Äärelliset kunnat

Loppukoe 9.5.2011

1. Määrittele äärellisen kunnan primitiivialkio. Osoita, että $\beta \in \mathbb{F}_{16}$, jolle $\beta^4 + \beta^3 + 1 = 0$, on kunnan $\mathbb{F}_{16}$ primitiivialkio. Määrää myös toinen primitiivialkio kunnasta $\mathbb{F}_{16}$ ja esitä se alkion β avulla.

2. Olkoon $a \in \mathbb{F}_q$ alkio, jonka absoluuttinen jälki on nollasta eroava, jolloin tiedetään, että $x^p - x - a \in \mathbb{F}_q[x]$ on jaoton, missä $p = \operatorname{char} \mathbb{F}_q$. Esitä ilman todistusta, miten tämän avulla löydetään renkaasta $\mathbb{F}_{q^p}[x]$ jaoton astetta p oleva polynomi. Konstruoi näitä tuloksia hyödyntäen renkaasta $\mathbb{F}_2[x]$ jaoton astetta 4 oleva polynomi.

3. Olkoon G äärellinen Abelin ryhmä ja $\chi \in \widehat{G}$ epätriviaali. Osoita, että
$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$
Laske lisäksi summa $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi(x)$ *jokaisella* $\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q}$.

4. Määrittele duaalikanta. Todista, että laajennuksen $\mathbb{F}_{q^n} : \mathbb{F}_q$ jokaisella kannalla on yksikäsitteinen duaalikanta.

5. Määrää kaikki sellaiset parametrien $n \in \mathbb{Z}_+$, q ja $a \in \mathbb{F}_q$ arvot, että binomin $x^n - a \in \mathbb{F}_q[x]$ nollakohta on kunnan $\mathbb{F}_{q^n}$ primitiivialkio.