

Abstrakti mittateoria

Tentti 14.2.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Määrittele mitta.
b) Olkoot $T : X \rightarrow Y$ kuvaus ja Γ σ -algebra joukossa Y . Osoita, että $T^{-1}(\Gamma)$ on σ -algebra joukossa X .
2. Olkoot μ ulkomitta joukossa X ja Γ μ -mitallisten joukkojen σ -algebra. Osoita, että μ :n rajoittuma σ -algebraan Γ on mitta.
3. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva. Osoita, että f' on Borel-mitallinen.
4. Olkoot (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $f \in L^1(X, \mu)$, $f(x) > 0$ kaikilla $x \in X$ ja $0 < \alpha < \mu(X) < \infty$. Osoita, että

$$\inf \left\{ \int_E f d\mu \mid E \in \Gamma, \mu(E) \geq \alpha \right\} > 0.$$

Päteekö väite, jos ehto $\mu(X) < \infty$ poistetaan?

5. Olkoon $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että $\mathcal{L}^2(\text{graf}(f)) = 0$, missä $\text{graf}(f)$ on kuvauksen f graafi.