Abstrakti mittateoria

Tentti 13.12.2010

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Määrittele σ-algebra.
b) Olkoot (X, Γ_X, μ) mitta-avaruus, (Y, Γ_Y) mitallinen avaruus ja $T : X \to Y$ mitallinen kuvaus. Määritellään mitan μ kuvamitta $T_*\mu$ asettamalla $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ kaikilla $A \in \Gamma_Y$. Osoita, että $T_*\mu$ on mitta Γ_Y:llä.

2. Olkoot μ mitta σ-algebralla Γ ja $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$ joukkoja, joille $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ja $\mu(A_1) < \infty$. Osoita, että

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

3. Olkoon μ mitta joukolla X ja $A \subset X$. Määritellään mitan μ rajoittumamitta $\mu|_A$ asettamalla $\mu|_A(B) = \mu(B \cap A)$ kaikilla $B \subset X$. Olkoot μ lukumäärämitta joukolla $X = (0, \infty)$, Γ μ-mitallisten joukkojen σ-algebra ja $\nu = \mu|_{\mathbb{N}}$. Olkoon (X, Γ, ν) mitta-avaruus. Onko funktio $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\sin(\frac{\pi}{2}x)$, integroituva?

4. Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i \in \mathbb{N}$, mitallisia funktioita, joille

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int |f_i| \, d\mu < \infty.$$

Osoita, että

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

Mitä yhtälön vasen puoli tarkoittaa?

5. Olkoot X separoituva metrinen avaruus, μ σ-äärellinen Borelin mitta X:llä ja $f : X \to [0, \infty)$ Borel-mitallinen. Oletetaan tunnetuksi, että Borel-mitallisten joukkojen tulo on Borel-mitallinen ja Borelin mittojen tulo on Borelin mitta.
a) Osoita, että joukko

$$A = \{(x, t) \in X \times [0, \infty) \mid f(x) \geq t\}$$

on Borel-mitallinen.
b) Osoita, että

$$\int f \, d\mu = \int_{[0,\infty]} \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}) \, d\mathcal{L}(t).$$