidaan muuttaa yksinkertaisempaan muotoon sopivalla sijoituksella $x = g(t)$, missä t on apumuuttuja ja funktio $g(t)$ on derivoituva (muuttujan t suhteen). Derivoimalla lauseke $x = g(t)$ puolittain muuttujan t suhteen saadaan

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{eli} \quad dx = g'(t)dt.$$

Täten saadaan *sijoitusmenetelmän sääntö:*

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = F(t) + C$$

Siis sijoituksessa $x = g(t)$ integraalissa korvataan x lausekkeella $g(t)$ ja dx lausekkeella $g'(t)dt$. Integroinnin jälkeen palataan alkuperäiseen muuttujaan x sijoituksella $t = g^{-1}(x)$.

Huomautus. Sijoitusmenetelmästä on hyötyä vain, jos se johtaa yksinkertaisempaan integraaliin! Yleensä korvataan jokin muuttujaa x sisältävä termi apumuuttujalla t.

Käyttökelpoisia sijoituksia:

1) Jos integroitavan funktion osana esiintyy termi $ax + b$ tai $\frac{ax+b}{cx+d}$, voidaan sijoittaa $t = ax + b$ tai $t = \frac{ax+b}{cx+d}$.

   Esimerkki 2.12.

   $$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\, dx$$

2) Jos integroitavan funktion osana esiintyy termi

$$\sqrt[n]{ax+b}, \quad (ax+b)^n, \quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{tai} \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n,$$

voidaan sijoittaa

$$t = \sqrt[n]{ax+b}, \quad t = (ax+b)^n, \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \ \text{ tai } \ t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n.$$

Esimerkki 2.13.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-2x}}\,dx$$

3) Jos integroitava funktio f on rationaalinen muuttujan x murtolukupotenssien suhteen, saadaan integroitavasta rationaalinen muuttujan t suhteen sijoituksella $x = t^d$, missä d on muuttujan x murtopotenssien nimittäjien pienin yhteinen jaettava.

   Esimerkki 2.14.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

4) Jos integroitava on rationaalinen termin $(ax+b)$ murtolukupotenssien suhteen, käytetään sijoitusta $ax+b = t^d$, missä d on termin $(ax+b)$ murtolukupotenssien nimittäjien pienin yhteinen jaettava.

   Esimerkki 2.15.

$$\int \frac{x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Huomautus. Pienin yhteinen jaettava tarkoittaa sellaista pienintä lukua, jonka jotkut tietyt luvut jakavat tasan. Esimerkiksi lukujen 2 ja 3 pienin yhteinen jaettava on luku 6.

5) Jos integroitavassa funktiossa f esiintyy

$$e^x \quad \text{tai} \quad a^x$$

   voidaan sijoittaa

$$t = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln t \quad \text{tai} \quad t = a^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_a t.$$

6) Tietyissä erikoistapauksissa sijoitus $x = \frac{1}{t}$ on tehokas.

   Esimerkki 2.16.

$$\int \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx$$

2.5 Määräämätön integraali taloustieteessä

Taloustieteessä kuvataan jonkin muuttujan y vaihtelua toisen muuttujan x suhteen käyttäen keskimääräisen muutoksen ja rajamuutoksen käsitteitä. Rajamuutosfunktio saadaan alkuperäisestä funktiosta derivoimalla, joten alkuperäinen funktio saadaan rajafunktiosta (vakiota vaille) integroimalla.

2.5.1 Kustannusfunktiot

Olkoon $C = C(x)$ kokonaiskustannusfunktio, missä x on tuotannon määrä. Tällöin $AC(x) = \frac{C(x)}{x}$ on keskimääräisten kustannusten funktio ja $MC(x) = C'(x)$ on rajakustannusfunktio. Kokonaiskustannusfunktio $C(x)$ saadaan siten integroimalla rajakustannusfunktio $MC(x)$ eli

$$C(x) = \int MC(x)\, dx.$$

Integroimisvakio c saadaan määrättyä jonkin alkuehdon avulla. Usein annetaan kiinteät kustannukset, eli kustannukset tuotannon määrän x ollessa nolla.

Esimerkki 2.17. Olkoon rajakustannusfunktio $MC(x) = 2 + 60x - 5x^2$. Määrää kokonaiskustannusfunktio $C(x)$ ja keskimääräiskustannusfunktio $AC(x)$, kun kiinteät kustannukset ovat 65.

$$C(x) = \int MC(x)\, dx = \int 2 + 60x - 5x^2\, dx = 2x + 30x^2 - \frac{5}{3}x^3 + c$$

$$C(0) = 65 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 0 + 30 \cdot 0^2 - \frac{5}{3} \cdot 0^3 + c = 65 \quad \Rightarrow \quad c = 65$$

$$\Rightarrow C(x) = 2x + 30x^2 - \frac{5}{3}x^3 + 65$$

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x + 30x^2 - \frac{5}{3}x^3 + 65}{x} = 2 + 30x - \frac{5}{3}x^2 + \frac{65}{x}.$$

2.5.2 Tulofunktiot

Kun $y = f(x)$ on kysyntäfunktio, missä y on tavaran yksikköhinta ja x kysynnän suuruus (määrä), niin

$$\text{kokonaistulofunktio} \quad R(x) = xy = x \cdot f(x)$$

$$\text{ja rajatulofunktio} \quad MR(x) = \frac{dR(x)}{dx} = f(x) + x \cdot f'(x).$$

Siten kokonaistulofunktio on rajatulon integraalifunktio, eli

$$R(x) = \int MR(x)\, dx.$$

Integroimisvakio c määräytyy usein ehdosta, että kokonaistulo on nolla, kun kysyntä x on nolla eli $R(0) = 0$.

Keskimääräisten tulojen funktio

$$AR(x) = \frac{R(x)}{x} = \frac{xf(x)}{x} = f(x) = \text{kysyntäfunktio}.$$

Esimerkki 2.18. Olkoon rajatulofunktio $MR(x) = 8 - 6x - 2x^2$. Määrää kokonaistulofunktio $R(x)$ ja kysyntäfunktio $f(x)$, kun kysynnän määrällä nolla kokonaistulo on nolla.

$$\begin{aligned} R(x) = \int MR(x)\, dx &= \int 8 - 6x - 2x^2\, dx = 8x - 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c \\ R(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 8 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \\ &\Rightarrow R(x) = 8x - 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \\ f(x) &= \frac{R(x)}{x} = \frac{8x - 3x^2 - \frac{2}{3}x^3}{x} = 8 - 3x - \frac{2}{3}x^2. \end{aligned}$$

2.5.3 Kansantulo, kulutus ja säästäminen

Olkoon $C = C(x)$ kulutusfunktio, missä C on kansallinen kokonaiskulutus ja x kokonaiskansantulo. Rajakulutusalttius saadaan seuraavasti:

$$\frac{dC}{dx} = C'(x).$$

Olettamalla, että $x = C(x) + S(x)$, missä $S(x)$ on säästöfunktio, saadaan rajasäästämisalttius seuraavasti:

$$S(x) = x - C(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dS(x)}{dx} = 1 - \frac{dC(x)}{dx}$$

Koska kansallinen kokonaiskulutus on rajakulutusalttiuden integraalifunktio, niin $C(x)$ on muotoa

$$C(x) = \int C'(x)\,dx.$$

Esimerkki 2.19. Olkoon rajakulutusalttius $\frac{dC}{dx} = 56 + \frac{16}{\sqrt{x}}$ (milj. euroa). Kun kansantulo on nolla, on kulutus 640 milj. euroa. Määrää kokonaiskulutusfunktio.

$$\begin{aligned}
&\int C'(x)\,dx = \int 56 + \frac{16}{\sqrt{x}}\,dx = 56x + 32\sqrt{x} + c \\
&C(0) = 640 \quad \Rightarrow \quad 56 \cdot 0 + 32\sqrt{0} + c = 640 \quad \Rightarrow \quad c = 640 \\
&\Rightarrow \quad C(x) = 56x + 32\sqrt{x} + 640
\end{aligned}$$

2.5.4 Pääoman muodostus

Olkoon $K(t)$ pääoman kokonaismäärä ajan hetkellä t ja $K(t)$ on derivoituva muuttujan t suhteen. Pääoman muodostuksen aste (nopeus) on tällöin

$$\frac{dK}{dt} = K'(t).$$

Nyt pääoman muodostuksen aste $K'(t)$ on yhtä suuri nettoinvestointivirran $I(t)$ kanssa. Saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}
&K'(t) = I(t) \\
\Rightarrow &\int K'(t)\,dt = \int I(t)\,dt \\
\Rightarrow &K(t) = \int I(t)\,dt
\end{aligned}$$

Siten pääoman kokonaismäärä on pääoman muodostuksen asteen tai nettoinvestointivirran integraalifunktio. $K(t)$ saadaan, kun em. integraaleissa määrätään integroitumisvakio.

