

ALGEBRA I

1. välikoe 1.3.2010, K. Myllylä

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjoja

- Olkoot $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$. Osoita, että $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
 - Olkoot $ac \equiv bc \pmod{m}$ ja $\text{sytt}(c, m) = 1$. Osoita, että $a \equiv b \pmod{m}$.
- Määritellään relaatio \sim joukossa \mathbb{Z} seuraavasti: $a \sim b$, jos luku $a + b$ on parillinen. Onko \sim ekvivalenssirelaatio? Jos relaatio \sim on ekvivalenssirelaatio, niin montako eri ekvivalenssiluokkaa on ja mitkä ne ovat?
- Ratkaise yhtälöt
 - $247x \equiv 1 \pmod{663}$,
 - $247x \equiv 26 \pmod{663}$.
- Laske jakojäännös, kun luku 5^{147} jaetaan luvulla 72.
- Oletetaan, että $k \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että luvut $3k+2$ ja $5k+3$ ovat suhteellisia alkulukuja.
- Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $b > 0$. Osoita, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut q ja r , että $a = qb + r$, missä $0 \leq r < b$.
(Lukujen q ja r yksikäsitteisyyttä ei tarvitse osoittaa.)

Perustele vastauksesi täydellisesti!