ALGEBRA I

2. välikoe (ylimääräinen) 6.4.2009, K. Myllylä

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjoja

1. a) Osoita, että (4p)

$$(\mathbb{Z}_m, +) \text{ on ryhmä.}$$

   b) Olkoot G ryhmä ja $a \in G$ sekä n pienin sellainen positiivinen kokonaisluku, että $a^n = e$. Osoita, että tällöin $|\langle a \rangle| = n$. (4p)

2. a) Laske $\varphi(20)$. (1p)

   b) Määrää ryhmän $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ alkiot ja tee ryhmätaulu. (2p)

   c) Osoita, että joukko
$$H = \{[1], [9], [13], [17]\}$$
   on ryhmän $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ normaali aliryhmä. (2p)

   d) Onko H syklinen ryhmä? (1p)

   e) Määrää tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{20}^*/H$ alkiot ja tee ryhmätaulu. (2p)

3. a) Olkoon G Abelin ryhmä. Olkoot $H \leq G$ ja $K \leq G$. Merkitään $HK = \{ab | a \in H, b \in K\}$. Osoita, että $HK \leq G$. (3p)

   b) Esitä Lagrangen lause. (2p)

   c) Olkoot G ryhmä ja $H \leq G$. Oletetaan, että aliryhmän H vasemmanpuoleisten sivuluokkien lukumäärä ryhmässä G on 2. Osoita, että $H \trianglelefteq G$. (3p)

Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.
Perustele tehtävät riittävästi.