Esimerkki 2.20. Nettoinvestointivirta $I(t) = 5t^{\frac{3}{7}}$. Määritä pääoman kokonaismäärä ajanhetkellä t, kun pääoman kokonaismäärä ajanhetkellä $t = 0$ on 30.

$$
\begin{aligned}
&K(t) = \int I(t)\,dt = \int 5t^{\frac{3}{7}}\,dt = \frac{5t^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} + c = \frac{7t^{\frac{10}{7}}}{2} + c \\
&K(0) = 30 \quad \Rightarrow \quad \frac{7 \cdot 0^{\frac{10}{7}}}{2} + c = 30 \quad \Rightarrow c = 30 \\
&\Rightarrow \quad K(t) = \frac{7}{2}t^{\frac{10}{7}} + 30
\end{aligned}
$$

2.6 Määrätty integraali

Olkoon $y = f(x)$ välillä $[a, b]$ jatkuva funktio ja $F(x)$ sen jokin integraalifunktio. Luku $F(b) - F(a)$ on funktion $f(x)$ *määrätty integraali* yli välin [a,b].

Merkitään:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Esimerkki 2.21.

$$\int_0^2 (2x^3 + 5x)\,dx$$

2.6.1 Määrätty integraali ja pinta-ala

Oletetaan, että $y = f(x)$ on jatkuva funktio ja $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in D_f$. Tehtävänä on määrittää seuraava pinta-ala A.

Olkoon $A(x_0)$ käyrän $y = f(x)$, x–akselin, y–akselin ja suoran $x = x_0$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Alueen $B_3B_2B_5B_6$ pinta-ala on $\Delta A = A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)$.

Suorakulmion $B_1B_2B_5B_6$ pinta-ala on $\Delta x \cdot f(x_0 + \Delta x)$.

Suorakulmion $B_3B_4B_5B_6$ pinta-ala on $\Delta x \cdot f(x_0)$.

Selvästi

$$\begin{aligned} & \Delta x \cdot f(x_0) \le \Delta A \le \Delta x \cdot f(x_0 + \Delta x) \qquad\qquad \mid : \Delta x \\ \Leftrightarrow \; & f(x_0) \le \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0 + \Delta x). \end{aligned} \tag{16}$$

Kun $\Delta x \to 0$, saadaan

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = f(x_0) \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

Siten ottamalla puolittain yhtälöstä (16) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ saadaan:

$$f(x_0) \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad A'(x_0) = f(x_0).$$

Koska x_0 on mielivaltainen, saadaan $A'(x) = f(x)$. Siten $A(x)$ on funktion $f(x)$ eräs integraalifunktio.

Nyt $A = A(b) - A(a)$. Olkoon $F(x)$ mielivaltainen funktion $f(x)$ integraalifunktio.

Tällöin

$$F(x) = A(x) + c, \quad c \text{ vakio.}$$

Siis

$$F(b) - F(a) = (A(b) + c) - (A(a) + c) = A(b) - A(a) = A.$$

Lause 2.4. *Jos funktio $f(x)$ on välillä $[a, b]$ jatkuva ja $f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in [a, b]$, niin määrätty integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ on käyrän $y = f(x)$, x–akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-ala.*

2.7 Määrätyn integraalin ominaisuuksista

Lause 2.5. *Olkoot funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia välillä $[a,b]$ ja olkoon $c \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin*

(*i*) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

(*ii*) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Todistus. Olkoot $F(x)$ ja $G(x)$ funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ eräät integraalifunktiot.

(i)

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)\,dx &= \Big/_a^b cF(x) = cF(b) - cF(a) = c(F(b) - F(a)) \\ &= c\Big/_a^b F(x) = c\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \Big/_a^b (F(x)+G(x)) = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \Big/_a^b F(x) + \Big/_a^b (G(x) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.22.

$$\int_{-1}^{2} (x^3 + 3x^2 + 2)\,dx$$

Lause 2.6. *Jos funktio* $f(x)$ *on* jatkuva *välillä* $[a, b]$ *ja* $a < c < b$*, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Olkoon $F(x)$ eräs funktion $f(x)$ integraalifunktio.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a))$$

$$= \Big/_{c}^{b} F(x) + \Big/_{a}^{c} F(x) = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx.$$

□

Esimerkki 2.23. Olkoon $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 0 \\ x^3 - x - 1, & x > 0 \end{cases}$. Määrää $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

Lause 2.7. *Myös tilanteessa* $a \ge b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a).$$

Nyt

$$\int_a^a f(x)\,dx = \Big/_{a}^{a} F(x) = F(a) - F(a) = 0$$

ja

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Lause 2.8. *Olkoot* $f(x)$ *ja* $g(x)$ *jatkuvia funktioita välillä* $[a, b]$.

(*i*) *Jos* $f(x) \ge 0$ *välillä* $[a, b]$*, niin* $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

(*ii*) *Jos* $f(x) \le g(x)$ *välillä* $[a, b]$*, niin* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

(*iii*) *Jos* $f(x) \leq 0$ *välillä* $[a, b]$, *niin* $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

Todistus. Olkoon $F(x)$ funktion $f(x)$ integraalifunktio ja $G(x)$ funktion $g(x)$ integraalifunktio.

(i) $F'(x) = f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $F(x)$ on kasvava välillä $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $F(b) \geq F(a)$.
Näin ollen $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \geq 0$.

(ii) Koska $f(x) \leq g(x)$ välillä $[a, b]$, niin $g(x) - f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$ ja kohdan (i) nojalla

$$\begin{aligned}\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0 &\Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

(iii) $F'(x) = f(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $F(x)$ on vähenevä välillä $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $F(b) \leq F(a)$.
Näin ollen $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \leq 0$.

□

Lause 2.9 (Integraalilaskennan väliarvolause)**.** *Olkoon* $f(x)$ *suljetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio. Tällöin on olemassa ainakin yksi* $x_0 \in]a, b[$, *jolle*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b - a).$$

Todistus. Olkoon $f(x)$ suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio. Siten $f(x)$ saavuttaa tällä välillä suurimman arvon $(= M)$ ja pienimmän arvon $(= m)$. Siis välillä $[a, b]$ on voimassa $m \leq f(x) \leq M$.

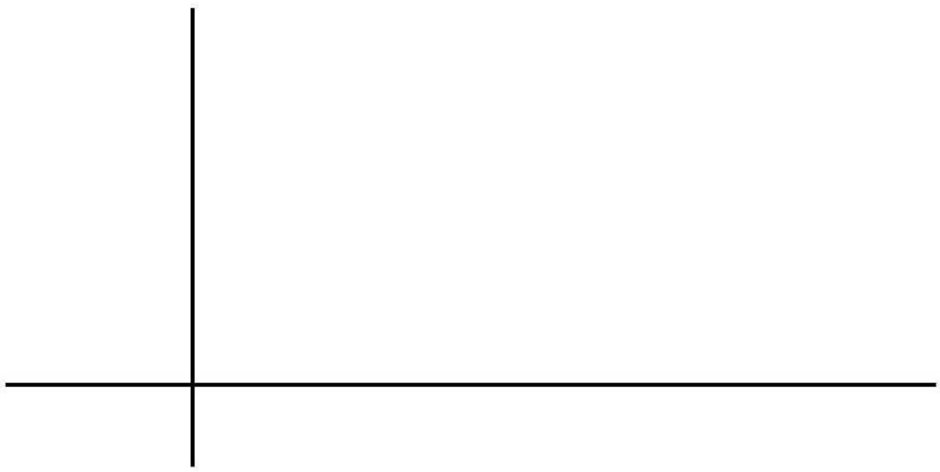
Lauseen 2.8 kohdan (ii) nojalla

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \\
\Leftrightarrow\ &\bigg/_{\!a}^{\,b} mx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \bigg/_{\!a}^{\,b} Mx \\
\Leftrightarrow\ &m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad | : (b-a) \quad (b > a) \\
\Leftrightarrow\ &m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.
\end{aligned}
$$

Jatkuva funktio saa arvokseen jokaisen arvon minimin ja maksimin väliltä, joten on olemassa sellainen $x_0 \in]a, b[$, että $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Geometrisesti:

Välillä $]a, b[$ on sellainen kohta x_0, että kuvion suorakulmion pinta-ala on yhtä suuri kuin käyrän $y = f(x)$ rajoittaman alueen pinta-ala.



2.8 Pinta-alan määritys integraalin avulla

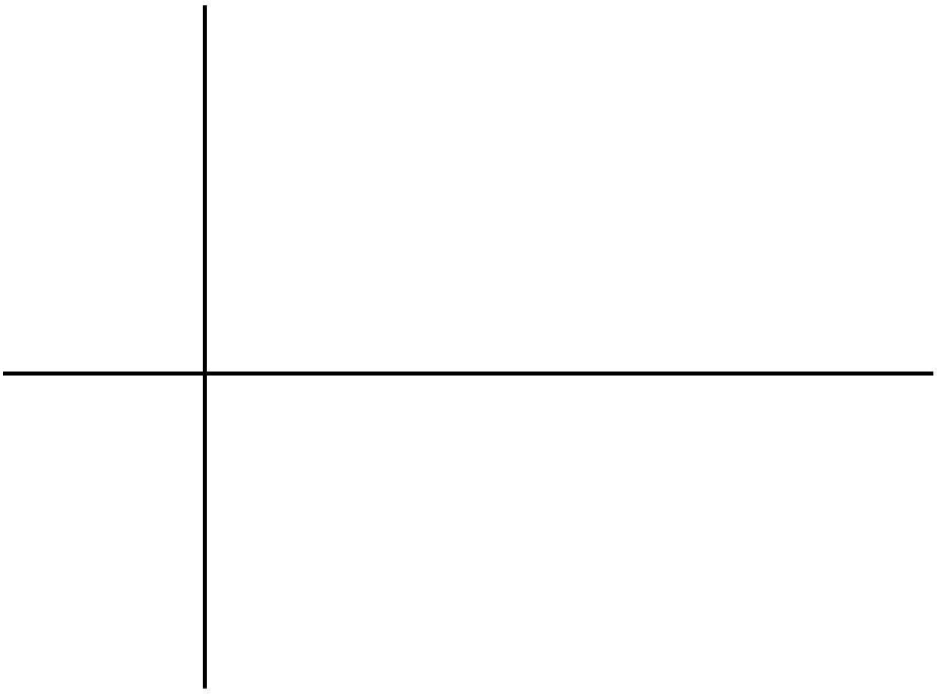
1^o $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$ ja jatkuva tällä välillä.

