Äärelliset kunnat

Välikoe 1, kevät 2011 **4.3.2011 M. Rinta-aho**

1. Osoita, että $f(x) = x^3 + 4x - 1 \in \mathbb{F}_7[x]$ on jaoton. Olkoon α polynomin f nollakohta. Laske
$$(\alpha^2 + 3\alpha + 2)(2\alpha^2 - \alpha + 4)$$
kunnassa $\mathbb{F}_{7^3}$ ja esitä tulos alkion α määräämässä polynomikannassa.

2. Olkoon $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{F}_{q^n}$ kanta kunnan $\mathbb{F}_q$ suhteen. Määrittele kannan B duaalikanta. Määrää normaalikannan $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\} \subseteq \mathbb{F}_8$ duaalikanta, kun $\alpha^3 + \alpha^2 + 1 = 0$.

3. Määrittele alkion $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ minimipolynomi kunnan $\mathbb{F}_q$ suhteen. Olkoon tämä polynomi m_α. Osoita seuraavat väitteet:
   (a) m_α on yksikäsitteinen.
   (b) Jos $f \in \mathbb{F}_q[x]$ ja $f(\alpha) = 0$, niin $m_\alpha \mid f$.

4. Olkoot $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{q^n}$ ja $\mathbb{L} = \mathbb{F}_{q^{nm}}$. Olkoon $\alpha \in \mathbb{F}_{q^{nm}}$. Todista, että
$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{L}}(\alpha) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Tr}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{L}}(\alpha)\big) \quad \text{ja} \quad \mathrm{N}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{L}}(\alpha) = \mathrm{N}_{\mathbb{F}}^{\mathbb{K}}\big(\mathrm{N}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{L}}(\alpha)\big).$$