

# ALGEBRA I

## 2. välikoe 2.4.2009, K. Myllylä

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjoja

1. a) Osoita, että (4p)

$(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$  on ryhmä.

- b) Todista seuraava tulos: Jos ryhmän kertaluku on alkuluku, niin ryhmä on syklinen. (4p)

2. a) Laske  $\varphi(16)$ . (1p)

- b) Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$  alkiot ja tee ryhmätaulu. (2p)

- c) Osoita, että joukko

$$H = \{[1], [7], [9], [15]\}$$

on ryhmän  $(\mathbb{Z}_{16}^*, \cdot)$  normaali aliryhmä. (2p)

- d) Onko  $H$  syklinen ryhmä? (1p)

- e) Määrää tekijäryhmän  $\mathbb{Z}_{16}^*/H$  alkiot ja tee ryhmätaulu. (2p)

3. a) Olkoon  $G$  ryhmä. Olkoot  $H \leq G$  ja  $N(H) = \{a \in G \mid aH = Ha\}$ .  
Osoita, että

$$1^\circ N(H) \leq G, \quad (3p)$$

$$2^\circ H \trianglelefteq N(H). \quad (3p)$$

- b) Olkoot  $(G, *)$  ryhmä ja  $a, b, c \in G$  sekä  $a * b * c = e$ .

Osoita, että  $b * c * a = e$ . (2p)

Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.  
Perustele tehtävät riittävästi.