Nyt käyrän $y = f(x)$, x–akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-ala

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Esimerkki 2.24. Määritä sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = \frac{1}{x^2}$, x–akseli sekä suorat $x = 1$ ja $x = 3$.

2^o $f(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$ ja jatkuva tällä välillä.



Määritetään käyrän $y = f(x)$, x–akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävän alueen pinta-ala A.

Käyrät $y = f(x)$ ja $y = -f(x)$ ovat symmetriset x–akselin suhteen.

Nyt $-f(x) \geq 0$ ja siten käyrän $-f(x)$, x–akselin sekä suorien $x = 0$ ja $x = b$väliin jäävä pinta-ala

$$A_1 = \int_a^b -f(x)\,dx.$$

Symmetrian perusteella tämä on myös x–akselin ja käyrän $f(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala alapuolisen alueen pinta-ala.

Siten kun $f(x) \leq 0$ välillä $[a, b]$, niin käyrän $y = f(x)$, x–akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävän alueen pinta-ala

$$A = \int_a^b -f(x)\,dx.$$

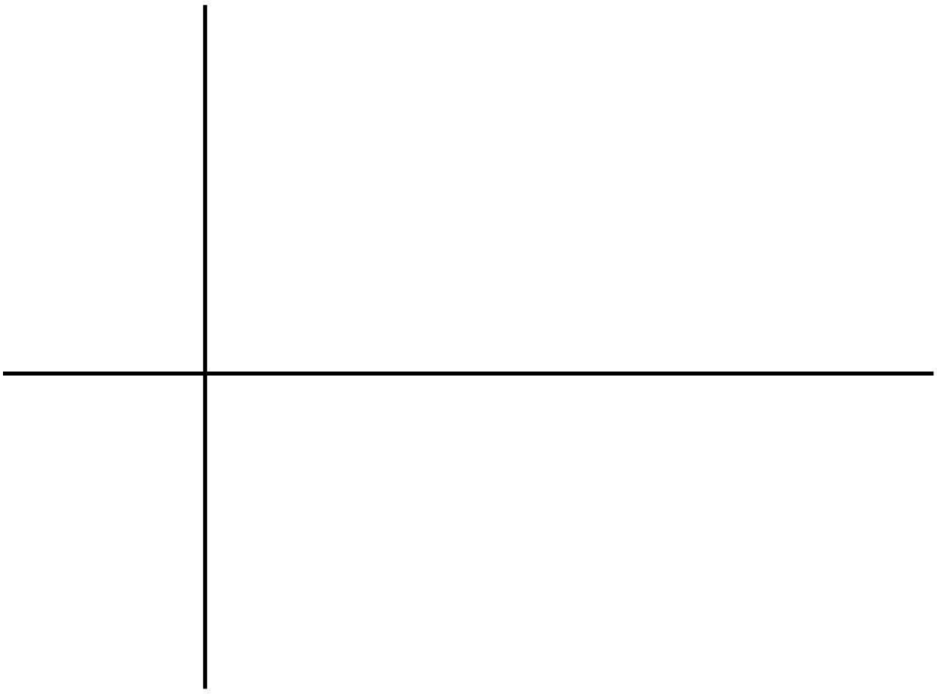
Esimerkki 2.25.

a) Määrää välillä $[0,1]$ käyrän $f(x) = x^3 - x$ ja x–akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.

b) Määrää käyrän $f(x) = x^3 - x$ ja x–akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

3^o Kahden käyrän väliin jäävä pinta-ala.

Oletetaan, että $f(x) \geq g(x)$ välillä $[a,b]$. Määritettävä sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ sekä suorat $x = a$ ja $x = b$. Nyt funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ voivat saada myös negatiivisia arvoja välillä $[a,b]$.



Olkoon c niin suuri vakio, että $g(x)+c \geq 0$ välillä $[a,b]$ (tällöin myös $f(x)+c \geq 0$).

On selvä, että käyrien $y = g(x)+c$ ja $y = f(x)+c$ väliin jäävä alue on yhtä suuri kuin käyrien $f(x)$ ja $g(x)$ väliin jäävä alue. Käyrien $y = f(x)+c$ ja $y = g(x)+c$ väliin jäävän alueen pinta-ala

$$A = \int_a^b (f(x)+c)\,dx - \int_a^b (g(x)+c)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

Esimerkki 2.26. Määritä sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat suorat $x = 0$ ja $x = 2$ sekä käyrät $f(x) = e^x$ ja $g(x) = 2x - x^2$.

Esimerkki 2.27. Määritä sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y^2 = 4x$, y–akseli ja suora $y = 2$.

Esimerkki 2.28. Laske käyrien $y = \sqrt{1-x}$ ja $y = \sqrt{x-2}$ sekä suorien $y = 1$ ja $y = 2$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

2.9 Osittaisintegrointi, osamurtokehitelmä ja sijoitus määrätyssä integraalissa

Lause 2.10. *Olkoot $f'(x)$ ja $g'(x)$ jatkuvia funktioita välillä $[a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x) \cdot g(x) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Todistus. Merkitään

$$\begin{aligned} h(x) = f(x)g(x) \quad &\Rightarrow \quad h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &\Rightarrow \quad f'(x)g(x) = h'(x) - f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)\, dx &= \int_a^b h'(x)\, dx - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \Big/_{\!a}^{\,b} h(x) - \int_a^b f(x)g'(x), dx \\ &= \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.29.

$$\int_1^e \ln x\, dx$$

Lause 2.11. *Osamurtokehitelmä pätee myös määrätylle integraalille.*

Esimerkki 2.30 (vrt. esim. 2.9).

$$\int_1^2 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\, dx$$

Lause 2.12. *Olkoon $f(x)$ jatkuva välillä $[a,b]$ ja $g(t)$ sellainen välillä $[\alpha,\beta]$ määritelty funktio, että*

(*i*) $g'(t)$ *jatkuva välillä* $[\alpha,\beta]$

(*ii*) $g(t) \in [a,b]$ *aina, kun* $t \in [\alpha,\beta]$

(*iii*) $g(\alpha) = a$ *ja* $g(\beta) = b$

Tällöin

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

Todistus. Olkoon $F(x)$ jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio (f jatkuva). Tällöin

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad \text{ja} \\ &D(F(g(t))) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \\ &\text{eli} \quad \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = F(g(t)). \end{aligned}$$

Siis

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

□

Menettely:

Kun halutaan laskea $\int_a^b f(x)\, dx$ käyttämällä sijoitusta $x = g(t)$, missä g täyttää vaaditut ehdot, niin korvataan funktio $f(x)$ lausekkeella $f(g(t))$ ja dx lausekkeella $g'(t)\, dt$. Uudet integroimisrajat α ja β on myös määritettävä eli

$$x = a \quad \Rightarrow \quad \alpha = g^{-1}(a) \quad \text{ja} \quad x = b \quad \Rightarrow \quad \beta = g^{-1}(b).$$

Menetelmä ei vaadi takaisin sijoitusta niin kuin määräämättömässä integraalissa.

Esimerkki 2.31.

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

2.10 Määrätyn integraalin taloustieteellisiä sovelluksia

2.10.1 Kuluttajan ylijäämä

Kysyntäfunktio $y = f(x)$ kuvaa hyödykkeen hinnan y riippuvuutta kaupaksi käyvään määrään x. (Kysyntäfunktiosta saadaan selville tuotteen kysynnän määrä eri hinnoilla.)

Jos markkinahinta on y_0 ja vastaava kysyntämäärä x_0, niin ne kuluttajat, jotka ovat valmiita maksamaan hyödykkeestä enemmän kuin markkinahinnan, hyötyvät siitä, että hinta on vain $y_0 \quad \Rightarrow$ ***kuluttajan ylijäämä***.

Kuluttajan ylijäämä on kysyntäkäyrän $y = f(x)$ ja suoran $y = y_0$ väliin jäävä pinta-ala:

$$\text{Kuluttajan ylijäämä} = \int_{0}^{x_0} f(x)\, dx - x_0 y_0 = \int_{y_0}^{m_0} g(y)\, dy,$$

missä jälkimmäisessä kaavassa kysyntäfunktio on muodossa $x = g(y) = f^{-1}(y)$ ja m_0 hinta, jolla ei kysyntää ole eli $m_0 = f(0)$.

Huomautus. Kuluttajan ylijäämän yksikkö on rahayksikkö.

Esimerkki 2.32. Olkoon kysyntäfunktio $y = 32 - 4x - x^2$. Määrää kuluttajan ylijäämä kun

a) $x_0 = 2$
b) $y_0 = 27$.

