

## Äärelliset kunnat

Loppukoe 8.8.2011

1. Tiedetään, että  $f(x) = x^2 - x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$  on jaoton. Konstruoi tämän avulla kunta  $\mathbb{F}_{25}$ . Määää alkion  $2\alpha + 3$  minimipolynomi kunnan  $\mathbb{F}_5$  suhteen, missä  $\alpha \in \mathbb{F}_{25}$  on polynomin  $f$  nollakohta.
2. Määää syklotominen polynomi  $\Phi_{44}(x)$ . Mitä astetta tämän jaottomat tekijät renkaassa  $\mathbb{F}_7[x]$  ovat?
3. Olkoon  $a \in \mathbb{F}_q$  ja  $p = \text{char } \mathbb{F}_q$ . Osoita, että trinomi  $f(x) = x^p - x - a$  on jaollinen renkaassa  $\mathbb{F}_q[x]$ , jos ja vain jos sillä on nollakohta kunnassa  $\mathbb{F}_q$ .
4. Määrittele duaalikanta. Todista, että laajennuksen  $\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q$  jokaisella kannalla on yksikäsitteinen duaalikanta.
5. Osoita, että jokainen  $\gamma \in \mathbb{F}_{25} \setminus \{0, 1\}$  on kunnan  $\mathbb{F}_{25}$  primitiivialkio. (2 p.)  
Oletetaan sitten, että kunnan  $\mathbb{F}_q$ ,  $q > 2$ , jokainen alkio  $\gamma \neq 0, 1$  on primitiivinen. Osoita, että  $\text{char } \mathbb{F}_q = 2$  lukuunottamatta yhtä luvun  $q$  arvoa. Mikä on tämä poikkeava arvo? (4 p.)