

Äärelliset kunnat

Välikoe 2, kevät 2011

Tehtävissä p on tarkasteltavan kunnan karakteristika.

1. Määrittele n :s syklotominen polynomi Φ_n annetun kunnan $\mathbb{F}$ suhteen. (Kerro myös, milloin Φ_n on määritelty.)

Määää $\Phi_{18}(x)$ kunnan $\mathbb{F}_5$ suhteen. Onko tämä jaoton renkaassa $\mathbb{F}_5[x]$?

2. Olkoon $\chi_1: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\chi_1(x) = e^{\frac{2\pi i \operatorname{tr}(x)}{p}}$, missä tr on kunnan $\mathbb{F}_q$ absoluuttinen jälki. Osoita, että jos $a \in \mathbb{F}_q$, niin

$$\chi_a: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \chi_a(x) = \chi_1(ax)$$

on kunnan $\mathbb{F}_q$ additiivinen karakteri. Osoita lisäksi, että $\chi_a \neq \chi_b$ aina, kun $a \neq b$.

3. Olkoon $a \in \mathbb{F}_q$. Osoita, että trinomi $f(x) = x^p - x - a$ on jaollinen renkaassa $\mathbb{F}_q[x]$, jos ja vain jos sillä on nollakohta kunnassa $\mathbb{F}_q$.
4. Osoita, että

$$\sum_{\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}} G(\psi, \chi) = (q-1)\chi(1) \quad \text{aina, kun } \chi \in \widehat{\mathbb{F}_q}.$$

Laske myös summan $\sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}_q}} G(\psi, \chi)$ arvo, kun $\psi \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$.