Esimerkki 2.33. Monopolin haltija pyrkii määrittämään tuotteen hinnan ja myytävän määrän siten, että voitto maksimoituu. Määritä vastaava kuluttajan ylijäämä, kun kysyntäfunktio on $y = 16 - x^2$ ja rajakustannusfunktio $MC(x) = 6 + x$.

2.10.2 Tuottajan ylijäämä

Tarjontafunktio $y = f(x)$ kuvaa hyödykkeen hinnan y riippuvuutta tarjottuun määrään x. (Tarjontafunktiosta saadaan selville tuotteen tarjonnan määrä eri hinnoilla.)

Jos tuotteen hinta on y_0 ja vastaava tarjonnan määrä x_0, niin ne tuottajat, jotka myisivät tuotteensa alle hinnan y_0 hyötyvät siitä, että hinta on y_0.

Tuottajan ylijäämää on pinta-ala, joka jää tarjontakäyrän $y = f(x)$ ja suoran $y = y_0$ väliin:

$$\text{Tuottajan ylijäämä} = x_0 y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,dx = \int_{M_0}^{y_0} g(y)\,dy,$$

missä jälkimmäisessä kaavassa tarjontafunktio on muodossa $x = g(y) = f^{-1}(y)$ ja M_0 on hinta, jolla tarjontaa ei ole eli $M_0 = f(0)$.

Huomautus. Tuottajan ylijäämän yksikkö on rahayksikkö.

Huomautus. Yleisesti markkinahinta määräytyy kysynnän ja tarjonnan tasapainosta (kysyntä=tarjonta).

Esimerkki 2.34. Määrää markkinahinta, kun kysyntäfunktio on $y = 16 - x^2$ ja tarjousfunktio $y = 4 + x$.

Ratkaisu:

Lasketaan millä hinnan y ja määrän x arvolla toteutuu kysyntä=tarjonta.

Siis

$$
\begin{aligned}
& 16 - x^2 = 4 + x \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + x - 12 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 & \text{ei käy} \end{cases} \\
\Rightarrow\quad & x = 3 \\
\Rightarrow\quad & y = 4 + 3 = 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Tuottajan ylijäämä} &= 3 \cdot 7 - \int_0^3 (3 + x)\,dx = 21 - \mathop{\Big/}_0^3 \left(3x - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= 21 - \left[4 \cdot 3 + \frac{9}{2} - 0\right] = 21 - 12 - \frac{9}{2} = 9 - \frac{9}{2} \\
\text{Kuluttajan ylijäämä} &= \int_0^3 (16 - x^2)\,dx - 3 \cdot 7 = \mathop{\Big/}_0^3 \left(16x - \frac{x^3}{3}\right) - 21 \\
&= 16 \cdot 3 - \frac{27}{3} - 21 = 48 - 9 - 21 = 18
\end{aligned}
$$

2.10.3 Kokonaisvoitto

Integrointia voidaan useissa tapauksissa käyttää kokonaisvoiton tai kokonaisnettoansioiden määräämiseen, kun ei tiedetä voittofunktiota. (Tiedetään esimerkiksi rajatulofunktio ja rajakustannusfunktio.)

Yleisesti voitto maksimoituu (vapaan kilpailun olosuhteissa), kun rajatulo=rajakustannus (ks. esim. 2.35).

Kokonaisvoitto saadaan rajatulofunktion $MR(x)$ ja rajakustannusfunktion $MC(x)$, missä x tuotannon määrä, erotuksen integraalina yli välin $[0, a]$, missä a on tuotantomäärä, jolla voitto maksimoituu.

Esimerkki 2.35. Etsi tuotannon määrä, jolla voitto maksimoituu ja kokonaisvoitto, kun rajatulo- ja rajakustannusfunktio ovat $MR(x) = 25 - 5x - 2x^2$ ja $MC(x) = 15 - 2x - x^2$.

Ratkaisu:

Nyt $\Pi(x) = R(x) - C(x)$.

Voiton maksimointi:

$$
\begin{aligned}
& \frac{d\Pi}{dx} = MR(x) - MC(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & MR(x) = MC(x) \\
\Leftrightarrow\quad & 25 - 5x - 2x^2 - 15 + 2x + x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 10 - 3x - x^2 = 0 \qquad | \cdot (-1) \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + 3x - 10 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nyt lausekkeen $(MR(x) - MC(x))$ derivaatta on voittofunktion $\Pi(x)$ 2. derivaatta, eli sen merkki ilmaisee saadaanko kohdassa $x = 2$ voiton maksimi vai minimi.

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{d}{dx}(MR(x) - MC(x)) = -3 - 2x$$

Nyt

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2}(2) = -7 < 0 \quad \Rightarrow \text{maksimi}$$

Siis voitto maksimoituu, kun $x = 2$.

$$\begin{aligned}
\text{Kokonaisvoitto} &= \int_0^2 [(25 - 5x - 2x^2) - (15 - 2x - x^2)]\,dx \\
&= \int_0^2 (10 - 3x - x^2)\,dx = \Big/_0^2 (10x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) \\
&= 20 - 6 - \frac{8}{3} = 14 - \frac{8}{3} = \frac{42 - 8}{3} = \frac{34}{3}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.36. Yhtiössä harkitaan myyntihenkilöstön lisäämistä. Yhden uuden myyjän palkkauksesta aiheutuvat lisäkustannukset (rajakustannus) ovat $5y^2 = 48x$, missä rajakustannusten y yksikkö on 1000 euroa ja x on työhön jo otettujen uusien myyjien lukumäärä. Yhden uuden myyjän aikaansaama lisätulo r (rajatulo) saadaan yhtälöstä $(r - 2)^2 = 4(x + 10)$, missä rajatulon r yksikkö on 1000 euroa ja x jo palkattujen uusien myyjien lukumäärä. Yhtiö ottaa uusia myyjiä, kunnes palkkaamisesta aiheutuvat kustannukset kasvavat yhtä suuriksi kuin hankittu lisätulo, eli $r = y$ (rajatulo=rajakustannukset; voiton maksimointi).

2.11 Määrätyn integraalin numeerinen arviointi

Usein joudutaan tilanteisiin, joissa integraalia ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla tai integroitava on määritelty empiirisen aineiston (käyrä, taulukko ym.) avulla. Seuraavassa kolme *arviointimenetelmää* määrätyille integraaleille.

- *Puolisuunnikassääntö*
- *Simpsonin sääntö*
- *Taylorin sarja*

Arviointimenetelmät, jotka esitellään, vaativat käytännössä tietokoneen käyttöä.

2.11.1 Puolisuunnikassääntö

Puolisuunnikassäännössä integroitava funktio korvataan suorilla, joten menetelmä on tässä mielessä lineaarinen.

Olkoon määrättävänä $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Jaetaan integroimisväli $[a,b]$ n:ään yhtä suureen osaan, kukin pituudeltaan Δx.

Olkoot jakopisteet $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ ja vastaavat funktion arvot
$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Muodostetaan puolisuunnikkaat seuraavasti:

Tällöin

$$\begin{aligned}
1.\ \text{puolisuunnikkaan pinta-ala} &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x \\
2.\ \text{puolisuunnikkaan pinta-ala} &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x \\
3.\ \text{puolisuunnikkaan pinta-ala} &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\Delta x \\
\ldots \\
(n-1).\ \text{puolisuunnikkaan pinta-ala} &= \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x \\
n.\ \text{puolisuunnikkaan pinta-ala} &= \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x
\end{aligned}$$

Kaikkien n kappaleen puolisuunnikkaan yhteisalaksi saadaan

$$\Delta x \left[\frac{1}{2} y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{1}{2} y_n \right].$$

Siten puolisuunnikassääntö määrätylle integraalille on

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \Delta x \cdot \left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right].$$

Luvun n kasvaessa menetelmä antaa paremman approksimaation.

Esimerkki 2.37. Laske $\int_2^4 x(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$ puolisuunnikassäännön avulla, kun valitaan tarkkuus $n = 4$.

2.11.2 Simpsonin sääntö

Simpsonin sääntö käyttää toisen asteen käyriä approksimoimaan annettua funktiota $f(x)$. Kolmen pisteen kautta voidaan aina asettaa kulkemaan paraabeli. Paraabelin yhtälö voidaan määrätä näiden pisteiden avulla. Simpsonin säännössä tätä yhtälöä ei tarvitse kuitenkaan löytää, koska sen rajoittaman alueen pinta-ala voidaan määrätä muutenkin.

Jos paraabeli kulkee pisteiden (x_0, y_0), (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = \Delta x$, on paraabelin, x–akselin ja suorien $x = x_0$ ja $x = x_2$ rajoittaman alueen pinta-ala

$$A = \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Tehtävänä arvioida integraalia $\int_a^b f(x)\,dx$.

Jaetaan integroimisväli $[a, b]$ n:ään yhtä suureen osaan (n parillinen), joiden pituus Δx.

Olkoot jakopisteet $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ ja vastaavat funktion arvot $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Laitetaan paraabelit kulkemaan aina kolmen pisteen kautta.

Pinta-aloiksi saadaan tällöin

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\
A_2 &= \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\
&\dots \\
A_{\frac{n}{2}} &= \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).
\end{aligned}
$$

Pinta-alojen summa on

$$\frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Siten Simpsonin sääntö integraalille $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ on

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Luvun n kasvaessa approksimaatio paranee.

