Aikasarja-analyysi
Tenttikysymykset

2012, Toukokuu 14

Tehtävät 1-5 kuuluvat aineopintojen tenttiin ja tehtävät 1-6 kuuluvat syventävien opintojen tenttiin. (Questions 1-5 belong to the examination at the level of aineopinnot and questions 1-6 belong to the examination at the level of syventävät opinnot.)

1. Määrittele (heikosti) stationaarinen aikasarja ja vahvasti stationaarinen aikasarja.

2. Tarkastellaan AR(1)-mallia
$$X_t = bX_{t-1} + \epsilon_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$, ϵ_t ja X_{t-1} ovat riippumattomia ja $|b| < 1$. Osoita, että
$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - b^2}\,.$$

3. Olkoon $\{X_t\} \sim \mathrm{MA}(q)$. Osoita, että $\{X_t\}$ on (heikosti) stationaarinen.

4. Olkoot $\{X_t\}$ ja $\{Y_t\}$ korreloimattomia stationaarisia aikasarjoja joilla on spektritiheysfunktiot f_X ja f_Y. Laske aikasarjan $\{X_t + Y_t\}$ spektritiheysfunktio.

5. (a) Osoita, että satunnaisvektorin $(X_1, \ldots, X_T)$ tiheysfunktiolle pätee
$$\begin{aligned} & f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1, \ldots, x_T) \\ = \; & f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) \prod_{t=p+1}^{T} f_{X_t \mid X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_1=x_1}(x_t), \end{aligned}$$
missä $f_{X_t \mid X_{t-1}=x_{t-1},\ldots,X_1=x_1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on satunnaismuuttujan
$$X_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1$$
tiheysfunktio, $x_1, \ldots, x_T \in \mathbf{R}$ ja $1 \le p < T$, $T \ge 2$.

(b) Olkoon $\{X_t\}$ ARCH(p) mallia noudattava aikasarja:

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

missä

$$\sigma_t^2 = c_0 + b_1 X_{t-1}^2 + \cdots + b_p X_{t-p}^2,$$

missä $\{\epsilon_t\} \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$ ja ϵ_t on riippumaton muuttujista $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$. Olkoon lisäksi ϵ_t:n tiheysfunktio $f_\epsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Osoita, että

$$f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1, \ldots, x_T) = f_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) \prod_{t=p+1}^{T} \frac{1}{\sigma_t} f_\epsilon\left(\frac{x_t}{\sigma_t}\right).$$

HUOM. Tehtävä 6 kuuluu vain syventävien opintojen tenttiin. (Question 6 belongs only to the examination at the level of syventävät opinnot.)

6. Olkoon $\{X_t\}$ stationaarinen GARCH(p, q)-prosessi ja oletetaan, että $EX_t^4 < \infty$ ja $E\epsilon_t^4 < \infty$. Osoita, että $\{X_t^2\}$ on ARMA($p \vee q, q$)-prosessi, missä $p \vee q = \max\{p, q\}$.