ALGEBRA I

3. välikoe 11.5.2009, K. Myllylä

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjoja

Tenttiaika 3 tuntia

1. a) Olkoon $f : G \to H$ homomorfismi ja olkoot e_G ja e_H ryhmien G ja H neutraalialkiot. Osoita, että tällöin

$$f(e_G) = e_H \quad \text{ja} \quad f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

aina, kun $a \in G$.

b) Olkoon $(K, +, \cdot)$ äärellinen kunta. Osoita, että kunnan K karakteristika $char K$ on välttämättä alkuluku.

2. Tarkastellaan reaalilukujen renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ osajoukkoa $F = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Osoita, että F on reaalilukujen renkaan $\mathbb{R}$ alirengas. (3p)

b) Osoita, että joukko $I = \{4x + 4y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan F ideaali. (3p)

c) Miksi I ei ole maksimaalinen ideaali? (2p)

3. a) Esitä polynomirenkaan $\mathbb{Z}_3[x]$ polynomi

$$f(x) = [1]x^3 + [2]x^2 + [1]x + [2]$$

jaottomien polynomien tulona.

b) Kuvaus $f : (\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot), f(a) = a^2$ on ryhmähomomorfismi. Osoita, että

$$(\mathbb{Z}_{32}^*/\mathrm{Ker} f, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +).$$