Esimerkki 2.38. Laske $\int\limits_2^4 x(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ Simpsonin säännöllä, kun tarkkuus $n = 4$

Ratkaisu: Nyt $\Delta x = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$ ja

i	0	1	2	3	4
x_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$y_i = f(x_i)$	6,928	7,806	7,937	6,778	0

$$
\begin{aligned}
\int\limits_2^4 x(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx &\approx \frac{\Delta x}{3} \cdot [y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4] \\
&= \frac{0,5}{3} \cdot [6,928 + 4(7,806 + 6,778) + 2 \cdot 7,937 + 0] = 13,523
\end{aligned}
$$

Toisaalta

$$\int_2^4 x(16-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\int_2^4 (16-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot \Big/_{\!2}^{4} \frac{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\cdot \Big/_{\!2}^{4} (16-x^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot(0-12^{\frac{3}{2}}) = 13,856.$$

2.11.3 Taylorin kehitelmä

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ $\quad$ (n positiivinen kokonaisluku, $0! = 1$)

Olkoon $f^{(k)}(a)$ funktion $f(x)$ k. derivaatta kohdassa $x = a$.

Lause 2.13 (Taylorin lause)**.** *Oletetaan, että funktiolla $f(x)$ on kaikkien kertalukujen derivaatat määrittelyjoukossaan ja $a \in D_f$. Tällöin*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+ R_n(x),\ \textit{missä}\ R_n(x) \to 0,\ \textit{kun}\ n \to \infty.$$

Tällöin yo. sarja on funktion $f(x)$ Taylorin sarjakehitelmä *kohdassa $x = a$.*

Kun funktion $f(x)$ Taylorin sarjakehitelmä katkaistaan sopivan termin kohdalta, saadaan polynomi, joka approksimoi *funktiota $f(x)$.*

Huomautus.

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Sarjaa voidaan integroida termeittäin kunnes tarpeellinen tarkkuus on saavutettu.

Yleensä kannattaa valita $a \in [c,d]$, missä $[c,d]$ on integroimisväli.

Siis

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \right] dx$$

Esimerkki 2.39. Laske $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{x+1}\,dx$ Taylorin sarjakehitelmän avulla tarkkuudella $k = 4$.

Ratkaisu:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \qquad \text{valitaan } a = \frac{1}{4} \qquad\qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{20}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \qquad\qquad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}{(\frac{5}{4})^2} = \frac{9}{25}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2x+2}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \qquad\qquad f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{(\frac{5}{4})^3} = \frac{128}{125}$$

$$f'''(x) = \frac{-2 \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-6}{(x+1)^4} \qquad\qquad f'''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-6}{(\frac{5}{4})^4} = -\frac{1536}{625}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{6 \cdot 4 \cdot (x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{24}{(x+1)^5} \qquad\qquad f^{(4)}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{24}{(\frac{5}{4})^5} = \frac{24576}{3125}$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \qquad\qquad f^{(n)}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(\frac{5}{4})^{n+1}}$$

Siten

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{x+1}\,dx \approx \int_0^{\frac{1}{2}} \Bigg[\frac{1}{20} + \frac{9}{25\cdot 1!}\left(x-\frac{1}{4}\right) + \frac{128}{125\cdot 2!}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$+\left(-\frac{1536}{625\cdot 3!}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^3\right) + \frac{24576}{3125\cdot 4!}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^4\Bigg]\,dx$$

$$= \Big/_{0}^{\frac{1}{2}} \Bigg[\frac{1}{20}\cdot x + \frac{9}{25\cdot 2}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{128}{125\cdot 6}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^3$$

$$-\frac{1536}{625\cdot 24}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{24576}{3125\cdot 120}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^5\Bigg]$$

$$= \left[\frac{1}{40} + \frac{9}{50}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{128}{750}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1536}{15000}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{24576}{375000}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\right]$$

$$-\left[\frac{9}{50}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{128}{750}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1536}{15000}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{24576}{375000}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^5\right]$$

$$\approx 0,0304$$

Vertaa:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2-1+1}{x+1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \Big/_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} - \ln 1 \approx 0,0305.$$

3 Kompleksiluvuista ja trigonometrisista funktioista

3.1 Kompleksiluvut

Kompleksiluku z on muotoa $z = a + bi$, missä a ja $b \in \mathbb{R}$.

- reaaliosa $Re\ z = a$, imaginaariosa $Im\ z = b$
- i on imaginaariyksikkö, jolla $i^2 = -1$ eli $i = \sqrt{-1}$
- $\mathbb{C} = (a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R})$, kompleksilukujen joukko
- $\mathbb{R} = (a + bi \,|\, a \in \mathbb{R}$ ja $b = 0)$
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- itseisarvo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- liittoluku $\bar{z} = a - bi$

Olkoon $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$. Tällöin

- $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = c$ ja $b = d$
- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a + bi)}{(c + di)} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

Huomautus. Olkoon $z = a + bi$. Tällöin

- $|z| = |\bar{z}|$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tapaus, jossa $b^2 - 4ac < 0$:

- ei reaalista ratkaisua
- ratkaisu kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$

Esimerkki 3.1. $9x^2 - 12x + 5 = 0$

Lause 3.1. *Jokaisella n:nnen asteen yhtälöllä*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

on joukossa $\mathbb{C}$ *täsmälleen* n *juurta eli ratkaisua eli nollakohtaa.*

Olkoon

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ja $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *yhtälön* $P_n(x) = 0$ *juuret eli nollakohdat, missä* $z_i \in \mathbb{C}$.

Tällöin

$$P_n(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$$

3.2 Trigonometriset funktiot

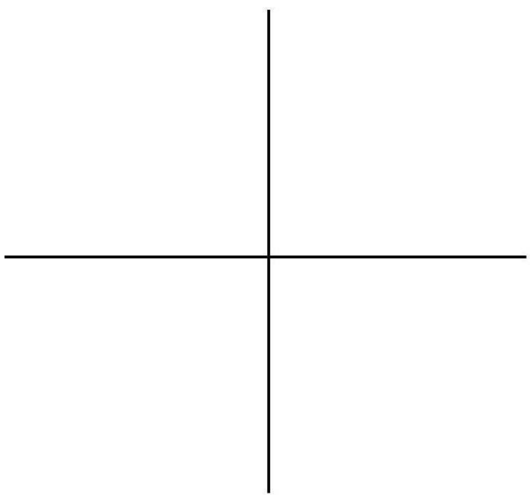
Huomautus. Asteiden sijasta käytetään yleensä *radiaaneja*:

$$360^o = 2\pi\,(rad) \qquad\qquad 180^o = \pi\,(rad)$$

$$1^o = \frac{2\pi}{360}\,(rad) \qquad\qquad 1\,(rad) = \frac{360^o}{2\pi}$$

$$\alpha^o = \frac{\alpha}{360^o} \cdot 2\pi\,(rad), \quad \text{eli} \quad \pi = 180^o, \quad \frac{\pi}{2} = 90^o, \quad 2\pi = 360^o \;\; \text{jne.}$$

Yksikköympyrä:



Kulman $\alpha = \angle AOB$ suuruus radiaaneissa on kulmaa vastaavan yksikköympyrän kaaren AB pituus. Kulma lasketaan positiiviseksi x-akselista vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan ja negatiiviseksi myötäpäivään eli negatiiviseen kiertosuuntaan. Yksikköympyrässä ei tarvitse rajoittaa kulman α suuruutta, vaan se voi olla mikä tahansa reaaliluku, myös negatiivinen.

Olkoon piste (x, y) kulmaa α vastaava yksikköympyrän kehäpiste. Tällöin trigonometriset funktiot määritellään seuraavasti:

Trigonometriset funktiot

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x \ \text{ ja siten } -1 \leq \sin\alpha \leq 1, \ -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}, \quad \alpha \neq n\pi.$$

Siten

$$\begin{aligned}
&\cos 0 = \qquad\qquad, \ \cos\frac{\pi}{2} = \qquad\qquad, \ \cos\pi = \qquad\qquad, \\
&\cos\frac{3\pi}{2} = \qquad\qquad, \ \cos 2\pi = \\
&\sin 0 = \qquad\qquad, \ \sin\frac{\pi}{2} = \qquad\qquad, \ \sin\pi = \qquad\qquad, \\
&\sin\frac{3\pi}{2} = \qquad\qquad, \ \sin 2\pi =
\end{aligned}$$

Huomautus. Trigonometristen funktioiden potenssimerkkinnät:

$$\begin{aligned}
(\sin x)^n &= \sin^n x, \\
(\cos x)^n &= \cos^n x, \\
(\tan x)^n &= \tan^n x.
\end{aligned}$$

Kaavoja:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{(Pythagoraan lauseesta)}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \cos(x + n \cdot 2\pi) \\ \sin x = \sin(x + n \cdot 2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

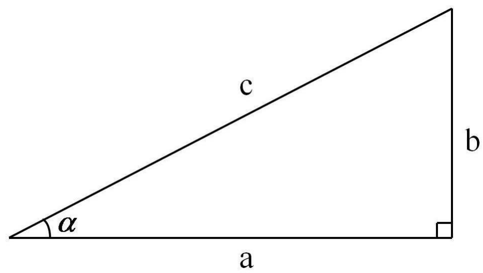
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Suorakulmainen kolmio:



$$\sin \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{c}, \quad \tan \alpha = \frac{b}{a},$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{b}{c} = \cos^{-1} \frac{a}{c}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Pythagoraan lause)}$$

Kulman α ratkaiseminen (käänteisfunktio):

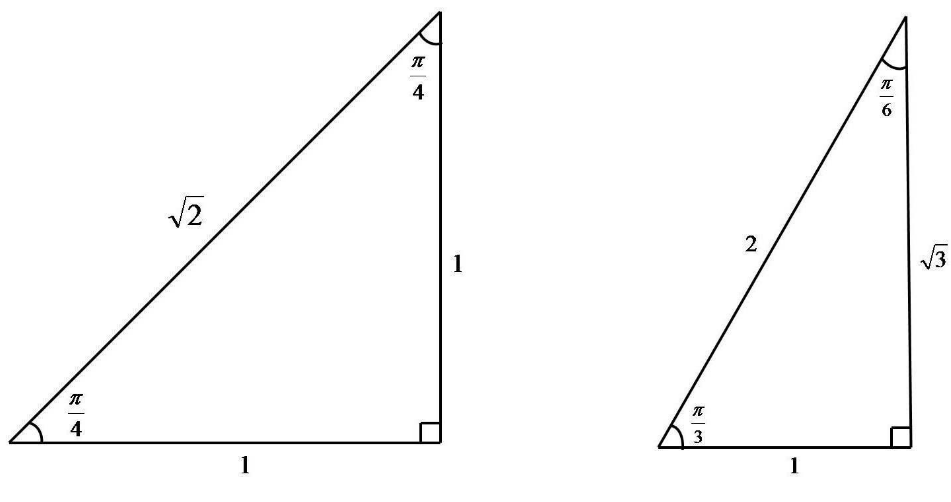
$$
\begin{array}{llll}
y = \sin x & \Leftrightarrow & x = \arcsin y = \sin^{-1} y & -1 \leq y \leq 1 \\
y = \cos x & \Leftrightarrow & x = \arccos y = \cos^{-1} y & -1 \leq y \leq 1 \\
y = \tan x & \Leftrightarrow & x = \arctan y = \tan^{-1} y & y \in \mathbb{R} \\
y = \cot x & \Leftrightarrow & x = \operatorname{arccot} y = \cot^{-1} y & y \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esimerkki 3.2. Määritä $\arctan 1$ ja $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Koska $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, niin $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
Koska $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, niin $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Esimerkki 3.3. Ratkaise yhtälö $\sin 2x = \cos x$.

Muistikolmiot:



Derivoimiskaavat:

$D \sin x = \cos x$

$D \sin f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x)$

$D \cos x = -\sin x$

$D \cos f(x) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D\tan f(x) = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x) = [1 + \tan^2 f(x)] \cdot f'(x)$$

$$D\cot x = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$D\cot f(x) = \frac{-1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x) = -[1 + \cot^2 f(x)] \cdot f'(x)$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \neq \pm 1$$

$$D\arcsin f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)\,, \quad f(x) \neq \pm 1$$

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \neq \pm 1$$

$$D\arccos f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)\ , \quad f(x) \neq \pm 1$$

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\arctan f(x) = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$$

$$D\text{arccot}\, x = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\text{arccot}\, f(x) = \frac{-1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$$

Esimerkki 3.4. Määrää seuraavat derivaatat

a) $D\sin(2x^2)$
b) $D\arctan(2x^2)$
c) $D\arcsin(2x^2)$
d) $D\tan(x^2)$
e) $D\tan^2 x$

Integroimiskaavat:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$
$$\int \sin f(x) \cdot f'(x) \, dx = -\cos f(x) + C$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$
$$\int \cos f(x) \cdot f'(x) \, dx = \sin f(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x) \, dx = \arcsin f(x) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$$
$$\int \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x) \, dx = \arctan f(x) + C$$

Esimerkki 3.5. Määrää seuraavat integraalit

a) $\int \cos(5x) \, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \, dx$

c) $\int \frac{1}{2+x^2} \, dx$

4 Differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälö: yhtälö, jossa esiintyy tuntematon funktio derivaattoineen.

Differentiaaliyhtälön kertaluku: yhtälössä esiintyvän tuntemattoman funktion derivaattojen korkein kertaluku.

Differentiaaliyhtälö: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad y = y(x)$ ja $y =?$

4.1 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$F(x, y, y') = 0, \quad y = y(x) \quad \text{ja} \quad y =?$$

Normaalimuoto: $y' = f(x, y)$

Huomautus. Kaikki 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt eivät ole saatettavissa normaalimuotoon.

Differentiaaliyhtälön $y' = f(x, y)$ *ratkaisu* välillä $I = [a, b]$ on funktio $y = y(x)$, jolle $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall\, x \in I$.

Yhtälön $y' = f(x, y)$ *yleinen ratkaisu* on funktio $y = y(x, c)$, joka jokaisella vakion c arvolla on ko. yhtälön ratkaisu, ns. *yksityisratkaisu*.

Jos vaaditaan lisäksi jokin alkuehto $y(x_0) = y_0$, niin c tulee täysin määrättyä ja saadaan *tietty* yksityisratkaisu.

Seuraavaksi tarkastellaan erilaisia normaalimuotoisia differentiaaliyhtälöitä.

Normaalimuotoiset differentiaaliyhtälöt

$$y' = f(x, y) \tag{17}$$

Yhtälöllä *on aina* alkuehdon toteuttava ratkaisu.

4.1.1 Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Separoituvassa differentiaaliyhtälössä *muuttujat voidaan erottaa*, ts. yhtälö on muotoa

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) = F(x, y).$$

Ratkaisumenettely:

Erotetaan muuttujat:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \qquad (g(y) \neq 0)$$

Integroidaan:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + c,$$

josta $y = y(x)$ voidaan ratkaista.

Huomioi erikseen tilanne $g(y) = 0$

Esimerkki 4.1.

$$(y')^2 + y = 0$$

Esimerkki 4.2.

$$y' = -y^2$$

Etsi yleinen ratkaisu sekä sellainen yksityisratkaisu, joka toteuttaa ehdon $y(0) = 1$.

Huomautus. Myös $y(x) = 0$ on yhtälön $y' = -y^2$ eräs ratkaisu.

Tätä ns. *erikoisratkaisua* ei saada yleensä yleisestä ratkaisusta millään vakion c arvolla vaan se on huomioitava erikseen.

Esimerkki 4.3.

$$(1 + x^2) \cdot \frac{dy}{dx} + x(1 + y) = 0$$

4.1.2 Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad \text{missä } p(x) \text{ ja } q(x) \text{ jatkuvia.} \tag{18}$$

Homogeeninen tapaus

1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on homogeeninen, jos $q(x) = 0$. Siis

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \tag{19}$$

Tämä on separoituva ja ratkaistaan kuten edellä:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y && \Leftrightarrow\ \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (y \neq 0)\\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx && \Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx + c'\\
&\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\int p(x)\,dx + c'} && \Leftrightarrow |y| = e^{-\int p(x)\,dx}\cdot e^{c'}\\
&\Leftrightarrow y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx} && \text{yleinen ratkaisu}
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.4.

$$y' - 2y = 0$$

Täydellinen 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{17}$$

Lause 4.1. *Jos* $y_1 = y_1(x)$ *on differentiaaliyhtälön* (18) jokin ratkaisu (*saatu kokeilemalla*) *ja* $y_0 = y_0(x)$ *on yhtälöä* (18) *vastaavan* homogeenisen tapauksen ($q(x) = 0$) yleinen ratkaisu*, niin yhtälön* (18) yleinen ratkaisu *on*

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

Ratkaisu $y_1(x)$ *löydetään kokeilemalla, kun* $q(x)$ *on polynomi,* e^{mx}*,* $\sin kx$*,* $\cos kx$ *tai näiden tulo tai lineaarinen yhdiste.*

Kokeilun/yritteen $y_1(x)$ *muodostaminen*

1) $q(x)$ on x:n polynomi
   Yrite: $y_1(x) = x$:n polynomi (samaa astetta kuin $q(x)$, kertoimet tuntemattomat).

2) $q(x) = e^{kx} f(x)$, missä f on x:n polynomi.
Yrite: $y_1(x) = e^{kx} Q(x)$, missä $Q(x)$ on x:n polynomi (samaa astetta kuin $f(x)$, kertoimet tuntemattomat).

3) $q(x) = T \sin kx + V \cos kx$
Yrite: $y_1(x) = A \sin kx + B \cos kx$

Huomautus.
Jos $q(x) = \sin kx$, niin $y_1(x) = A \sin kx + B \cos kx$.
Jos $q(x) = \cos kx$, niin $y_1(x) = A \sin kx + B \cos kx$.

4) $q(x)$ on edellisten yhdiste tai tulo.

2. tapa lineaarisen differentiaaliyhtälön (18) *ratkaisemiseksi:*

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

Kerrotaan puolittain lausekkeella $e^{\int p(x)\,dx}$:

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot y'(x) + p(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \cdot y(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}$$

Saadaan:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx} \cdot y(x)\right) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}$$

Integroidaan molemmat puolet x:n suhteen:

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot y(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx$$

$\Rightarrow$ Tästä saadaan $y(x)$ ratkaistua.

Esimerkki 4.5.

$$y' - 2y = x^2 - 2x - 3$$

Esimerkki 4.6.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y = x^2 \cdot e^x$$

Esimerkki 4.7.

$$y' + y = e^{2x}$$

4.1.3 Lineaarisen differentiaaliyhtälön erikoistapaus

Differentiaaliyhtälö muotoa

$$\frac{d}{dx} f(y) + p(x) f(y) = q(x), \quad y(x) = ? \tag{20}$$

missä $f(y)$, $p(x)$ ja $q(x)$ ovat jatkuvia funktioita.

Eli muotoa

$$f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} + p(x) f(y) = q(x)$$

Ratkaistaan ensin $f(y)$ kertomalla puolittain termillä $e^{\int p(x)\,dx}$. Saadaan

$$\begin{aligned} & e^{\int p(x)\,dx} \cdot f'(x) \cdot \frac{dy}{dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \cdot f(y) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx} \cdot f(y)\right) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx} \end{aligned} \tag{21}$$

Tästä $f(y)$ ratkaistaan integroimalla yhtälö (21) x:n suhteen ja saadusta funktiosta $f(y)$ ratkaistaan puolestaan funktio $y(x)$.

Esimerkki 4.8.

$$\frac{dy}{dx} + xy \ln y = xye^{-x^2}, \quad \text{alkuehto } y(0) = 1$$

4.1.4 Homogeeniset differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälö on *homogeeninen*, jos sen normaalimuoto säilyy muuttumattomana, kun x ja y korvataan λx:llä ja λy:llä ($\lambda \neq 0$ vakio). Siis

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{22}$$

on homogeeninen, jos $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Homogeeninen differentiaaliyhtälö (22) on nyt muotoa

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{23}$$

Toisaalta differentiaaliyhtälö

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x, y)}{N(x, y)}\right)$$

on homogeeninen, jos M ja N ovat samanasteisia homogeenifunktioita.

Jokin funktio $h(x,y)$ on k. astetta oleva homogeeninen funktio, jos $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k h(x,y)$.

Homogeenista differentiaaliyhtälöä *ratkaistaessa* sijoitetaan (tuntemattoman funktion vaihto)

$$\frac{y}{x} = u \qquad \left(u = \frac{y(x)}{x} = u(x) \text{ on } x:\text{n funktio}\right)$$

$$\text{ja} \qquad \frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx} \qquad \left(y = xu \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 1 \cdot u + x \cdot \frac{du}{dx}\right)$$

yhtälöön (23)

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{22}$$

jolloin saadaan

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = g(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x} = h(x,u).$$

Tämä on separoituva differentiaaliyhtälö uuden tuntemattoman funktion $u(x)$ suhteen. Tästä voidaan ratkaista normaalisti $u(x)$ ja sen avulla saadaan

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Esimerkki 4.9.

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Esimerkki 4.10.

$$x\frac{dy}{dx} = x + y, \quad x > 0.$$

4.1.5 Eksaktit differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälö

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{24}$$

on *eksakti*, jos on olemassa sellainen funktio $g(x,y)$, että

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Tästä saadaan, että differentiaaliyhtälö (24) on eksakti, jos ja vain jos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad !!!!!!!!!!$$

Eksaktin differentiaaliyhtälön ratkaiseminen*:*

Etsitään funktio $g(x,y)$, jolla $\dfrac{\partial g}{\partial x} = M$ ja $\dfrac{\partial g}{\partial y} = N$.

Siis

$$\begin{aligned} g(x) &= \int M\,dx \qquad \text{ja} \qquad && (\text{muuttujaa } x \text{ sisältävä } g(x,y) : n \text{ osa}) \\ g(y) &= \int N\,dy && (\text{muuttujaa } y \text{ sisältävä } g(x,y) : n \text{ osa}) \end{aligned}$$

Nämä yhdistämällä saadaan funktio $g(x,y)$ määrättyä vakiotermiä vaille.

Eksaktin differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan ratkaisemalla y yhtälöstä $g(x,y) = 0$.

Esimerkki 4.11*.*

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0 \quad \text{alkuehto } y(1) = 1.$$

4.2 Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

$$F(x,y,y',y'') = 0 \qquad y(x) = ?$$

Nyt $y = y(x, c_1, c_2)$ on *yleinen ratkaisu*, jossa c_1 ja c_2 ovat mielivaltaisia vakioita. Jos asetetaan lisäksi ehdot $y(x_0) = y_0$ ja $y'(x_0) = y_1$ (tai $y(x_1) = y_1$), niin vakiot c_1 ja c_2 tulevat täysin määrättyä ja saadaan haluttu *yksityisratkaisu*.

4.2.1 Toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

Homogeeninen tapaus

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{25}$$

Lause 4.2. *Yhtälöllä* (25) *on täsmälleen yksi annetut alkuehdot* $y(x_0) = y_0$ *ja* $y'(x_0) = y_1$ *toteuttava ratkaisu.*

Vakiokertoiminen 2. kertaluvun homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{26}$$

Yrite:

$$\begin{aligned}
& y = e^{rx} \\
\Rightarrow\quad & y' = re^{rx} \quad \text{ja} \quad y'' = r^2 e^{rx} \\
& \text{sijoitetaan yrite yhtälöön (26)} \\
\Rightarrow\quad & r^2 e^{rx} + are^{rx} + bye^{rx} = 0 \qquad (27) \\
\Leftrightarrow\quad & (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & r^2 + ar + b = 0 \qquad (28)
\end{aligned}$$

Tämä on ns. *karakteristinen yhtälö*, josta r ratkaistaan.

Eri tapauksia:

1. Karakteristisen yhtälön (28) juuret ovat reaaliset ja erisuuret

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$$

Tällöin yhtälön (26) ratkaisuja ovat

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{r_1 x} \\ y_2(x) = e^{r_2 x} \quad , r_1 \neq r_2 \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälön (26) yleinen ratkaisu:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 4.12.

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
& \text{Yrite:} \quad y(x) = e^{rx} \\
\Rightarrow \quad & y'(x) = re^{rx} \text{ ja } y''(x) = r^2 e^{rx} \\
\Leftrightarrow \quad & r^2 e^{rx} + 5re^{rx} + 6e^{rx} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (r^2 + 5r + 6)e^{rx} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & r^2 + 5r + 6 = 0 \\
\Rightarrow \quad & r = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön $y'' + 5y' + 6y = 0$ ratkaisuja ovat $y_1(x) = e^{-2x}$ ja $y_2(x) = e^{-3x}$.
Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Karakteristisen yhtälön (28) juuret reaaliset ja yhtä suuret.

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = r_1 = r_2$$

Nyt

$$y_1(x) = e^{rx}$$

on yhtälön (26) eräs ratkaisu. Toiseksi ratkaisuksi käy funktio

$$y_2(x) = xe^{rx}.$$

Tällöin yhtälön (26) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

Esimerkki 4.13.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
& \text{Yrite:} \quad y(x) = e^{rx} \\
\Rightarrow \quad & y'(x) = re^{rx} \text{ ja } y'' = r^2 e^{rx} \\
\Leftrightarrow \quad & r^2 e^{rx} - 4re^{rx} + 4e^{rx} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (r^2 - 4r + 4)e^{rx} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & r^2 - 4r + 4 = 0 \\
\Rightarrow \quad & r = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2 \quad \text{(kaksinkertainen)}
\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön $y'' - 4y' + 4y = 0$ eräs ratkaisu on $y_1(x) = e^{2x}$ ja toiseksi ratkaisuksi käy $y_2(x) = xe^{2x}$.
Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Karakteristisen yhtälön (28) juuret eivät ole reaalisia eli

$$r^2 + ar + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \alpha \pm i\beta$$

Tällöin yhtälön (26) ratkaisuja ovat

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{ja} \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Differentiaaliyhtälön (26) yleinen ratkaisu tässä tapauksessa on

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2e^{\alpha x} \sin \beta x \\ &= e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \end{aligned}$$

Esimerkki 4.14.

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} & \text{Yrite:} \quad y(x) = e^{rx} \\ \Rightarrow \quad & y'(x) = re^{rx} \text{ ja } y''(x) = r^2e^{rx} \\ \Leftrightarrow \quad & r^2e^{rx} - 4re^{rx} + 13e^{rx} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (r^2 - 4r + 13)e^{rx} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & r^2 - 4r + 13 = 0 \\ \Rightarrow \quad & r = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \\ \Rightarrow & \alpha = 2 \quad \text{ja} \quad \beta = 3 \end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön $y'' - 4y' + 13y = 0$ ratkaisuja ovat $y_1(x) = e^{2x} \cos 3x$ ja $y_2(x) = e^{2x} \sin 3x$.
Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1e^{2x} \cos (3x) + C_2e^{2x} \sin (3x)$ $= e^{2x}(C_1 \cos (3x) + C_2 \sin (3x)),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Täydellinen 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{29}$$

Lause 4.3. *Yhtälön* (29) *yleinen ratkaisu* $y = y_0 + y_1$*, missä* y_0 *on yhtälöä* (29) *vastaavan homogeenisen yhtälön* (*ts.* $r(x) = 0$) *yleinen ratkaisu ja* y_1 *on yhtälön* (29) *jokin yksityisratkaisu* (*löytyy kokeilemalla*)*.*

Vakiokertoiminen 2. kertaluvun täydellinen lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{30}$$

Kun a ja b ovat vakioita, niin y_0 löydetään helposti (kuten edellä). Ongelmana on y_1:n löytäminen.

Kokeilun/yritteen $y_1(x)$ muodostaminen:

1. $r(x)$ on muuttujan x polynomi

   Yrite: $y_1(x) = x$:n polynomi (samaa astetta kuin $r(x)$, kertoimet tuntemattomat).

2. $r(x) = e^{kx} f(x)$, missä f on muuttujan x polynomi.

   Yrite: $y_1(x) = e^{kx} Q(x)$, missä $Q(x)$ on x:n polynomi (samaa astetta kuin $f(x)$, kertoimet tuntemattomat).

3. $r(x) = T \sin kx + V \cos kx$

   Yrite: $y_1(x) = A \sin kx + B \cos kx$

   Huomautus.
   Jos $r(x) = \sin kx$, niin $y_1(x) = A \sin kx + B \cos kx$.
   Jos $r(x) = \cos kx$, niin $y_1(x) = A \sin kx + B \cos kx$.

4. $r(x)$ on edellisten yhdiste tai tulo.

Esimerkki 4.15.

$$y'' + y = x \tag{31}$$

Ratkaisu:

1^o Homogeeninen tapaus:

$$y'' + y = 0 \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \text{karakteristinen yhtälö:} \quad r^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad r^2 = -1 = i^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i = 0 \pm i \\
&\Rightarrow \quad \alpha = 0 \ \text{ ja } \ \beta = 1
\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön (32) yleinen ratkaisu on

$$y_0(x) = C_1 e^{0x} \cos(1x) + C_2 e^{0x} \sin(1x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2^o Yrite: $y_1(x) = Ax + B \quad \Rightarrow \quad y'(x) = A$ ja $y'' = 0$

Sijoitetaan yllä olevat yhtälöön (31), jolloin saadaan

$$0 + Ax + B = x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = x.$$

Siis differentiaaliyhtälön (31) eräs ratkaisu on $y_1(x) = x$

3^o Differentiaaliyhtälön (31) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 4.16.

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}(9x + 1) \tag{33}$$

Ratkaisu:

1^o Homogeeninen tapaus:

$$y'' + 2y' + y = 0 \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \text{karakteristinen yhtälö:} \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1 \quad \text{(kaksinkertainen)}
\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön (34) yleinen ratkaisu on

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2^o Yrite:

$$\begin{aligned}
& y_1(x) = e^{2x}(Ax+B) \\
\Rightarrow\quad & y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax+B) + e^{2x}\cdot A \\
& = e^{2x}(2Ax+2B+A) \\
\Rightarrow\quad & y_1''(x) = 2e^{2x}(2Ax+2B+A) + e^{2x}\cdot 2A \\
& = e^{2x}(4Ax+4B+2A+2A) \\
& = e^{2x}(4Ax+4A+4B)
\end{aligned}$$

Sijoitetaan yllä olevat yhtälöön (33), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
& e^{2x}(4Ax+4A+4B) + 2e^{2x}(2Ax+2B+A) + e^{2x}(Ax+B) = e^{2x}(9x+1) \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x}(9Ax+6A+9B) = e^{2x}(9x+1) \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 9A = 9 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \\ 6A+9B = 1 \quad \Rightarrow \quad 9B = 1-6A = -5 \quad \Leftrightarrow B = \frac{-5}{9} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nyt differentiaaliyhtälön (33) eräs ratkaisu on $y_1(x) = e^{2x}(x - \frac{5}{9})$.

3^o Sifferentiaaliyhtälön (33) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + e^{2x}(x - \frac{5}{9}),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 4.17.

$$y'' + 4y = 6\sin x + 9\cos x$$

Esimerkki 4.18.

$$y'' - 4y = x^2 + e^x$$

5 Differenssiyhtälöt

Funktion $y_t = f(t)$ arvoja tarkastellaan ajanhetkenä t $(y_0, y_1, \ldots)$.

Funktion $f(t)$ ei tarvitse olla jatkuva funktio.

Aikaa tarkastellaan *diskreettinä*, mieluummin periodina kuin pisteenä.

Differenssioperaattori Δ kuvaa funktion y muutosta ajan suhteen:

$$
\begin{aligned}
\Delta y_t &= y_{t+1} - y_t \qquad \text{(1. differenssi)}\\
\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_{t+1} - y_t) = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)\\
&\ldots\\
\Delta^n y_t &= \Delta(\Delta^{n-1} y_t)
\end{aligned}
$$

Esimerkki 5.1.

$$\Delta y_t = 2, \quad \Delta y_t = -0,1 y_t$$

5.1 Ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälöt

Tarkoituksena löytää jokin $y_t = f(t)$ siten, että differenssiyhtälö toteutuu.

Yhtälö sisältää vain ensimmäisiä differenssejä.

Täydellinen muoto: $a_1 y_{t+1} - a_0 y_t = c$, $\quad a_i$ ja c vakioita.

Homogeeninen muoto: $a_1 y_{t+1} - a_0 y_t = 0$, $\quad a_i$ vakioita.

5.1.1 Homogeenisen muodon ratkaiseminen:

$$a_1 y_{t+1} - a_0 y_t = 0$$

Yritetään ratkaisua $y_t = A(b^t)$ sijoittamalla se differenssiyhtälöön. Saadaan

$$a_1 A b^{t+1} - a_0 A b^t = 0 \quad | : (A b^t)$$

karakteristinen yhtälö:

$$a_1 b - a_0 = 0$$

Tästä saadaan yleinen ratkaisu $y_t = A b^t$, kun b on ratkaistu. Yksityisratkaisu saadaan alkuehdolla $y_0 = \ldots$, jolloin A ratkeaa.

Esimerkki 5.2. Ratkaise $y_{t+1} - 5y_t = 0$ alkuehdolla $y_0 = 5$.

5.1.2 Täydellisen muodon ratkaiseminen:

$$a_1 y_{t+1} - a_0 y_t = c$$

Yleinen ratkaisu $y_t = y_h + y_p$, missä y_h on vastaavan homogeenisen muodon yleinen ratkaisu ja y_p kokeilemalla saatu jokin ratkaisu täydelliselle muodolle.

Kokeilu: Yritetään ensin $y_p = k$ (vakio), jos tämä ei toimi yritetään $y_p = kt$, sitten $y_p = kt^2$ jne (kokeilusta pyritään ratkaisemaan vakio k).

Esimerkki 5.3. Ratkaise $y_{t+1} - 5y_t = 1$ alkuehdolla $y_0 = \frac{7}{4}$.

5.2 Toisen kertaluvun differenssiyhtälöt

Yhtälöt, joissa esiintyy toista differenssiä Δ^2.

Yksityisratkaisuun tarvitaan kaksi alkuehtoa $y_0 = \ldots$ ja $y_1 = \ldots$.

Täydellinen muoto: $a_2 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = c, \quad a_i$ ja c vakioita.

Homogeeninen muoto: $a_2 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0, \quad a_i$ vakioita.

5.2.1 Homogeenisen muodon ratkaiseminen:

$$a_2 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

Yritetään ratkaisua $y_t = A(b^t)$ sijoittamalla se differenssiyhtälöön. Saadaan

$$a_2 A b^{t+2} + a_1 A b^{t+1} + a_0 A b^t = 0 \quad | : Ab^t$$

Karakteristinen yhtälö:

$$a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = 0,$$

josta ratkaistaan b.

Eri tapauksia:

1. Karakteristisen yhtälön juuret ovat reaaliset ja erisuuret.

$$a_2b^2 + a_1b + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \begin{cases} b_1 \\ b_2 \end{cases}$$

   Tällöin homogeenisen muodon yleinen ratkaisu on

$$y_t = A_1b_1^t + A_2b_2^t$$

   Esimerkki 5.4. Ratkaise $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 0$ alkuehdoilla $y_0 = 4$ ja $y_1 = 5$.

2. Karakteristisella yhtälöllä kaksinkertainen reaalijuuri.

$$a_2b^2 + a_1b + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = b_1 = b_2$$

   Tällöin homogeenisen muodon yleinen ratkaisu on

$$y_t = A_1b^t + A_2b^tt$$

3. Karakteristisen yhtälön juuret eivät ole reaalisia.

$$a_2b^2 + a_1b + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \alpha \pm i\beta$$

   Tällöin homogeenisen muodon yleinen ratkaisu on

$$y_t = A_1(\alpha + i\beta)^t + A_2(\alpha - i\beta)^t$$

Yksityisratkaisut saadaan, kun alkuehtojen perusteella ratkaistaan vakiot A_1 ja A_2.

5.2.2 Täydellisen muodon ratkaiseminen:

$$a_2y_{t+2} + a_1y_{t+1} + a_0y_t = c$$

Yleinen ratkaisu $y_t = y_h + y_p$, missä y_h on vastaavan homogeenisen muodon yleinen ratkaisu ja y_p kokeilemalla saatu jokin ratkaisu täydelliselle muodolle.

Kokeilu: Yritetään ensin $y_p = k$ (vakio), jos tämä ei toimi yritetään $y_p = kt$, sitten $y_p = kt^2$ jne (kokeilusta pyritään ratkaisemaan vakio k).

Yksityisratkaisu saadaan, kun alkuehtojen perusteella ratkaistaan vakiot A_1 ja A_2.

Esimerkki 5.5. Ratkaise $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$ alkuehdoilla $y_0 = 4$ ja $y_1 = 5$.